BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLV

NUMĂRUL 1. — SEPTEMVRIE 1939

SUMARUL

1. Lista Membrilor Societăţii „Gazeta Matematică".
2. Membrii decedaţi.
3. Extinderi în legătură cu indicatorii . . *Cpt. C-dor I. Linteş.*
4. Concursul „Gazetei Matematice" din 1940.
5. Premii, burse şi publicaţii, din veniturile Societăţii „Gazeta Matematică".
6. Note Matematice: 1 — 5.
7. Bibliografie.
8. Cereri.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 2091, 2578, 2585, 2920, 3840, 4029, 4177, 4339, 4432, 4829, 4863, 4932, 4956, 5038, 5077.
11. Exerciţii 1 — 2.
12. Probleme propuse: 5180 — 5194.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1939

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **D. Stoica**, Inginer; Cpt. Comandor-Inginer **Gr. Zapan**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Secretarul General al Ministerului Lucrărilor Publice şi Comunicaţiilor, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 766, 887, 1000, 08, 56, 146, 270, 97, 99, 310, 67, 99, 412, 50, 553, 650, 711, 64, 906, 14, 29, 59, 87, 2004, 17, 70, 74, 170, 338, 405, 30, 39, 77, 577, 87, 607, 38, 55, 65, 84, 713, 17, 35, 69, 814, 65, 86, 909, 12, 26, 36, 47, 3069, 81, 127, 61, 208, 55, 98, 304, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 522, 23, 33, 42, 45, 72, 73, 608, 27, 35, 47, 57, 65, 81, 99, 700, 33, 36, 93, 802, 29, 36, 44, 53, 64, 96, 909, 13, 16, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 70, 85, 102, 11, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 206, 36, 49, 52, 56, 75, 77, 80, 81, 83, 89, 90, 303, 15, 19, 20, 33, 37, 40, 42, 52, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 80, 84, 89, 93, 95, 96, 99, 404, 12, 16, 26, 45, 49, 52, 64, 68, 73, 74, 80, 81, 86, 87, 89, 90, 92, 511, 13, 16, 34, 47, 58, 61, 87, 92, 98, 601, 02, 03, 05, 15, 30, 36, 41, 47, 50, 57, 67, 70, 72, 75, 80, 85, 86, 90, 98, 710, 34, 42, 49, 72, 91, 805, 12, 39, 49, 59, 79, 88, 90, 94, 901, 05, 13, 14, 15, 20, 27, 29, 37, 38, 44, 49, 62, 73, 74, 79, 81, 85, 86, 91, 92, 97, 5010, 22, 23, 28, 37, 43, 45, 49, 53, 58, 59, 68, 71, 72, 73, 74, 76, 91, 93, 94, 95, 99, 101, 02, 04, 05, 06, 19, 21, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39, 40, 41, 44, 46, 47, 48, 49, 51, 55, 56, 58, 62, 63, 66, 69, 70, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

BURSE ŞI PREMII DIN FONDURILE SOCIETĂŢII „GAZETA MATEMATICĂ“

REGULAMENTUL FONDULUI « ANGHEL SALIGNY »

Art. 1. — Societatea „*Gazeta Matematică*“ primind donaţiunea D-lui *I. Ionescu,* constitue — în conformitate cu dorinţa donatorului — un fond denumit fondul „*Anghel Saligny*“ al cărui venit să servească la publicarea de cărţi tehnice conform art. 6 din actul de donaţie şi în consecinţă înfiinţează o „*Bibliotecă tehnică a Gazetei Matematice*“.

Art. 2. — Toate cărţile tipărite din acest fond vor purta pe copertă în frunte următoarea titulatură: „*Biblioteca tehnică a Gazetei Matematice*“ (tipărită din fondul „*Anghel Saligny*“).

Art. 3. — Biblioteca va avea formatul 120×185 sau 175×260 mm., după felul şi întinderea manuscriselor. Dimensiunile se înţeleg pentru cărţile broşate şi tăiate.

Art. 4. — Volumele se vor da în comerţ legate în pânză de culoare cenuşiu închis şi vor avea imprimate în auriu, inscripţiunile ce se vor stabili pentru fiecare publicaţiune în parte.

Art. 5. — Manuscrisele se adresează delegaţiunii, care convoacă o Adunare generală extraordinară pentru a alege o Comisiune de 3 membri, care se completează cu casierul şi care dă în mod definitiv avizul dacă lucrarea poate să fie tipărită din fondul „*Anghel Saligny*“; aceasta atât din punct de vedere financiar cât şi din punct de vedere al valorii ştiinţifice a lucrării.

Art. 6. — Comisiunea nu ia în considerare decât lucrările complete de matematici aplicate sau cuprins tehnic în legătură cu aceste ştiinţe.

Art. 7. — Dacă la prezentarea manuscrisului nu sunt sume disponibile din venitul fondului „*Anghel Saligny*“ pentru tipărire şi dacă Comisiunea însărcinată cu cercetarea lui opinează că e bine să fie tipărit, atunci delegaţiunea Societăţii va putea împrumuta cu dobândă de 5% cu aprobarea unei Adunări generale suma necesară tipăririi, din numerarul disponibil al „*Gazetei Matematice*“.

Art. 8. — Odată cu depunerea manuscrisului, autorul este obligat să declare în scris că se va supune dispoziţiilor acestui regulament şi ale actului de donaţie al fondului şi că nu va tipări

o a doua ediție înainte de epuizarea ediției tipărită în această bibliotecă.

Art. 9. — In regulă generală se preferă lucrările membrilor Societății „*Gazeta Matematică*".

Art. 10. — Comisiunea pentru cercetarea lucrării, hotărăşte pentru fiecare ediţiune tipărită conform acestui regulament numărul volumelor, formatul (conform art. 3), inscripţiunile (conform art. 4) şi preţul. Deasemenea Comisia va urmări tipărirea şi va lua la timp dispoziţii speciale necesare.

Art. 11. — (art. 4 din actul de donaţie al fondului „*Anghel Saligny*"). — Sumele ce se încasează din vânzarea cărţilor după ce se scot din ele cheltuelile de cost, comision şi expediţie, se distribue în modul următor:

a) 10% autorului respectiv;

b) 20% Societăţii „*Gazeta Matematică*" pentru sporirea capitalului ei;

c) 20% fondului „*Anghel Saligny*" pentru sporirea lui continuă, şi

d) 50% drept venit al fondului „*Anghel Saligny*", întrebuinţându-se prin urmare pentru noui publicaţiuni.

Art. 12. — Autorul primeşte gratuit câte 10 volume din lucrările lui, la fiecare ediţie.

REGULAMENTUL FONDULUI BURSEI «PROFESOR ION IONESCU»

Art. 1. — Societatea „*Gazeta Matematică*" primeşte să administreze fondul instituit de un grup de foşti elevi ai D-lui Profesor *Ion Ionescu,* reprezentat prin D-nii *Gh. Em. Filipescu, A. Ioanovici, H. Theodoru* şi *D. Stan,* membri ai Societăţii *Gazeta Matematică,* din venitul căruia să se acorde o bursă anuală elevilor Şcoalei Politehnice Regele Carol II.

Bursa va purta numele: *Bursa Profesor Ion Ionescu* şi este menită, în conformitate cu dorinţa donatorilor, să perpetueze tradiţia muncii şi disciplinei introduse de D-nul Prof. *Ion Ionescu* în vechea Şcoală Naţională de Poduri şi Şosele şi continuate în Şcoala Politehnică.

Art. 2. — Fondul iniţial este constituit din efecte publice 3% (Renta consolidării) în valoare nominală de 1.000.000 lei.

Art. 3. — Venitul acestui fond, micşorat cu cotele prevăzute la art. 7 din Regulamentul general al Administrării Fondurilor *Gazetei Matematice*, se acordă sub formă de bursă, plătită lunar, în rate egale, timp de 9 luni, unuia din elevii cei mai merituoşi ai Secţiei de Construcţii dela Şcoala Politehnică „Regele Carol II", care satisface următoarele condiţii:

a) Să fie român.

b) Să fi fost cel puţin 2 ani corespondent al *Gazetei Matematice.*

c) Să fie elev în anul III sau IV al Şcoalei.

d) Să fi promovat anii anteriori în timpul minim regulamentar.

Art. 4. — Bursa este unică şi indivizibilă.

Art. 5. — Dacă într'un an nu se poate acorda bursa, ea se va acorda în anii următori elevilor care urmează în îndeplinirea condiţiilor dela art. 3. In nici un caz venitul fondului nu se capitalizează.

Art. 6. — In cazul când elevul care a avut bursa în anul III, termină toate îndatoririle din programul Şcoalei înainte de începerea cursurilor anului IV, el va continua să primească bursa, în mod automat, şi în anul IV.

Bursa poate fi suprimată în cursul anului, dacă elevul căruia i s'a atribuit, dă vădite dovezi că nu-şi mai îndeplineşte toate îndatoririle şcolare. In acest caz bursa poate fi acordată altui elev pentru restul anului.

Art. 7. — Bursa se acordă de o Comisiune, compusă din: 2 membri ai *Gazetei Matematice* dintre care unul trebue să facă parte din Delegaţie, desemnaţi de prima Adunare generală anuală; toţi profesorii şi conferenţiarii Şcoalei Politehnice dela Secţia Construcţiilor, activi şi onorari, care sunt membri ai *Gazetei Matematice.*

Aceeaşi Comisiune va hotărî şi asupra cazurilor de retragere a bursei, prevăzute la art. 6.

Art. 8. — Bursa se achită de Casierul *Gazetei Matematice* direct elevului, la 15 a fiecărei luni, începând cu 15 Octomvrie şi terminând cu 15 Iunie.

Art. 9. — Fondul iniţial poate fi mărit prin donaţiuni ulterioare, acceptate de Societatea *Gazeta Matematică*, conform cu prevederile ei statutare. Veniturile produse de aceste sporiri, se vor capitaliza

până ce vor permite acordarea unei burse de valoare egală, în condițiunile acestui Regulament.

Art. 10. — In caz de disolvare a Societății *Gazeta Matematică*, fondul se va trece în Administrarea Școlii Politehnice „Regele Carol II", din București, cu același regulament.

REGULAMENTUL PREMIULUI DE ARITMETICĂ

Art. 1. — Societatea „*Gazeta Matematică*" acordă un premiu anual de aritmetică în valoare de 5.000 (cinci mii) lei, din venitul fondului său general de premii.

Art. 2. — Premiul este indivizibil și se decerne autorului unor lucrări referitoare la aritmetică dintre cele publicate în ultimul volum apărut.

Art. 3. — Autorul lucrării premiate trebue să fie român, elev de liceu din țară.

Art. 4. — In cazul neacordării premiului într'un an, sau mai mulți ani consecutivi, valoarea premiului acelui an sau acelor ani, se va adăoga la premiul anului sau anilor următori, distribuindu-se unul sau mai multe premii de valoarea minimă dela art. 1.

Art. 5. — A doua Adunare generală anuală alege o Comisie compusă din doi membri și un delegat, care prezintă primei Adunări generale a anului următor, raportul indicând lucrările ce se propun spre premiare.

Art. 6. — Raportul Comisiunii se publică în Nr. 7 al „*Gazetei Matematice*", care apare în luna Martie.

REGULAMENTUL PREMIULUI GHEORGHE ȚIȚEICA

Art. 1. — Pentru a cinsti memoria marelui „*Profesor Gheorghe Țițeica*", Societatea „*Gazeta Matematică*" acordă un premiu anual de geometrie elementară în valoare de 5.000 (cinci mii) lei, din venitul fondului său general de premii.

Art. 2. — Premiul este indivizibil și se decerne autorului unor lucrări referitoare la geometrie elementară, dintre cele publicate în ultimul volum apărut.

Art. 3. — Autorul lucrării premiate trebue să fie român, elev de liceu din țară.

Art. 4. — In cazul neacordării premiului într'un an, sau mai mulţi ani consecutivi, valoarea premiului acelui an sau acelor ani, se va adăuga la premiul anului sau anilor următori, distribuindu-se unul sau mai multe premii de valoarea minimă dela art. 1.

Art. 5. — A doua Adunare generală anuală alege o Comisie compusă din doi membri şi un delegat, care prezintă primei Adunări generale a anului următor, raportul indicând lucrările ce se propun spre premiare.

Art. 6. — Raportul Comisiunii se publică în Nr. 11 al *„Gazetei Matematice“*, care apare în luna Iulie.

REGULAMENTUL PREMIULUI DE ALGEBRĂ

Art. 1. — Societatea *„Gazeta Matematică“* acordă un premiu anual de algebră în valoare de 5.000 (cinci mii) lei, din venitul fondului său general de premii.

Art. 2. — Premiul este indivizibil şi se decerne autorului unor lucrări referitoare la algebră, dintre cele publicate în ultimul volum apărut.

Art. 3. — Autorul lucrării premiate trebuie să fie român, elev de liceu din ţară.

Art. 4. — In cazul neacordării premiului într'un an, sau mai mulţi ani consecutivi, valoarea premiului acelui an sau acelor ani, se va adăoga la premiul anului sau anilor următori, distribuindu-se unul sau mai multe premii de valoarea minimă dela art. 1.

Art. 5. — A doua Adunare generală anuală alege o Comisie compusă din doi membri şi un delegat, care prezintă primei Adunări generale a anului următor, raportul indicând lucrările ce se propun spre premiare.

Art. 6. — Raportul Comisiunii se publică în Nr. 9 al *„Gazetei Matematice“*, care apare în luna Mai.

REGULAMENTUL PREMIULUI « VASILE CONTA »

Art. 1. — In dorinţa de a permanetiza acordarea unui premiu anual pentru lucrări de filosofia matematicilor, în memoria ilustrului

filosof român *Vasile Conta*, premiu instituit de către *Ana Conta Kernbach*, sora ilustrului filosof, în timpul vieţii ei, prin o contribuţie viageră anuală la Societatea „*Gazeta Matematică*“, aceasta va acorda în continuare, în fiecare an, un premiu denumit „*Vasile Conta*“ în valoare de 4.000 (patru mii) lei.

Art. 2. — Premiul se acordă pentru a recompensa cea mai bună lucrare originală de filosofia matematicilor, adusă la cunoştinţa Societăţii în cursul fiecărui an până la 1 Iulie.

Dacă până la acea dată nu se prezintă nicio lucrare, se va aştepta data de 1 Iulie a primului an când se va prezenta o asemenea lucrare.

Art. 3. — Prima Adunare generală anuală alege o Comisiune compusă din doi membri şi un delegat, care examinează lucrările; mandatul acestei Comisiuni este limitat la un an, chiar dacă nu se acordă premiul.

Art. 4. — Comisiunea prezintă celei de-a doua Adunări generale din acel an, un raport prin care propune spre premiere una din lucrările prezentate, justificând alegerea.

Art. 5. — In cazul neacordării premiului într'un an sau în mai mulţi ani consecutivi, valoarea premiului acelui an sau acelor ani, se va adăuga la premiul anului sau anilor următori, distribuindu-se, după propunerea Comisiunii şi aprobarea Adunării generale, unul sau mai multe premii de valoare minimă dela art. 1.

Art. 6. — Autorii lucrărilor trebuie să fie români şi să-şi fi făcut studiile secundare în ţară.

Art. 7. — Raportul Comisiunii se publică în numărul din Noemvrie al „*Gazetei Matematice*“.

REGULAMENTUL PREMIULUI « SPIRU HARET »

Art. 1. — Pentru a cinsti memoria marelui profesor şi reformator al învăţământului, *Spiru Haret*, primul român doctor în ştiinţele matematice, Societatea „*Gazeta Matematică*“ acordă în fiecare an un premiu denumit „*Spiru Haret*“, în valoare de 5.000 (cinci mii) lei.

Acest premiu va fi constituit din venitul sumelor adunate pentru fondul „*Spiru Haret*“, completat eventual de noi donaţii sau de Societatea „*Gazeta Matematică*“ din venitul fondului său general de premii, până la suma de mai sus.

Art. 2. — Premiul este indivizibil şi se decerne autorului unei lucrări de mecanică sau astronomie, dintre cele publicate în „*Gazeta Matematică*“, în ultimul volum apărut.

Art. 3. — Autorul lucrării premiate trebuie să fie român, elev de liceu, de Şcoală Militară, de Şcoală Politehnică sau student la o Facultate de ştiinţe din ţară.

Art. 4. — In cazul când într'unul sau mai mulţi ani de-a-rândul premiul n'ar putea fi decernat, valoarea lui pe acel an sau pe acei ani, se va adăuga la premiul anului sau anilor următori, distribuindu-se unul sau mai multe premii de valoarea minimă dela art. 1.

Art. 5. — A doua Adunare generală anuală alege o Comisiune, compusă din doi membri şi un delegat, care prezintă primei Adunări generale a anului următor, raportul indicând lucrările ce se propun spre premiare.

Art. 6. — Raportul Comisiei se publică în Nr. 12 al „*Gazetei Matematice*“, care apare în luna August.

REGULAMENTUL PREMIULUI «V. CRISTESCU»

Art. 1. — Pentru a cinsti memoria Inginerului *V. Cristescu*, membru fondator al „*Gazetei Matematice*“, în jurul căreia a animat şi activat intens şi neîntrerupt peste 33 ani, Societatea „*Gazeta Matematică*“ acordă un premiu anual denumit „*Vasile Cristescu*“ în valoare de 5.000 (cinci mii) lei.

Acest premiu va fi constituit din venitul sumelor donate de D-nii: *Gheorghe, Miron* şi *Alexandru Niculescu* şi din venitul altor eventuale donaţiuni, completate până la suma de mai sus, din venitul fondului general de premii al Societăţii „*Gazeta Matematică*“.

Art. 2. — Premiul este indivizibil şi se decerne autorului unei lucrări referitoare la trigonometrie dintre cele publicate în „*Gazeta Matematică*“ în ultimul volum apărut.

Art. 3. — Autorul lucrării premiate trebuie să fie român, elev de liceu, de Şcoală Militară, de Şcoală Politehnică, sau student la o Facultate de ştiinţe din ţară.

Art. 4. — In cazul neacordării premiului într'un an, sau mai mulţi ani consecutivi, valoarea premiului acelui an sau acelor ani, se va adăoga la premiul anului sau anilor următori, distribuindu-se unul sau mai multe premii de valoarea minimă dela art. 1.

Art. 5. — A doua Adunare generală anuală alege o Comisie compusă din doi membri şi un delegat, care prezintă primei Adunări generale a anului următor raportul indicând lucrarea ce se propune spre premiare.

Art. 6. — Raportul Comisiei se publică în Nr. 10 al *„Gazetei Matematice“* care apare în luna naşterii Inginerului *V. Cristescu.*

Art. 7. — In cazul când Societatea nu şi-ar mai putea îndeplini obligaţiunea acordării premiului de mai sus, atunci sumele donate de D-nii *Alexandru, Miron* şi *Gheorghe Niculescu* şi alţi eventuali donatori, se vor remite Liceului Naţional din Iaşi, care a avut pe *V. Cristescu* ca elev, iar dacă acest liceu n'ar mai exista, Liceului cel mai vechi din Iaşi, în funcţiune. In acest caz, din venitul sumelor acestea se va acorda un premiu anual, celui mai bun elev la matematici al liceului.

REGULAMENTUL PREMIULUI « INGINER H. CAPRIEL »

Art. 1. — Societatea *„Gazeta Matematică“* acordă un premiu în valoare de 1000 lei, din venitul fondului *„Inginer H. Capriel“*, adunat în urma propunerii dela 2 Iunie 1912 a *Inginerului Ştefan Mirea* şi din venitul fondului general de premii.

Art. 2. — Premiul se acordă din 5 în 5 ani celei mai bune lucrări de matematici superioare, pure sau aplicate, ce se va prezenta Societăţii de către studenţii Universităţilor, de către elevii Şcolilor Politehnice, sau de către elevii Şcolilor Militare pregătitoare şi de aplicaţie din ţară.

Art. 3. — Lucrarea se propune de o Comisiune aleasă în acest scop şi va consta dintr'o chestiune de matematici pure sau de matematici aplicate, din programele Facultăţilor de Ştiinţe şi Şcolilor speciale de Ingineri şi Ofiţeri.

Art. 4. — Comisiunea se compune din doi membri şi un delegat şi se alege de către prima Adunare generală din anul în care începe o perioadă de 5 ani. Această Comisiune pregăteşte chestiunile până în luna Mai a anului următor când se vor publica în *„Gazeta Matematică“*.

Aceleaşi chestiuni se vor publica în fiecare an în numărul *„Gazetei Matematice“* din luna Mai, până la expirarea anului al 4-lea din perioada de 5 ani pentru care au fost propuse.

Art. 5. — Lucrările — semnate de autor — se trimit Societății cel mai târziu până la 1 Mai al anului care precede decernarea premiului. Decernarea se face de a doua Adunare generală a celui al 5-lea an, în urma raportului Comisiunii dela art. 4, publicându-se rezultatul în numărul din Octomvrie următor.

Art. 6. — Premiul este indivizibil, iar în cazul când nu se acordă, valoarea lui se adaugă la premiul perioadei sau perioadelor următoare de 5 ani, până la decernare.

REGULAMENTUL
FONDULUI «GENERAL SC. PANAITESCU»

Art. 1. — Societatea „*Gazeta Matematică*“ primind donațiunea *Generalului Scarlat Panaitescu*, înființează un fond denumit fondul „*General Scarlat Panaitescu*“, din venitul căruia, și în conformitate cu dorința donatorului, să se acorde un premiu celei mai bune lucrări de matematică aplicată la științele militare, publicată *în decurs de 5 ani.*

Art. 2. — Studiile în manuscris care se aduc la cunoștiința Societății pe orice cale, se iau și ele în considerație la acordarea premiului.

Art. 3. — Premiul poartă numele: „*Premiu pentru lucrări de matematică aplicată la științele militare*“.

Art. 4. — Autorii publicațiilor prezentate trebuie să fie români și să-și fi făcut cultura matematică în țară.

Art. 5. — Premiul este indivizibil și se acordă neapărat la fiecare 5 ani. In cazul când nu se găsește nicio lucrare de premiat sau în cazul când autorul lucrării premiate nu voiește a primi suma fixată, ea se dă uneia din revistele militare în care se publică și chestiuni de matematică aplicată la științele militare.

Art. 6. — Prima Adunare generală din fiecare an alege o Comisiune compusă dintr'un delegat al Societății și doi membri, între care cel puțin un ofițer, Comisiune care examinează lucrările apărute în cursul anului. Mandatul acestei Comisiuni este limitat la un an chiar când premiul nu se decerne.

Art. 7. — Comisiunea prezintă celei de a doua Adunări generale un raport asupra lucrărilor publicate în cursul anului expirat sau asupra manuscriselor aduse la cunoștința Societății în același

timp. Comisiunea anului în care se face decernarea premiului, trebuie să propună în raportul său, spre premiare, lucrarea cea mai meritoasă ajunsă la cunoştinţa Societăţii în cursul ultimilor 5 ani; această Comisiune va avea deci să ţină seamă de cele patru rapoarte anterioare.

Art. 8. — Raportul Comisiunii din anul în care se face decernarea premiului, se publică în numărul „*Gazetei Matematice*“ din Septemvrie următor Adunării generale care a aprobat decernarea.

REGULAMENTUL FONDULUI « LT.-COLONEL GH. A. TĂNĂSESCU »

Art. 1. — Societatea „*Gazeta Matematică*“ primind legatul decedatului *Al. Tănăsescu*, înfiinţează un fond denumit fondul „*Lt.-Colonel G. A. Tănăsescu*“, în memoria fiului său.

Art. 2. — Din venitul acestui fond se vor da cărţi de matematici celui clasificat întâiul la concursurile anuale ale *Gazetei Matematice.*

Art. 3. — In anii când aceste concursuri nu au loc, veniturile vor mări fondul.

REGULAMENTUL PREMIULUI « NICOLAE G. BOTEA »

Art. 1. — Societatea „*Gazeta Matematică*“ primind donaţiunea D-lui Profesor *G. Botea*, pentru a cinsti memoria fiului său *Nicolae G. Botea*, fost distins corespondent al *Gazetei* şi membru al Societăţii, constitue un fond denumit fondul „*Nicolae G. Botea*“, din al cărui venit să se acorde un premiu anual, constând din cărţi de ştiinţă, autorului celei mai bune lucrări (articol, notă, problemă rezolvată) de *geometria triunghiului şi a tetraedrului,* dintre cele publicate în „*Gazeta Matematică*“, în ultimul volum apărut.

Art. 2. — Autorul lucrării premiate trebue să fie român, elev de liceu, de şcoală militară, de Politehnică sau student de Facultate din ţară.

Art. 3. — Fondul se poate mări atât de donator cât şi de alte persoane. Toate sumele atribuite fondului se transformă în rente de Stat sau efecte garantate de Stat.

Art. 4. — Premiul se va acorda în orice caz în fiecare an.

Art. 5. — Prima Adunare generală anuală alege o Comisie compusă din doi membri şi un delegat, care prezintă celei de-a doua Adunări generale din acelaşi an raportul indicând autorul şi lucrarea ce se propune spre premiare. In acelaşi raport se vor specifica şi cărţile ce vor constitui premiul.

Art. 6. — Raportul Comisiei, aprobat de Adunarea generală se publică în Nr. 5 al *Gazetei Matematice,* care apare în luna Ianuarie.

Art. 7. — In cazul când Societatea nu s'ar mai putea obliga cu realizarea dorinţei donatorului, atunci fondul adunat până în acel moment, va fi trecut Comitetului şcolar al Colegiului Naţional Sft. Sava din Bucureşti, pentru ca din venit să se dea la finele fiecărui an şcolar, cărţi de ştiinţă, celui mai silitor elev din clasa III-a A a acelui colegiu.

REGULAMENTUL PREMIULUI « INGINER ALEXANDRU ROŞU »

Art. 1. — Societatea „*Gazeta Matematică*“, primind donaţiunea D-lui *Alexandru A. Roşu,* pentru a cinsti memoria tatălui său Inginer *Alexandru Roşu,* fost corespondent neobosit şi fost membru activ al *Gazetei Matematice,* constitue un fond denumit fondul „*Inginer Al. Roşu*“ din al cărui venit să se acorde un premiu anual, în numerar.

Art. 2. — Premiul este indivizibil şi se decerne *celui mai harnic corespondent* al *Gazetei Matematice,* elev de liceu, pentru activitatea depusă în cursul ultimului volum apărut.

Art. 3. — Premiul se va acorda în orice caz în fiecare an.

Art. 4. — A doua Adunare generală anuală alege o Comisiune compusă din 2 membri şi un delegat care prezintă primei Adunări generale a anului următor raportul indicând elevul premiat.

Art. 5. — Raportul Comisiunei se publică în Nr. 8 al *Gazetei Matematice,* care apare în luna decesului Inginerului *Alexandru Roşu.*

GAZETA MATEMATICA

GAZETA MATEMATICA

FOAE LUNARĂ

DE

MATEMATICI ELEMENTARE ŞI SPECIALE

PENTRU UZUL

ŞCOALELOR SECUNDARE, SPECIALE ŞI SUPERIOARE

VOLUMUL XLV

15 SEPTEMVRIE 1939 — 15 AUGUST 1940

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1939

GAZETA MATEMATICĂ

FOAIE LUNARĂ

DE

MATEMATICI ELEMENTARE ȘI SPECIALE

PENTRU UZUL

ȘCOLILOR SECUNDARE, NORMALE ȘI SUPERIOARE

VOLUMUL XLV

15 SEPTEMBRIE 1939 — 15 AUGUST 1940

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI

IMPRIMERIA NAȚIONALĂ

1940

LISTA MEMBRILOR
SOCIETĂȚII „GAZETA MATEMATICĂ"

DELEGAȚIUNEA SOCIETĂȚII PENTRU ANUL 1939*)

D. STOICA, CPT. C-DOR-ING. GR. ZAPAN, AL. D. BUNESCU (Cassier)

PERSONALUL REDACȚIUNII „GAZETA MATEMATICĂ"

GENERAL GH. BUICLIU și I. IONESCU. Membri delegați pentru: cereri, diverse și suplimente.

O. N. ȚINO ajutat de GH. TH. GHEORGHIU și C. IONESCU-BUJOR. Raportori.

LT. C. IONESCU-ȚIU și CPT. COMANDOR GR. ZAPAN. Membri delegați pentru: schimburi de reviste și primirea lor, recreațiuni, reclamațiuni privitoare la tipărire, primirea și repartizarea manuscriselor destinate *Gazetei Matematice*.

GH. ILIESCU. Membru delegat pentru convocările lunare.

I. ALEXIU, G. G. CONSTANTINESCU, GH. ILIESCU, C. IONESCU-BUJOR, LT. C. IONESCU-ȚIU și N. N. MIHĂILEANU. Membri delegați pentru corecturi și imprimarea revistei.

GENERAL GH. BUICLIU, M. GHERMĂNESCU, CPT. COMANDOR I. LINTEȘ, O. N. ȚINO și CPT. COMANDOR GR. ZAPAN. Membri delegați pentru aritmetică.

D. BARBILIAN, GH. DUMITRESCU, ULPIU FLORESCU, ADRIAN GHEORGHIU, VIRGIL GHIȚESCU, C. IONESCU-BUJOR, N. N. MIHĂILEANU, AL. NICULESCU, AL. ROȘU și G. D. SIMIONESCU. Membri delegați pentru geometrie.

I. S. ANTONIU, GH. DUMITRESCU, GH. TH. GHEORGHIU, VIRGIL GHIȚESCU, LT. C. IONESCU-ȚIU, GENERAL GH. LITEANU, N. N. MIHĂILEANU, AL. NICULESCU, CEZAR ORĂȘANU și O. N. ȚINO. Membri delegați pentru trigonometrie.

I. ALEXIU, TH. ANGHELUȚĂ, G. G. CONSTANTINESCU, GH. TH. GHEORGHIU, V. GHIȚESCU, C. IONESCU-BUJOR, LT. C. IONESCU-ȚIU, AL. ROȘU, M. SARIAN și O. N. ȚINO. Membri delegați pentru algebra elementară.

I. ALEXIU, I. CHIȚULESCU, GH. DUMITRESCU, AL. NICULESCU, CEZAR ORĂȘANU și GH. D. SIMIONESCU. Membri delegați pentru geometrie descriptivă.

I. S. ANTONIU, EM. BOTEA, ULPIU FLORESCU, CPT. COMANDOR I. LINTEȘ, CR. MATEESCU, M. SARIAN, GH. D. SIMIONESCU, AL. STOENESCU. Membri delegați pentru mecanica elementară.

GENERAL GH. BUICLIU, G. G. CONSTANTINESCU, CPT. M. FOCȘENEANU, GH. TH. GHEORGHIU, C. IONESCU-BUJOR, N. N. MIHĂILEANU, AL. NICULESCU, O. N. ȚINO și M. SARIAN. Membri delegați pentru geometria analitică.

*) Societatea este administrată și reprezentată de o delegație alcătuită din doi membri și un cassier (Art. 14 din Statute).

G. G. CONSTANTINESCU, CPT. M. FOCŞENEANU, C. IONESCU-BUJOR şi CEZAR ORĂŞANU. Membri delegaţi pentru cosmografie.

N. ABRAMESCU, TH. ANGHELUŢĂ, N. CIORĂNESCU, D. V. IONESCU, GH. TH. GHEORGHIU, M. GHERMĂNESCU, O. N. ŢINO şi P. SERGESCU. Membri delegaţi pentru articole şi note de matematici superioare.

N. ABRAMESCU, I. IONESCU şi P. SERGESCU. Membri delegaţi pentru istoria matematicei.

I. IONESCU, O. ONICESCU, P. SERGESCU, T. VESCAN şi GH. ZAPAN. Membri delegaţi pentru filosofia matematicei.

N. ABRAMESCU, TH. ANGHELUŢĂ, GH. TH. GHEORGHIU, M. GHERMĂNESCU D. V. IONESCU, P. SERGESCU şi O. N. ŢINO. Membri delegaţi pentru probleme propuse de matematici superioare.

O. N. ŢINO. Membru delegat pentru clasarea problemelor propuse.

I. ALEXIU, GH. DUMITRESCU, V. GHIŢESCU, C. IONESCU-BUJOR, LT. C. IONESCU-ŢIU, N. N. MIHĂILEANU şi AL. NICULESCU. Membri delegaţi pentru exerciţii.

N. ABRAMESCU, V. ALACI, C. IONESCU-BUJOR, MIRON NICULESCU, TIBERIU POPOVICIU, M. SARIAN, P. SERGESCU, O. N. ŢINO şi CPT. COMANDOR GR. ZAPAN. Membri delegaţi pentru chestiuni de examen.

I. ALEXIU, GENERAL GH. BUICLIU şi C. IONESCU-BUJOR. Membri delegaţi pentru alcătuirea tablei de materii.

G. G. CONSTANTINESCU, CPT. M. FOCŞENEANU, C. IONESCU-BUJOR, LT. C. IONESCU-ŢIU, N. N. MIHĂILEANU, AL. ROŞU şi GH. D. SIMIONESCU. Membri delegaţi pentru cercetarea prealabilă a soluţiilor primite dela corespondenţi.

LOCOT. C. IONESCU-ŢIU. Bibliotecar.

D-RA PREDUŢA BUNGEŢIANU, N. ABRAMESCU, V. ALACI, I. ALEXIU, TH. ANGHELUŢĂ, I. S. ANTONIU, EM. BOTEA, GENERAL GH. BUICLIU, N. CIORĂNESCU, G. G. CONSTANTINESCU, GH. DUMITRESCU, ULPIU FLORESCU, CPT. M. FOCŞENEANU, ADR. GHEORGHIU, GH. TH. GHEORGHIU, M. GHERMĂNESCU, V. GHIŢESCU, D. V. IONESCU, C. IONESCU-BUJOR, LT. C. IONESCU-ŢIU, CPT. COMANDOR I. LINTEŞ, GENERAL GH. LITEANU, N. N. MIHĂILEANU, AL. NICULESCU, AL. PANTAZI, TIBERIU POPOVICIU, AL. ROŞU, M. SARIAN, P. SERGESCU, GH. D. SIMIONESCU, AL. STOENESCU, O. N. ŢINO şi CPT. COMANDOR GR. ZAPAN. Membri delegaţi pentru cercetarea şi redactarea problemelor rezolvate.

PERSONALUL REDACŢIUNII „SUPLIMENTULUI CU EXERCIŢII"

O. N. ŢINO. Membru delegat pentru coordonarea exerciţiilor propuse.

C. IONESCU-BUJOR. Membru delegat pentru soluţiunile de publicat, imprimarea revistei şi corecturi.

LT. C. IONESCU-ŢIU. Membru delegat pentru repartizarea exerciţiilor rezolvate.

D-RA PREDUŢA BUNGEŢIANU, EM. BOTEA şi N. N. MIHĂILEANU. Membri delegaţi pentru alcătuirea tabloului de rezolvitori al fiecărui număr.

D-RA PREDUŢA BUNGEŢIANU, GENERAL GH. BUICLIU, G. G. CONSTANTINESCU, GH. DUMITRESCU, AD. GHEORGHIU, V. GHIŢESCU, TIBERIU IONESCU, C. IONESCU-BUJOR, LT. C. IONESCU-ŢIU, CPT. COMANDOR I. LINTEŞ, N. N. MIHĂILEANU, AL. NICULESCU, AL. ROŞU, GH. D. SIMIONESCU, O. N. ŢINO şi CPT. COMANDOR GR. ZAPAN. Membri delegaţi pentru exerciţii propuse şi cercetarea soluţiilor primite.

MEMBRII

1	1922, Mart. 1*	ABASON ERNEST. Inginer-Şef. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. Doctor în Matematici. — Profesor şi Subdirector de studii la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Matei Voevod, 25. Bucureşti 4.
2	1907, Iulie 1	ABRAMESCU N. Doctor în Matematici. — Profesor la Universitatea din Cluj. — Str. V. Alecsandri, 3. Cluj.
3	1913, Oct. 7	ALACI V. Doctor în Matematici. — Profesor la Şcoala Politehnică din Timişoara. — Str. Traian Lalescu, 1. Timişoara.
4	1937, Aug. 27	ALDEA N. N. Licenţiat în Matematici. — Str. Matei Voevod, 65. Bucureşti 4.
5	1938, Febr. 17	ALEXIU IULIAN. Inginer constructor. Licenţiat în Ştiinţe Matematice.—Inginer în Direcţiunea de poduri, Lucrări noui, Studii şi Construcţii. Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II". — Str. Mihail Cornea 41. Bucureşti 2.
6	1921, Noem. 4	ANGHELUŢĂ TH. Doctor în Matematici. — Profesor la Universitatea din Cluj. — Str. Iuliu Maniu, 2. Cluj.
7	1934, Febr. 21	ANTONIU CORNELIU. Inginer-Şef. — Şef de serviciu tehnic. Direcţiunea Generală a Drumurilor M. L. P. Asistent la Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Str. C. Dissescu, 17. Bucureşti 2.
8	1928, Aug. 29	ANTONIU S. ION. Inginer Electromecanic, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Inginer Electrician, Diplomat al Şcoalei Superioare de Electricitate din Paris. — Inginer la Societatea de Gaz şi de Electricitate din Bucureşti. — Căsuţa Poştală Nr. 272.
9	1931, Mart, 11	ARGHIRIADE EM. Licenţiat în Matematici. — Profesor Gimnaziul Comercial Regele Ferdinand I. Bucureşti.
10	1935, Febr. 13	ARMEANCA IOAN. Doctor în Matematici. — Astronom la Observatorul Astronomic Cluj. Profesor la Liceul Gh. Barţiu Cluj. — Cluj, Universitate.
11	1921, Febr. 5	AVRAMESCU C. Inginer. — Subdirector în Direcţiunea Generală a Drumurilor. — Str. Barbu Delavrancea, 51. Bucureşti 2.
12	1929, Aug. 28	BĂDESCU A. LUCA. Inginer, Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Director tehnic al Societăţii Comunale a Tramvaelor Bucureşti. Asistent la Şcoala Politehnică din Bucureşti. — B-dul Gh. Buzdugan, 38. Bucureşti 2.
13	1936, Febr. 27	BĂDESCU RADU. Doctor în Matematici şi Docent al Universităţii din Geneva. — Asistent al Seminarului de Matematici dela Universitatea din Cluj. Profesor Suplinitor la Academia de Agricultură din Cluj. — Str. Avram Iancu, 1 A. Cluj.
14	1924, Aug. 29	BAIDAFF IG. BERNARDO. Doctor în Matematici. — Buenos-Aires. Avenida de Mayo 560. Republica Argentina.
15	1911, Febr. 20	BANCIU I. Licenţiat în Matematici. — Str. Lucaci, 95. Bucureşti 3.
16	1927, Mai 11	BARBILIAN DAN. Doctor în Matematici. — Conferenţiar Universitar. — Str. Carol Davila, 8. Bucureşti 6.

*) Data admiterii.

17	1920, Ian. 10	BORNEANU GEORGE. Inginer. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Director General al Societăţii „Uzinele Chimice Române". — Str. Basarabia, 49. Bucureşti 2.
18	1938, Febr. 17	BOTEA G. EMIL-PETRE. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Secţia construcţii. — Şef de secţie în Administraţia Comercială a Porturilor şi Comunicaţiilor pe Apă. — Calea Floreasca 46. Bucureşti 3.
19	1935, Aug. 22	BOTEZ ST. MIHAIL. Doctor în Matematici. — Profesor Liceul „Petre Rareş" din Piatra-Neamţ. — Str. I. Gh. Duca, 15. Piatra-Neamţ.
20	1920, Aug. 15	BRATU GH. Doctor în Matematici dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. — Profesor de Astronomie şi de Calcul diferenţial şi integral la Facultatea de Ştiinţe din Cluj. Directorul Observatorului Astronomic din Cluj. — Str. Observatorului, 4. Cluj.
21	1926, Iunie 28	BRENER M. AVRAM. Inginer. — Str. Viitorului, 22. Bucureşti 3.
22	1910, Iunie 21	BRUCKNER VICTOR. Inginer Inspector General. — Director Superior C. F. R. — Str. Ing. Pandele Ţărăşanu, 7. Bucureşti 2.
23	1935, Noem. 7	BUCURESCU I. Lt. Licenţiat în Matematici. - Absolvent al Secţiei de Radio-Comunicaţii dela Şcoala Politehnică Bucureşti. Elev inginer al Şcoalei Superioare de aeronautică Paris. 403, Rue de Vaugirard, Paris.
24	1920, Ian. 10	BUDEANU I. C. Inginer dela Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele din Bucureşti. Şcoala Superioară de Electricitate din Paris. — Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Washington, 32. Parcul Bonaparte. Bucureşti 3.
25	1910, Apr. 3	BUICLIU GH. General de Artilerie în rezervă. — Fost Secretar general al Ministerului Apărării Naţionale. Însărcinat cu conferinţe de balistică exterioară la Şcoala Politehnică „Regele Carol II". — Str. M. Cogălniceanu, 10. Bucureşti 2. Telefon 2-3550.
26	1928, Mai 9	BUJOREANU N. Inginer Inspector General. — Subdirector C. F. R. — Str. Justinian, 17. Bucureşti 3.
27	1924, Ian. 30	BUNESCU D. AL. Inginer S. N. P. S. — Secretar General al Ministerului Lucrărilor publice şi Comunicaţiilor. Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului. — Cartierul Fabricei de Chibrituri, Str. B, 12. Bucureşti 6.
28	1930, Aug. 31	BUNGESCU ION. Maior de Artilerie. Absolvent al Şcoalei de Artilerie antiaeriană din Metz (Franţa). Brevetat de Stat Major al Şcoalei Superioare de Războiu din Paris. — Membru corespondent al Academiei de Ştiinţe. Profesor la Şcoala Superioară de Războiu. — Bucureşti.
29	1938, Febr. 17	BUNGEŢIANU D. PREDUŢA. Licenţiată în Matematici. — Profesoară. — Str. Stupinei, 11. Bucureşti 4.
30	1920, Ian. 10	BURADESCU TRAIAN. Inginer-Şef. Diplomat al Şcoalei de Poduri şi Şosele din Bucureşti. — Subdirector în C. F. R. — Str. Lăzureanu, 48. Bucureşti 6.

31	1939, Aug. 31	BURILEANU ŞTEFAN. General. Doctor în Matematici dela Paris. — Fabricaţia oţelurilor speciale în Uzinele Malaxa. — Str. General Berthelot, 95, Bucureşti 2.
32	1930, Aug. 31	BUŞILĂ ADRIAN. Inginer. — Inginer în Direcţiunea Întreţinerii şi Lucrărilor Noui C. F. R. — Str. Vaselor, 40 B. Bucureşti 4.
33	1910, Oct. 25	BUŞILĂ D. C. Inginer. — Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II". — Aleea Modrogan, 1. Bucureşti 3. (Telefon 2-4661).
34	1921, Mai 4	BUŞILĂ I. Inginer Inspector General. — Inginer în Ministerul Lucrărilor Publice. — Str. Dr. Lueger, 6 bis, Bucureşti 2.
35	1926, Iulie 28	CAMBUREANU V D. Inginer-Şef. — Directorul Întreţinerii din Direcţiunea Generală a Drumurilor. Ministerul Lucrărilor Publice şi al Comunicaţiilor. — Str. Simonide, 3. Bucureşti 1.
36	1914, Iulie 12	CAMBUREANU V. Inginer Inspector General. — Str. Vasile Lupu, 24. Bucureşti 2.
37	1921, Noem. 4	CAPRIEL I. Inginer-Şef. Inginer, Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. — Administrator-Delegat al Societăţii „România Carboniferă", al Societăţii „Construcţiunea". — Str. Visarion, 5. Bucureşti 3.
38	1936, Noem. 7	CARAFOLI ELIE. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Licenţiat şi Doctor în Ştiinţe dela Sorbona. — Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II". — Str. Popa Savu, 42. Bucureşti 2.
39	1920, Mart. 1	CARAMAN E. Licenţiat în Matematici — Profesor la Liceul „V. Alecsandri" din Galaţi. Preşedintele Asociaţiei Profesorilor Secundari din Galaţi, fost prefect şi deputat de Covurlui. — Str. Domnească, 170 A. Galaţi.
40	1936, Febr. 27	CARTIANU GH. Inginer. — Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II". Antreprenor. — Str. Popa Tatu, 81. Bucureşti 2.
41	1928, Aug. 29	CASSIAN GH. Colonel de Artilerie. — Comandantul Reg. 40 Artilerie Tg.-Mureş. — Str. Ecaterina Teodoru, 6. Tg.-Mureş.
42	1920, Ian. 10	CAZACU N. C. Inginer-Şef. — Str. G-ral Angelescu, 44. Bucureşti 2.
43	1939, Aug. 31	CAZANACLI V. PETRE. Licenţiat în Matematici. — Profesor titular Liceul Sf. Dumitru. Ismail.
44	1935, Apr. 10	CHIRICESCU V. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inginer în Regia Autonomă C. F. R. — Str. Italiană, 30. Bucureşti 1.
45	1914, Dec. 20	CHIRICUŢĂ A. Inginer Inspector General. — Administraţia Comercială a porturilor şi căilor de comunicaţie pe apă. — Str. Oţetari, 8. Bucureşti 1.
46	1920, Mart. 1	CHIŢULESCU I. IOAN. Inginer-Şef. — Director în Ministerul Lucrărilor Publice şi Comunicaţiilor. — Str. I. Căpitanu, 44. Bucureşti 4.
47	1921, Febr. 5	CIOC M. Inginer. — Administrator Industrial. Antreprenor de lucrări publice şi particulare. — Str. Gr. Cantacuzino, 14. Bucureşti 1.
48	1930, Aug. 31	CIORĂNESCU NICOLAE. Doctor în Matematici din Paris. Licenţiat în Fizico-Chimice. — Conferenţiar la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Buzeşti 98. Bucureşti 2.

49	1933, Aug. 31	CONSTANTINESCU GH. Inginer. — Administrator delegat al Soc. „Sarotec" S. A. R. — Str. B. Mussolini, 22/II. Bucureşti 3.
50	1938, Aug 31	CONSTANTINESCU G. G. Licenţiat în Matematici. — Profesor Secundar. — B-dul Regele Carol, 16. Bucureşti 6.
51	1895, Sept.15* (fondator)	CONSTANTINESCU TANCRED. Inginer Inspector General.—Senator. Fost Ministru. — Aleea Vulpache, 7. (Parcul Filipescu) Bucureşti 3.
52	1932, Apr. 20	CONSTANTINESCU ZAHARIA. Inginer, Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Conducătorul Imprimeriei C. F. R. Asistent Şcoala Politehnică „Regele Carol II". — Gara Filaret.
53	1936, Febr 27	COŞEREANU ION. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Timişoara. — Inginer în Biroul de studii Avioane al Uzinei I. A. R. din Braşov. — Fabrica de avioane I. A. R. Braşov.
54	1910, Apr. 3	COSTINESCU DAN. Inginer. — Director General Soc. „Letea". — Fabrica „Letea", Bacău.
55	1936, Aug. 25	DĂSCĂLESCU HR. Licenţiat în Matematici.— Profesor.—Str. Cuza Vodă, 58. Focşani.
56	1939, Febr. 23	DOBRESCU A. Licenţiat în Matematici.— Profesor de liceu. — Str. Filoti Anton, 33. Buzău.
57	1939, Aug. 31	DONCIU NICOLAE. Licenţiat în Matematici.—Profesor Liceul militar Târgovişte. — Str. Heliade Rădulescu, 35. Târgovişte.
58	1936, Febr, 27	DROSESCU GH. ION. Inginer mecanic.— Director al uzinelor Astra şi Unio. — Str. Belgrad, 2. Bucureşti 3.
59	1922, Mart. 1	DUMITRESCU ARG. D. Inginer-Şef. — Inspector tehnic C. F. R.— Str. Principele Nicolae, 32. Craiova.
60	1922, Noem. 1	DUMITRESCU I. GH. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Mihai Viteazul", Bucureşti. — Str. Sf. Elefterie, 52. Bucureşti 6.
61	1936, Febr. 27	DUMITRESCU C. I. Inginer Electromecanic dela S. P. B. — Asistent la „Rezistenţa Materialelor" la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Inginer la Direcţiunea Economatului C. F. R. – Str. Temişana, 42/II. Bucureşti 2.
62	1918, Ian. 28	FELIX CORNELIU. General de Brigadă în rezervă. — Str. Armenească, 16. Bucureşti I.
63	1935, Apr. 10	FLORESCU M. ULPIU. Inginer constructor (S. P. B.).— Inginer în Direcţia de Poduri C. F. R. Şeful Secţiei de Construcţii a Ferry-boat-ului, Giurgiu. Asistent suplinitor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" Bucureşti. — Str. Ştefan cel Mare, 27. Giurgiu.
64	1938, Febr. 17	FLORIAN ZAHARIA. Licenţiat în Matematici. — Profesor. Actuar expert. — Str. Luterană, 19. Bucureşti.
65	1929, Ian. 31	FOCŞENEANU I. MIHAIL. Căpitan de Artilerie. Licenţiat în Matematici. Brevetat de Stat Major. — Profesor la Şcoala Superioară de Război. — Regimentul 1 Artilerie Grăniceri.

*) Data fondării revistei „*Gazeta Matematică*". Societatea Gazeta Matematică a fost constituită la 1 Septemvrie 1909.

66	1928, Mai 9	FUNDĂŢEANU C. ION. Inginer, Diplomat E. P. Z. — Director General al Oficiului Central de Licitaţii din Ministerul Finanţelor. — Aleea N. Ionescu, 3 (Parcul Delavrancea). Bucureşti 2.
67	1921, Mai 4	GABRIELESCU RAMIRO. Inginer. — Str. Dionisie, 19. Bucureşti 1.
68	1914, Dec. 20	GÂLCĂ I. TOMA. Inginer —Fost Secretar General al Ministerului de Lucrări Publice şi Comunicaţii. Fost Preşedintele Regiei P. C. A. Profesor la Şcoala Superioară de Războiu. — Str. Wilson, 13. Etaj II, apart. 7. Bucureşti 1.
69	1906, Mart. 4	GEORGESCU I. N. Inginer Inspector General.—Directorul General al Serviciului de Indiguiri şi Descărcări. — Str. G. D. Palade, 35. Bucureşti 3.
70	1921, Febr. 5	GEORGESCU N. N. Inginer. — B-dul Elisabeta, 24. Bucureşti 1.
71	1927, Mai 11	GEORGESCU-ROEGEN N. Licenţiat în Matematici. Diplomat al Institutului de Statistică dela Universitatea din Paris. — Referent titular la Oficiul de Indrumare şi Coordonare din Ministerul de Finanţe. Profesor la Şcoala de Statistică. — Str. Bitolia, 5. Bucureşti 3.
72	1934, Dec. 19	GEORGESCU-VAL. N. ION. Căpitan de Artilerie. Inginer Electro-Mecanic. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Timişoara. — Membru în Comisia de recepţie la Uzinele „Schneider". — Rue de Fécamp, 18. Le Havre. France.
73	1938, Aug. 31	GHEORGHIEŞ AL. General de Artilerie. — Str. Mocsony 11. Cluj.
74	1936, Febr. 27	GHEORGHIU C. ADR. Licenţiat în Matematici.—Str. G-ral Magheru, 32. Bucureşti 2.
75	1932, Apr. 20	GHEORGHIU TH. GH. Doctor în Matematici. — Asistent la Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Parcul Ianculul. Str. Vatra Luminoasă, 55. Bucureşti 4.
76	1914, Ian. 8	GHEORGHIU S. I. Inginer - Şef. — Profesor Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Lahovary, 3. Bucureşti 3.
77	1913, Aug. 30	GHEORGHIU A. MIRCEA. Inginer Inspector General. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Subdirectorul Navigaţiei Fluviale Române. — Str. Vasile Lascăr, 111. Bucureşti 3.
78	1929, Aug. 28	GHEORGHIU A. ŞERBAN. Doctor în Ştiinţele Matematice. Diplomat al Institutului de Statistică al Universităţii din Paris. — Director în Ministerul de Finanţe. — Str. Berzei, 5. Bucureşti 1.
79	1922, Aug. 31	GHERMĂNESCU N. MIHAIL. Doctor în Matematici. — Conferenţiar la Şcoala Politehnică din Timişoara. Dirigintele Oficiului Special al Invăţământului P. T. T. — Palatul P. T. T. Timişoara.
80	1921, Mai 4	GHIMUŞ D. A. Lt.-Col. Inginer Radio-electrician. E. S. E. — Str. Chişinău, 12. Bucureşti 2. Telefon 5-4547.
81	1939, Febr. 23	GHIRCOIAŞU V. N. Licenţiat în Matematici. — Str. General Grigorescu, 23. Cluj.
82	1936, Aug. 25	GHIŞOIU I. PETRE. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice „Regele Carol II" din Bucureşti. — Inginer în Direcţiunea Comercială a Soc. Uzinele de fier şi domeniile din Reşiţa S. A. — Str. Răspântiilor, 17. Bucureşti 3.

83	1931, Mart. 11	GHIŢESCU VIRGIL. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Dr. Ioan Meşotă" din Braşov.—Str. Bisericii române, 24. Braşov.
84	1910, Iunie 21	GRIGORESCU C. Inginer. — Antreprenor de lucrări publice. — Str. Plantelor, 40 Bucureşti 4.
85	1936, Febr. 27	GUŢU AL. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti, Secţia Electricitate şi Mecanică.—Inginer la Societatea Petroşani. Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II". - Str. Sevastopol, 11 C. Bucureşti 2.
86	1920, Ian. 10	GUTZU VICTOR. Inginer. — Parcul Filipescu. Str. Andrei Mureşanu, 23. Bucureşti 3.
87	1927, Ian. 28	HANGANU D. M. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti şi al Şcoalei Superioare de Electricitate din Paris. — Inginer la C. A. M. Profesor la Şc. Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Logofătul Nestor, 2. Bucureşti 6.
88	1924, Ian. 30	IANCULESCU ROMULUS. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici. — Şeful serviciului M. II Mărfuri din Direcţia Mişcării C. F. R.— Str. Petre Poni, 7. Bucureşti 2.
89	1922, Mai 10	ILIESCU GH. Inginer-Şef. — Directorul Fabricei de Chibrituri-Filaret. — Fabrica de Chibrituri-Filaret. Bucureşti 6.
90	1895, Sept. 15 (fondator)	IOACHIMESCU GH. ANDREI. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici.— Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti.— Str. Buzeşti, 76. Bucureşti 2.
91	1926, Iunie 28	IOACHIMESCU A. GH. Inginer.—Directorul Fabricei de Timbre.— Str. Fabrica de Chibrituri, 28. Bucureşti 6.
92	1920, Ian. 10	IOANOVICI AUREL. Inginer. — Antreprenor. — Str. Paris, 28. Bucureşti 3.
93	1922, Noem. 1	IONESCU V. D. Doctor în Matematici dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris.— Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Cluj. — Str. Iuliu Maniu, 2. Cluj.
94	1936, Febr. 27	IONESCU P. HARALAMBIE. Licenţiat în Matematici.—Str. Ţepeş Vodă 78, Bucureşti 4.
95	1895, Sept. 15 (fondator)	IONESCU I. Inginer Inspector General în retragere. — Profesor onorar al Şcoalei Politehnice „Regele Carol II" din Bucureşti. Decanul Colegiului Inginerilor. — Str. Răsuri, 25. Bucureşti 3.
96	1939, Febr. 23	IONESCU TIBERIU. Licenţiat în Matematici.—Profesor secundar.— Str. Aviator Drossu, 5. Bucureşti 2.
97	1933, Febr. 22	IONESCU-BUJOR CONSTANTIN. Licenţiat în Matematici.— Profesor Liceul D. Ştirbei Câmpina.—Str. Precupeţii Vechi, 40. Bucureşti 3.
98	1936, Febr. 27	IONESCU-ŢIU C. Lt. din Geniu. Licenţiat în Matematici.—Profesor de matematici la Şcoalele pregătitoare de ofiţeri de geniu.—Casa Gazeta Matematică, Calea Griviţei, 158. Bucureşti 2.
99	1932, Apr. 20	IONESCU-ZANE D. GH. Inginer, diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti.—Subdirector tehnic la Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului. — Str. Popovici, 38. Parcul Delavrancea. Bucureşti 3.

100	1936, Febr. 27	ISTRATI CONSTANTIN Lt.-Comandor-Inginer, Diplomat al Şcoalei Superioare de Aeronautică din Paris. — Preşedintele Comisiei Militare M. Aerului şi Marinei în Uzinele I.A.R. din Braşov. — Str. Dr. Baiculescu, 15. Braşov.
101	1912, Iunie 2	JIJIE ADAM. Căpitan-Comandor în rezerva Marinei. Licenţiat în Ştiinţe, Inginer electrician. — Concesionarul luminatului electric şi al alimentării cu apă din Sulina. — Sulina.
102	1924, Ian. 30	KAUFMAN NORBERT. Inginer, Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Inginer-Consilier în Direcţiunea Generală C. F. R — Str. G-ral Manu, 26. Bucureşti 2.
103	1936, Febr. 27	LAMOTH PETRU. Licenţiat în Fizico-Matematici. — Profesor la Liceul „Banaţia". — Piaţa Tebec, 2. Timişoara.
104	1939, Febr. 23	LASCU BAL. Licenţiat în Matematici.—Str. Avram Iancu, 17. Cluj.
105	1931, Aug. 28	LAZU CONST. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Inginer-Şef. — Director în Administraţia C. A. M. Asistent la Şcoala Politehnică. — Str. Sf. Elefterie, 19. Bucureşti 6.
106	1934, Dec. 19	LEONIDA D-TRIE. Inginer. — Profesor la Şcoala Politehnică din Timişoara. — Str. Salcâmilor, 9 Bucureşti 3.
107	1919, Sept. 12	LINTEŞ ION. Cpt. Comandor. Inginer. — Conferenţiar la Şcoala Politehnică „Regele Carol II". Membru corespondent al Institutului de Ştiinţe din România. Director al Direcţiunei A. M. T. din Ministerul Aerului şi Marinei. — Str. Zoe Râmniceanu, 10 B. Bucureşti.
108	1921, Mai 4	LITEANU I. GH. General. — Comandantul Brigăzii de Artilerie de Gardă. — Str. Spătarului, 54. Telefon 2-0940. Bucureşti 1.
109	1935, Aug. 22	LIVADA F. GRIGORE. Licenţiat în Matematici.—Profesor secundar.— Liceul Militar „D. A. Sturdza". Craiova.
110	1934, Dec. 19	MALAXA ELENA. Licenţiată în Matematici.—Profesoară de Matematici şi Directoarea Şcoalei Centrale de fete din Bucureşti. — Str. Aurel Vlaicu, 34. Bucureşti 3.
111	1934, Dec. 19	MALAXA N. Inginer. — Industriaş. — Aleea Alexandru, 38. (Parcul Filipescu). Bucureşti 3.
112	1913, Aug. 30	MALCOCI C. Inginer Inspector General. — Str. Pia Brătianu, 4. Bucureşti 3.
113	1934, Febr. 21	MANAFU VALERIU. Inginer, Diplomat al Şcoalei Centrale de Arte şi Manufacturi din Paris.—Inginer la Uzinele Reşiţa.—U.D.R. Reşiţa.
114	1926, Iunie 28	MANOILESCU MIHAIL. Inginer. — Profesor la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Mare industriaş. — Str. Mussolini, 27. Bucureşti 3.
115	1932, Apr. 20	MĂRĂCINE B. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Directorul Imprimeriei Naţionale. — Str. Lânăriei, 80. Vila 26. Bucureşti 6.
116	1921, Febr. 5	MAREŞ T. Inginer-Şef. — Direcţia Generală a Drumurilor. — B-dul Bonaparte, 20 (Alee). Bucureşti 3.
117	1922, Mai 10	MATEESCU CR. Inginer. — Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Subdirector la Soc. „Electrica" Bucureşti. — Calea Dorobanţilor, 1. Vila B. Bucureşti 3.

118	1939, Aug. 31	MEREUȚĂ EM. Licențiat în Matematici.—Str. Vatra Luminoasă, 89. București.
119	1927, Mai 11	MEREUȚĂ V. Inginer. — Subdirector Direcțiunea de Întreținere C. F. R. — Str. Dan Vodă, 3. București 2.
120	1935, Noem. 5	MIHĂILEANU N. N. Licențiat în Matematici. — Profesor la Seminarul Cernica. — Str. Vulturilor, 63. București.
121	1921, Febr. 5	MIHALOPOL C. Inginer Inspector General. — Director General al Administrației Comerciale a Porturilor și Căilor de Comunicație pe Apă. — Splaiul Independenței, 63. București 6.
122	1939, Aug. 31	MIHU CERCHEZ. Licențiat în Matematici.—Profesor Liceul „Regele Ferdinand I". Chișinău. — Str. Valter Mărăcineanu, 32. Roman.
123	1925, Febr. 11	MIRCEA M. E. Inginer. — Inginer-Șef la Societatea „Concordia". — Gura Ocniței. Jud. Dâmbovița.
124	1934, Dec. 19	MIRESCU PETRE. Licențiat în Matematici. — Profesor la Liceul „N. Bălcescu" din Brăila. — Str. Galați, 71. Brăila.
125	1929, Aug. 28	MITESCU CAMIL. Inginer, Diplomat al Școalei Politehnice din București. — Directorul Serviciului Exploatării Fabricelor la Casa Autonomă a Monopolurilor. — Piața Lahovary, 1 A. București 3.
126	1920, Ian. 10	MITITELU C. CLAUDIU. Inginer-Inspector general. Licențiat în Matematici.—Director Tehnic Casa Autonomă a Monopolurilor.— Piața Lahovary, 1 A. București 3.
127	1920, Ian. 10	MITITELU C. I. Inginer. — Intreprinzător de lucrări publice. — Str. Ciprian Porumbescu, 11. București.
128	1939, Febr. 23	MORȚUN EMIL. Licențiat în Matematici. — Profesor Liceul C.-Lung Muscel.
129	1932, Febr. 21	NEAMȚU PETRE. Inginer. — Director S. T. B. Asistent la Școala Politehnică „Regele Carol II" din București.—Str. Roma, 59. București 3.
130	1928, Aug. 29	NEGURĂ ST. Licențiat în Matematici dela Universitatea din București. — Profesor definitiv la Liceul din Bârlad. Director al Liceului „Codreanu" din Bârlad. — Str. Dobranici, 16. Bârlad.
131	1936, Aug. 25	NESTOR D-TRU. Inginer. — Str. V. Stroescu, 10. București.
132	1910, Mai 21	NICHIFOR A. G. Doctor în Științele Matematice (Specialitatea Geometria Descriptivă). — Profesor la Politehnica din București. Facultatea de Arhitectură. -- Str. Sfinților, 8. București.
133	1934, Dec. 19	NICOLAU AL. Inginer. — Profesor. — Școala Politehnică Timișoara.
134	1929, Aug. 28	NICOLAU H. CONSTANTIN. Inginer-industrial, Diplomat al Școalei Politehnice din București 1923.—Directorul tehnic al Societății „Letea". — Fabrica de hârtie „Letea". Bacău.
135	1921, Noem. 4	NICOLAU T. M. Inginer Inspector General. — Director al Direcțiunii Tehnice din Ministerul Lucrărilor Publice și al Comunicațiilor. Profesor la Școala de Conductori de Lucrări Publice din București. — Str. Ecoului, 85. București 6.
136	1934, Dec. 19	NICOLESCU IOAN RADU. Comandor (r) de Marină. Technic (Uzinele Malaxa). — Piața Washington, 2. Etaj III. București.
137	1931, Mart. 11	NICULESCU V. ALEX. Licențiat în Matematici.—Profesor la Liceul „Mihail Eminescu" din București.—Str. Sabinelor, 119. București 6.

138	1920, Oct. 28	NICULESCU CRISTEA. Inginer-Şef. — Preşedintele Comisiei de control C. F. R. — Str. Londra, 35. Bucureşti 3.
139	1929, Ian. 31	NICULESCU MIRON. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris. Doctor în Ştiinţele Matematice dela Sorbona. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Cernăuţi. — Seminarul Matematic Cernăuţi şi Str. Paris, 14. Bucureşti 3.
140	1922, Mart. 1	ONICESCU O. Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. Director al Institutului Superior de Educaţie Fizică. Director al Şcoalei de Statistică. — Str. Rozelor, 9. Bucureşti 6.
141	1927, Ian. 28	ORĂNESCU OCTAVIAN. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti, Secţia Electro-Mecanică. — Şef de Serviciu la Navigaţiunea Fluvială Română, Galaţi. — Str. Bolintineanu, 2. Galaţi.
142	1913, Oct. 7	ORĂŞANU D. CEZAR. Inginer. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele.—Inginer Cadastral Şcoala Politehnică. Inginer Hotarnic şi Operator Topometru. Licenţiat în Matematici. Conferenţiar titular la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti la cursul de Construcţii Generale. Profesor suplinitor la cursul de Topografie şi Geodezie. — Str. Sfiinţii Voievozi, 9. Bucureşti 2.
143	1910, Mai 21	ORĂŞANU GR. Licenţiat în Matematici.—Profesor la Liceul „Gh. Lazăr" din Bucureşti. — Str. Popa Nan, 19. Bucureşti 4.
144	1929, Ian. 31	PANTAZI ALEXANDRU. Doctor în Matematici. Actuar-expert. Statistician-expert. — Profesor la Şcoala de Statistică. Asistent Universitar. Inspector actuar la Ministerul Economiei Naţionale. — Str. Brezoianu, 38 bis. Bucureşti 3. (Telefon 3-4305).
145	1932, Aug. 24	PÂRVU AUREL. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti Licenţiat în Matematici. — Inginer C. F. R. — Str. Edgar Quinet, 5. Bucureşti 1. (Telefon 4-6329).
146	1939, Aug. 31	PĂSĂRICĂ FL. Licenţiat în Matematici.—Profesor particular. Şef de Serviciu în Direcţia Generală a Monitorului Oficial. — B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti.
147	1920, Oct. 28	PHILIPIDE M. Inginer. — Director General al Societăţii Anonime Române de Navigaţie pe Dunăre S. R. D. — Str. Radu-Vodă, 25. Bucureşti 5.
148	1935, Apr. 10	POPESCU VICTOR. Inginer Soc. Comunală a Tramvaelor Bucureşti. Asistent Şcoala Politehnică „Regele Carol II".—Str. Argentina, 44. Bucureşti 3.
149	1934, Dec. 19	POPESCU-BOTOŞANI. G. Inginer la Subsecretariatul de Stat al Aerului. Uzinele I. A. R. Braşov. — Str. General Berthelot, 65. Bucureşti 1.
150	1928, Mai 9	POPOVICIU TIBERIU. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris. Doctor în Matematici. — Conferenţiar Universitar. — Str. Mircea-Vodă, Laterală 2. Cernăuţi.
151	1931, Mart. 11	POPP N. Lt.-Comandor. Inginer.—Subsecretariatul de Stat al Aerului. — Str. Alecu Russo, 7. Bucureşti.

152	1927, Mai 11	POPP TRAIAN. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Seminarul Pedagogic Universitar şi la Colegiul Naţional „Sf. Sava". — Parcul Delavrancea. Aleea D, 2. Bucureşti 2.
153	1929, Ian. 31	PORTOCALĂ MIHAIL. Inginer-Antreprenor. — B-dul Basarab (Alee), 9. Bucureşti 2.
154	1930, Aug. 31	POTOPEANU GHEORGHE. Colonel. — Ataşat militar pe lângă legaţia română din Paris. — Str. Dr. Lister, 5. Bucureşti 6.
155	1935, Apr. 10	PRAPORGESCU N. Licenţiat în Matematici şi actuar expert. — Consilier Controlor la Inalta Curte de Conturi. — Str. Aviator Sănătescu, 28. Bucureşti 2.
156	1925, Febr. 11	PROTOPOPESCU GRIGORE. General de artilerie. — Str. Ana Davila, 25. Bucureşti 6.
157	1920, Aug. 15	REVICI TEOFIL. Inginer S. N. P. S. — Inginer-Şef în Direcţia de Poduri C. F. R. — Str. Gr. Cantacuzino, 59. Bucureşti 2.
158	1933, Febr. 22	ROŞU AL. AL. Licenţiat în Matematici. Licenţiat în Drept. — Controlor financiar. — Str. Inginer B. Giulini, 9. Bucureşti 6.
159	1914, Dec. 20	ROŞU V. Inginer Inspector General. — Directorul Serviciului Hidraulic. — Calea Victoriei, 2. Bucureşti 1.
160	1929, Aug. 28	SĂLĂGEANU AUREL. Inginer. — Director tehnic la Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului. — Str. I. D. Teodoru, 8. — Bucureşti 6.
161	1904, Sept. 1	SALIGNY M. Inginer Inspector General. — Subdirectorul Serviciului Hidraulic, Ministerul Lucrărilor Publice şi Comunicaţiilor. — B-dul Elisabeta, 27. Bucureşti 2.
162	1920, Ian. 10	SĂPUNARU S. GH. Inginer de Poduri şi Şosele. — Director General al Societăţii „Clădirea Românească" — Str. Pia Brătianu, 5. (Parcul Ioanid). Bucureşti 3.
163	1929, Aug. 28	SARIAN MIHAI. Inginer. — Direcţia de Studii a Căilor Ferate Române. Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Columb, 7. Bucureşti 3.
164	1938, Aug. 31	SAVIN C. I. Locotenent. Licenţiat în Matematici. — Str. Cotroceni, 13. Bucureşti 6.
165	1935, Aug. 22	SCHILERU-DILI C. ION. Inginer-Mecanic-Electrician. — Conferenţiar la Şcoala Politehnică din Timişoara. Director P. T. T. — Str. Ştirbey Vodă, 65. Bucureşti.
166	1920, Aug. 15	ŞERBĂNESCU GH. VICTOR. Inginer. — Inginer la Consiliul tehnic Superior. — Str. Eftimie Murgu, 6. Bucureşti 4.
167	1928, Aug. 29	SERGESCU BARBU. Inginer de mine. Licenţiat în matematici şi drept. — Director tehnic la Societatea „Steaua Română". — Steaua Română-Câmpina.
168	1919, Sept. 12	SERGESCU PETRE. Doctor în Matematici. Licenţiat în Filosofie. — Membru corespondent al Academiei Române. Vice-preşedinte al Academiei Internaţionale de Istoria Ştiinţei. Profesor la Universitatea din Cluj. — Str. Berde, 3. Cluj.
169	1921, Febr. 5	SFINŢESCU I. CINCINAT. Inginer Inspector General. — Profesor la Academia de Arhitectură. Director General Tehnic la Municipiul Bucureşti. — Str. Barbu Delavrancea, 43. Bucureşti 2.

170	1934, Mai 2	SIMIONESCU D. GH. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul de aplicaţie al Şcoalei Normale Superioare din Bucureşti. — B-dul Pache 99. Corp VI. Bucureşti.
171	1910, Aug. 3	SMÂNTÂNESCU AUREL. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele.— Inginer Inspector General în Corpul Tehnic al Ministerului de Lucrări Publice şi Comunicaţii. Subdirector General la Direcţia Generală a Drumurilor. — Str. Sf. Ştefan, 23. Bucureşti 4.
172	1933, Aug. 31	STAMATESCU I. GH. Inginer-Şef.—Subdirector Direcţia de Studii C. F. R. — Str. G-ral Lahovary, 87. Bucureşti 3.
173	1923, Iulie 4	STAMATESCU I. Profesor la Liceul Mateiu Basarab şi Seminarul Pedagogic Universitar. — Str. Toamnei, 47. Bucureşti 3.
174	1938, Febr. 17	STAN AURELIAN. Locotenent de Artilerie. Licenţiat în Matematici. Absolvent al Şcoalei de Aplicaţie a Artileriei dela Fontainebleau (Franţa). — Str. Dr. Leonte, 8. Bucureşti 6.
175	1920, Ian. 10	STAN D. Inginer.—Profesor suplinitor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Inginer la Soc. Anonimă Română de Telefoane. — Aleea Mântuleasa, 1. Bucureşti 4.
176	1939, Febr. 23	STOENESCU ALEXANDRU. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice Bucureşti. — Inginer Direcţia Podurilor C. F. R.—Str. Caragea Vodă, 21. Bucureşti 3.
177	1934, Mai 2	STOICA V. DUMITRU. Inginer. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti.—Directorul Societăţii de locuinţe ieftine Bucureşti. — Str. Veronica Micle, 2. Bucureşti 2.
178	1936, Aug. 25	STOICESCU T. T. Licenţiat în Matematici.—Profesor la Liceul din Dorohoi. — Dorohoi.
179	1927, Mai 11	TĂNĂSESCU A. General de rezervă. — Str. Gr. Cantacuzino, 54. Bucureşti 2.
180	1928, Mai 9	TĂNĂSESCU A. TUDOR. Licenţiat în Matematici. Inginer electromecanic.—Conferenţiar la Şcoala Politehnică „Regele Carol II".— Director tehnic P. T. T. — Calea Victoriei, 68. Bucureşti.
181	1900, Noem. 1	TEODOREANU V. Pensionar. — Str. Zlataust, 7. Iaşi.
182	1934, Mai 2	TEODORESCU C. C. Inginer-Şef. — Profesor şi Rector al Şcoalei Politehnice din Timişoara.
183	1911, Mai 18	TEODORESCU V. N. Inginer Inspector General. — Fost Ministru. — Str. Paris, 53. Bucureşti 1.
184	1937, Ian. 28	THEODORU HENRI. Inginer. — Profesor la Şcoala de Sub Ingineri. Conferenţiar la Şcoala Politehnică. Antreprenor — Str. Donici, 27. Bucureşti.
185	1910, Mai 21	THIERRIN H. G. Licenţiat în Matematici.—Directorul Institutului „Schewitz-Thierrin". — Str. Basarabia, 12. Bucureşti 1.
186	1921, Aug. 31	ŢINO O. Doctor în Matematici. — Profesor la Şcoala Politehnică din Timişoara. — Str. Ismail, 16. Bucureşti 4.
187	1929, Oct. 30	ŢIŢEICA GABRIELA. Licenţiată în Matematici. Inginer. — Asistentă la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. — Str. Dionisie, 80. Bucureşti 3.

188	1929, Aug. 31	ȚIȚEICA RADU. Doctor în fizică. Licențiat în Matematici. Inginer.— Asistent la facultatea de științe. — Str. Dionisie Lupu, 80. București.
189	1836, Febr. 27	TOMESCU ST. IOAN. Inginer. — Intrarea Geneva, 4. București.
190	1919, Sept. 12	ULESCU AL. Inginer. — Directorul Uzinelor I. A. R. — Str. M. Eminescu, 4. Brașov.
191	1935, Noem. 5	VÂLCOVICI V. Doctor în Științele Matematice. — Profesor la Universitatea din București. — Str. Londra, 44. București 3.
192	1914, Dec. 20	VARDALA I. Inginer Inspector General.—Director General al Soc. A. R. „Banloc" pentru fabricațiunea și comercializarea cauciucului. — Str. Wilson, 13. București 1.
193	1927, Mai 11	VASILACHE I. Inginer Inspector General.—Profesor și Subdirector al Liceului Industrial „Regele Carol II". — Str. Polizu, 11. București 2.
194	1923, Mart. 26	VASILESCU GR. Diplomat al Școalei Naționale de Poduri și Șosele din București (1919). Doctor al Academiei de Inalte Studii Comerciale și Industriale din București. — Profesor Școala Politehnică din București. Subdirector în Direcția Generală a Porturilor și a Căilor de Comunicație pe Apă. — B-dul Pache, 120. București.
195	1920, Ian. 10	VASILESCU C. I. Inginer-Șef. — Str. Aviator Ștefan Protopopescu, 36. București 2.
196	1932, Apr. 20	VASILIU GH. DAN. Inginer. Diplomat al Școalei Politehnice din București. — Subdirector tehnic la Monitorul Oficial și Imprimeriile Statului. — B-dul Tache Ionescu, 27. București.
197	1933, Febr. 22	VASILIU GH. Inginer de mine și geodez. — Antreprenor autorizat de Direcția Cadastrului pentru Geodezie, Cadastru și Comasare. Asistent supl. la Școala Politehnică „Regele Carol II" din București. — Str. Transilvania, 35. București 2.
198	1925, Aug. 26	VASILIU M. Inginer. — Asistent la Școala Politehnică „Regele Carol II" din București. Director în Ministerul Industriei și Comerțului. — Str. Vaselor, 70. București 4.
199	1938, Febr. 17	VESCAN T. TEOFIL. Doctor în Științe fizice. Licențiat în Matematici. — Profesor-Secundar. — Institutul de Fizică teoretică și aplicată al Universității din Cluj.
200	1936, Febr. 27	VICIU A. A. Licențiat în Matematici — Profesor la Liceul Militar din Tg.-Mureș. — Str. Andrei Mureșanu, 30. Tg.-Mureș.
201	1933, Febr 22	WOINAROSKY R. Licențiat în Matematici. — Str. Manu Cavafu, 16. București 5.
202	1924, Ian. 30	ZAMFIRESCU C. GRIGORE. Inginer, Diplomat S. N. P. S. București și E. S. A. Paris. — Conferențiar la Școala Politehnică „Regele Carol II" din București. Administrator unic al fabricei de avioane Set. Industria națională aeronautică. Senator Regal. — Str. Popa Lazăr 9 — 15.

203	1920, Sept. 28	ZAPAN GH. Doctor în Filosofie dela Universitatea din Berlin. — Conferenţiar la Facultatea de Litere şi Filosofie din Bucureşti. — Str. Dr. Brânză, 10. Bucureşti 6.
204	1921, Mai 4	ZAPAN GRIGORE. Cpt. Comandor. Inginer de Construcţii Aeronautice şi Mecanice (E. N. S. A. Paris).—Directorul Arsenalului Aeronauticei. — Str. Sf. Elefterie, 16. Bucureşti 6. (telefon 4-3929 .
205	1925, Aug. 26	ZLATCU ST. C. Inginer-mecanic dela Şcoala Politehnică din Zürich.— Antreprenor. — Bulevardul Elisabeta, 57. Bucureşti 2.

†

MEMBRII DECEDAŢI*)

	Data admiterii	Data morţii
1. ANGELESCU A. . . .	1919 Septemvrie 12	1938 Apr. 6
2. BOTEA N.	1932 Aprilie 20	1937 Dec. 18
3. FILIPESCU E. G. . . .	1909 Iulie 1	1937 Noembrie 24
4. MIREA N. ŞT.	1909 Iunie 1.	1932 Ian. 15
5. PANAITESCU SC. . . .	1914 Decemvrie 20.	1938 Martie 22
6. PATRICIU G. TITUS . .	1911 Decemvrie 17.	1937 Ian. 5
7. POPESCU I.	1922 August 31	1936 Sept. 20
8. ŢIŢEICA GH.	1895 Noemvrie 1	1939 Februarie 5

*) Aci sunt trecuţi în ordinea alfabetică numai redactorii şi membrii decedaţi în ultimii 7 ani şi cari au stat la „*Gazeta Matematică*“ până la sfârşitul vieţii lor.

EXTINDERI IN LEGĂTURĂ CU INDICATORII

In G. M., anul XLI, No. 5, pag. 280, am arătat că:

Numărul numerelor prime cu n *din şirul natural de numere cuprins între* x *şi* y, *este dat de expresiunea:*

$$1) \qquad I_{y-x}(n) = I_y(n) - I_x(n)$$

unde $I_y(n)$ reprezintă numărul numerelor prime cu n din şirul primelor y numere, iar $I_x(n)$ acelaşi, însă din şirul primelor x numere.

Deasemenea:

Suma numerelor prime cu n *din şirul natural de numere cuprins între* x *şi* y, *este dat de expresiunea:*

$$2) \qquad S_{y-x}(n) = S_y(n) - S_x(n)$$

unde $S_x(n)$ şi $S_y(n)$ reprezintă suma numerelor prime cu n respectiv din şirul primelor x sau y numere.

In sfârşit am mai arătat că:

Produsul numerelor prime cu n *din şirul natural de numere cuprins între* x *şi* y, *este dat de expresiunea:*

$$3) \qquad P_{y-x}(n) = \frac{P_y(n)}{P_x(n)}$$

unde $P_x(n)$ şi $P_y(n)$ reprezintă produsul numerelor prime cu n respectiv din şirul primelor x sau y numere.

In legătură cu aceste relaţiuni îmi propun a face câteva extensiuni.

1. Dacă facem $y = n$, atunci obţinem:

$$4) \qquad \begin{cases} I_{n-x}(n) = I_n(n) - I_x(n) \\ S_{n-x}(n) = S_n(n) - S_x(n) \\ P_{n-x}(n) = \dfrac{P_n(n)}{P_x(n)} \end{cases}$$

unde:

$I_n(n) = \varphi(n)$ — indicatorul lui n;

$S_n(n) = \sigma(n) = \frac{1}{2} n\varphi(n)$ — suma numerelor prime cu n şi mai mici decât el;

$P_n(n) = \Pi(n)$ — produsul numerelor prime cu n şi mai mici decât el.

2. Dacă facem $y = n + x$, atunci obţinem:

$$5) \quad \begin{cases} I_{n+x}(n) = I_n(n) + I_x(n) \\ S_{n+x}(n) = S_n(n) + S_x(n) \\ P_{n+x}(n) = P_n(n) \cdot P_x(n). \end{cases}$$

3. Prin simple operaţiuni de adunare sau înmulţire între relaţiunile 4) şi 5), obţinem:

$$6) \quad \begin{cases} I_{n-x}(n) + I_{n+x}(n) = 2 \cdot I_n(n) \\ S_{n-x}(n) + S_{n+x}(n) = 2 \cdot S_n(n) \\ P_{n-x}(n) \cdot P_{n+x}(n) = [P_n(n)]^2. \end{cases}$$

Iar prin simple operaţiuni de scădere sau împărţire:

$$7) \quad \begin{cases} I_{n+x}(n) - I_{n-x}(n) = 2 \cdot I_x(n) \\ S_{n+x}(n) - S_{n-x}(n) = 2 \cdot S_x(n) \\ \dfrac{P_{n+x}(n)}{P_{n-x}(n)} = [P_x(n)]^2. \end{cases}$$

4. Făcând $x = (m-1)\,n$ în relaţiunile 5), obţinem:

$$8) \quad \begin{cases} I_{m.n}(n) = I_n(n) + I_{(m-1)n}(n) \\ S_{m.n}(n) = S_n(n) + S_{(m-1)n}(n) \\ P_{m.n}(n) = P_n(n) \cdot P_{(m-1)n}(n). \end{cases}$$

Cu cari, făcând pe m egal succesiv cu: *2, 3, 4,...* stabilim relaţiunile:

$$9) \quad \begin{cases} I_{m.n}(n) = m \cdot I_n(n) = m \cdot \varphi(n) \\ S_{m.n}(n) = m \cdot S_n(n) = m \cdot \sigma(n) \\ P_{m.n}(n) = [P_n(n)]^m = [\Pi(n)]^m. \end{cases}$$

De unde mai observăm că:

$$10) \quad \frac{I_{m.n}(n)}{S_{m.n}(n)} = \frac{\varphi(n)}{\sigma(n)}$$

şi

$$11) \quad S_{m.n}(n) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot I_{m.n}(n).$$

Această ultimă relaţie constitue o generalizare a cunoscutei relaţii:

$$\sigma(n) = \frac{1}{2} n . \varphi(n)$$

care este identică cu 11) pentru $m = 1$.

5. Prin simple alte transformări putem obţine relaţiunile:

$$12) \quad \begin{cases} \sum_1^n I_i(n) = \frac{1}{2}(n+1)\varphi(n) \\ \sum_1^n [I_{n+i}(n) - I_i(n)] = n \cdot \varphi(n). \end{cases}$$

Apoi:

$$13) \quad \begin{cases} \sum_1^n S_i(n) = \frac{1}{2}(n+1)\sigma(n) \\ \sum_1^n [S_{n+i}(n) - S_i(n)] = n . \sigma(n). \end{cases}$$

Şi în sfârşit:

$$14) \quad \begin{cases} \prod_1^n P_i(n) = [\Pi(n)]^{\frac{n+1}{2}} \\ \prod_1^n \frac{P_{n+i}(n)}{P_i(n)} = [\Pi(n)]^n. \end{cases}$$

Din aceste ultime relaţiuni se deduce apoi:

$$15) \quad \begin{cases} \sum_1^n I_{n+i}(n) = \frac{3n+1}{2} \cdot \varphi(n) \\ \sum_1^n S_{n+i}(n) = \frac{3n+1}{2} \cdot \sigma(n) \\ \prod_1^n P_{n+i}(n) = [\Pi(n)]^{\frac{3n+1}{2}}. \end{cases}$$

Observaţiune importantă.

Relaţiunile stabilite mai sus nu au nici un viciu de formă şi pare-se nici de fond, totuşi s'ar putea întâmpla ca, făcând unele aplicaţiuni numerice să dăm peste exemple de forma:

$$I_{23}(30) = I_{30}(30) - I_7(30)$$

care relaţie nu mai este exactă deoarece avem:

$$I_{30}(30) = 8 \quad ; \quad I_{23}(30) = 7 \quad \text{şi} \quad I_7(30) = 2.$$

Voiu încerca să examinez acest caz şi pe altă cale.

Fie:

$$16)\quad I_{n\ x}(n) = (n \pm x) - \Sigma E\left(\frac{n \pm x}{a}\right) + \Sigma E\left(\frac{n \pm x}{ab}\right) - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

unde E este notaţia lui LEGENDRE.

Cum însă $n = Mz$ atunci observăm că:

$$E\left(\frac{n+x}{z}\right) = \frac{n}{z} + E\left(\frac{x}{z}\right)$$

şi

$$E\left(\frac{n-x}{z}\right) = \frac{n}{z} - E\left(\frac{x}{z}\right) - \varepsilon$$

unde $\varepsilon = 0$ dacă $x = Mz$ şi $\varepsilon = 1$ dacă $x \neq Mz$.

In felul acesta relaţiile 5) se pot verifica şi deci sunt bune.

Deasemenea se pot verifica şi relaţiunile 4) pentru cazul când $x = Mz$. Pentru cazul însă când $x \neq Mz$, adică x este prim cu factorii: $a, b, c \ldots$ ai lui n, atunci avem:

$$17)\qquad I_{n-x}(n) = I_n(n) - I_x(n) + \sigma$$

unde:

$$\sigma = \Sigma \varepsilon_1 - \Sigma \varepsilon_2 + \ldots$$

Dacă m este numărul factorilor primi ai lui n atunci ar trebui să avem:

$$\Sigma \varepsilon_1 = C_m^1 \quad ; \quad \Sigma \varepsilon_2 = C_m^2 ; \ldots$$

Prin urmare:

$$18)\qquad \sigma = C_m^1 - C_m^2 - . - (-1)^m C_m^m = 1.$$

Aceasta ne arată că, *dacă* x *este prim cu factorii lui* n, *atunci* x *trebue socotit numai odată, fie în şirul*: 1 *la* x, *fie în şirul* x *la* n.

In cazul exemplului nostru numeric ar trebui să se ia:

$$I_{23}(30) = 7 \quad \text{şi} \quad I_7(30) = 1$$

sau

$$I_{23}(30) = 6 \quad \text{şi} \quad I_7(30) = 2$$

după cum vom socoti pe *7* în şirul *1* la *7* sau în şirul *7* la *30*.

* * *

Am încercat mai multe cazuri numerice, totuşi n'am găsit nici o altă variantă, faţă de explicaţia de mai sus.

Cred însă că ar fi interesant de examinat şi celelalte relaţiuni, nu este exclus să se găsească excepţii, cari ar putea dovedi o demonstraţie neriguroasă.

Aş fi recunoscător tinerilor corespondenţi, cari dispunând poate de mai mult timp, ar duce cercetările mai departe.

CPT. COMANDOR I. LINTEŞ.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE“ DIN 1940

Adunarea generală a Societăţii „*Gazeta Matematică*“, în şedinţa dela 31 August a. c., a hotărît ţinerea concursului tradiţional de matematici, în cursul anului 1940, între elevii liceelor civile şi militare din întreaga ţară.

Concomitent cu acest concurs se va ţine un concurs şi între elevii anului I ai Şcolii Politechnice „Regele Carol II“ din Bucureşti.

Concursul va avea loc după sărbătorile Paştelui, înainte de reînceperea cursurilor. Dacă Societatea va dispune de mijloace de a aduce candidaţii, el se va ţine în Bucureşti, unde se va da examen scris şi oral; în caz contrar se va ţine în diferite centre din ţară, într'o Duminică din luna Mai, dându-se numai examen scris.

Deciziunea în această privinţă se va publica în numărul din Februarie 1940.

Elevii cari doresc să candideze sunt obligaţi să se înscrie la *două din materiile de matematici ale clasei cărora aparţin,* la fiecare din aceste două materii urmând a da câte o lucrare scrisă, iar în cazul ţinerii concursului în Bucureşti şi examen oral.

Pentru unitatea pregătirii se va publica în numărul din Octomvrie a. c. al *Gazetei Matematice* un program, cu materia pe care candidaţii fiecărei clase vor trebui să o pregătească pentru obiectele la care se înscriu.

Sub nici un motiv nu se acordă candidaţilor scuze de nepregătirea unora din capitolele trecute în programul clasei lor pentru obiectele alese.

Inscrierea la concurs se face numai prin cerere individuală, scrisă personal de candidat, care se va trimete în plic recomandat cel mai târziu până la 31 Decemvrie a. c. pe adresa: *Societăţii „Gazeta Matematică". Calea Griviţei, 158. Bucureşti 2.*

Nu se primesc cereri trimese de părinţi, corespondenţi, profesori sau şcoli, fiecare candidat fiind obligat a-şi face singur cererea.

Pentru ca cererea de înscriere la concurs să fie luată în considerare, candidatul trebue să răspundă pe puncte, în ordinea de mai jos, la următoarele date:

1. Numele (de familie) şi pronumele.

2. Şcoala şi clasa în care urmează candidatul. (Cei pregătiţi în particular vor arăta şcoala la care au urmat în anul precedent, sau la care au depus examenul de fine de an pentru clasa precedentă).

3. Adresa personală:

— în timpul şcolii,

— în timpul vacanţei de Paşte.

4. Dacă dispune de mijloace de a veni în Bucureşti, dacă are unde fi găzduit şi întreţinut în timpul concursului, sau dacă unul din aceste mijloace ar urma să fie procurat de Societatea *„Gazeta Matematică"*.

(Cel care are nevoe de bani pentru drum, va arăta gara de unde va lua trenul pentru a veni în Bucureşti, precum şi gara la care se înapoiază după concurs).

5. Cele două materii de matematici la care se înscrie.

6. Activitatea depusă la *Gazeta Matematică* şi *Suplimentul cu Exerciţii al Gazetei Matematice,* precum şi la alte reviste de matematici din ţară sau străinătate, arătând numărul de probleme şi exerciţii rezolvate şi publicate până în prezent.

Candidaţii înscrişi la concurs, cari din diferite motive nu mai pot sau nu mai vor să se prezinte, sunt obligaţi să anunţe din timp Societatea printr'o scrisoare.

Părăsirea sălilor de concurs, înainte de predarea lucrărilor scrise, este interzisă.

In numărul 6 din Februarie 1940 al *Gazetei Matematice* se va publica modul de ţinere al concursului, localitatea, orele de prezentare, precum şi numele tuturor candidaţilor admişi să ia parte la concurs.

Numărul celor admişi va depinde de sacrificiile materiale ce se vor cere Societăţii *Gazeta Matematică* pentru transportul, găzduirea şi întreţinerea candidaţilor şi de pregătirea pe care aceştia vor arăta-o şi dovedi în cererile ce vor face.

Candidaţii reuşiţi la concurs vor primi ulterior diplome, recompense, premii sau menţiuni.

Primul reuşit dintre toţi candidaţii liceelor va primi premiul «LT.-COL. G. TĂNĂSESCU», în cărţi, conform celor arătate în acest număr la articolul: *Premii, burse şi publicaţii din fondurile speciale ale Societăţii „Gazeta Matematică“.*

Primul reuşit dintre elevii anului I al Şcolii Politehnice „Regele Carol II“ din Bucureşti va primi premiul «ANGHEL SALIGNY» (de 1000 lei) oferit de un membru al Societăţii noastre.

Comisiunea examinatoare se va compune din membri ai Societăţii *„Gazeta Matematică“*, care nu vor avea rude sau elevi printre candidaţi.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII.

PREMII, BURSE ŞI PUBLICAŢII DIN VENITURILE SOCIETĂŢII „GAZETA MATEMATICĂ“

I. *Premii.*

Premiile anunţate la pag. 25, Vol. XLIV, al *Gazetei Matematice*, au fost distribuite astfel:

1. *Premiul anual de aritmetică*, în valoare de 5.000 lei, a fost acordat elevului MIRCEA AL. VASILESCU-STABU, după cum s'a arătat în Vol. XLIV, pag. 357.

2. *Premiul anual de geometrie elementară*, în valoare de 5.000 lei a fost acordat tot elevului MIRCEA AL. VASILESCU-STABU, după cum s'a arătat în Vol. XLIV, pag. 577.

3. *Premiul anual de algebră*, în valoare de 5.000 lei, a fost acordat elevului NICOLAE D. ŞTEFĂNESCU, după cum s'a arătat în Vol. XLIV, pag. 468.

4. *Premiul anual de trigonometrie „Vasile Cristescu“*, în valoare de 5.000 lei, a fost acordat D-lui DUMITRU D. MAVRODIN, după cum s'a arătat în Vol. XLIV, pag. 522.

5. *Premiul anual de mecanică sau astronomie „Spiru Haret“*, în valoare de 5.000 lei, nu s'a acordat, din lipsă de lucrări speciale, după cum s'a arărat în Vol. XLIV, pag. 635. Valoarea acestui premiu se va adăoga la premiile viitoare.

6. *Premiul anual de filosofia matematicilor „Vasile Conta“*, în valoare de 4.000 lei, nu s'a acordat din lipsă de lucrări speciale, după cum s'a arătat în Vol. XLIV, pag. 126. Valoarea acestui premiu se va adăoga la premiile viitoare.

7. *Premiul de matematici superioare pure sau aplicate „Ing. H. Capriel“*, în valoare de 1.000 lei, urmează să se acorde la împlinirea perioadei de 5 ani.

8. *Premiul pentru lucrări de matematică aplicată la ştiinţele militare „General Scarlat Panaitescu“*, urmează să se acorde la împlinirea perioadei de 5 ani.

9. *Premiul anual „Lt.-Colonel Gh. A. Tănăsescu“* a fost acordat elevului VICTOR L. FLORESCU, clasificat întâiul la concursul *Gazetei Matematice*, căruia i s'a dat cărţi de matematici, după cum s'a arătat în Vol. XLIV, pag. 454.

10. *Premiul anual de geometria triunghiului şi a tetraedrului „Nicolae G. Botea“* nu a fost acordat. Raportul comisiunii speciale pentru acest premiu urmează să se publice în Nr. 5 din Vol. XLV, al *Gazetei Matematice*.

11. *Premiul anual „Ing. Al. Roşu“*, care se acordă celui mai harnic corespondent al *Gazetei Matematice*, elev de liceu, a fost acordat D-lui NICOLAE D. ŞTEFĂNESCU, după cum s'a arătat în Vol. XLIV, pag. 413.

II. *Burse*.

Din venitul fondului de burse *„Profesor Ion Ionescu“* s'au acordat, pentru anul şcolar 1938—1939, două burse de câte 3.000 lei lunar, D-lor: LT. C. AVRAM şi LT. I. ŞOVA, studenţi în anul III, construcţii, Politehnica „REGELE CAROL II“ din Bucureşti, după cum s'a arătat în Vol. XLIV, pag. 193.

III. *Publicații.*

In Biblioteca Tehnică a *Gazetei Matematice*, tipărită din venitul fondului „ANGHEL SALIGNY“ nu s'a făcut o publicație în cursul anului XLIV.

Din celelalte fonduri ale *Gazetei Matematice*, s'au tipărit următoarele cărți:

1. *Culegere de probleme de Geometrie analitică*, Partea I-a, Ediția II-a, de GH. ȚIȚEICA, adăogită de N. G. BOTEA.

2. *Culegere de probleme de algebră*, Partea II-a, Ediția IV-a, de D-l A. G. IOACHIMESCU, sub îngrijirea D-lor: O. N. ȚINO și C. IONESCU-BUJOR.

3. *Elementele lui* EUCLIDE, Volumul I (cărțile I—VI de Geometrie plană) traduse din limba greacă și adnotate de către D-l V. MARIAN cu o prezentare de D-l I. IONESCU.

Pentru a da putință corespondenților *Gazetei Matematice* și celor interesați, să ia cunoștință amănunțită de condițiile privitoare la premiile și bursele care se acordă de către Societatea *Gazeta Matematică*, s'au publicat în numărul de față, ca supliment, regulamentele fondurilor pentru premii și burse.

COMISIUNEA ÎNSĂRCINATĂ CU ADMINISTRAREA FONDURILOR SPECIALE ALE „GAZETEI MATEMATICE“

Ing. D. A. STAN și Ing. D. V. STOICA.

NOTE MATEMATICE

1. *Un mod de a scri datele!*

Un Inginer N. G., care se vede că a fost victimă a unor schimbări de date, scria anii cu primele trei cifre, iar în locul celei de a patra, cu litere. Iată extrase din un act al lui:

„188 și doi Ianuarie 28“.

„187 și șese Octombre 13“.

I. I.

2. *Numere interesante cu 10 cifre diferite* [1]). Pentru N_3 începând cu 6 şi cu 7, am mai găsit următoarele 29 soluţiuni pe lângă acelea găsite de D-l G-L GH. BUICLIU şi publicate în *Gazeta Matematică*, Vol. XLIV, pag. 29 şi pag. 77.

N_3	N	N_3	N
601 248 975	1 803 746 925	650 287 914	1 950 836 742
601 249 875	1 803 749 625	651 028 749	1 953 086 247
601 798 254	1 805 394 762	654 028 179	1 962 084 537
602 541 798	1 807 625 394	657 802 194	1 973 406 582
610 248 975	1 830 746 925	657 820 194	1 973 460 582
615 978 402	1 847 935 206	657 940 218	1 973 820 654
615 978 420	1 847 935 260	701 286 549	2 103 859 647
617 980 254	1 852 940 762	701 982 546	2 105 947 638
621 745 982	1 865 237 946	712 648 950	2 137 946 850
624 897 501	1 874 692 503	712 865 490	2 138 596 470
624 897 510	1 874 692 530	719 825 460	2 159 476 380
640 179 582	1 920 538 746	780 145 986	2 160 437 958
640 912 750	1 946 738 250	721 964 580	2 165 893 740
649 287 501	1 947 862 503	728 916 450	2 186 749 350
649 287 510	1 947 862 530		

ST. CETĂŢEANU.

3. *Asupra Notei „O formă a restului diviziunii de polinoame“.*

Colegul de redacţie, D-l M. GHERMĂNESCU, atrage atenţia asupra formei restului împărţirii a două polinoame, găsită de subsemnatul în nota publicată în No. 10 al G. M. (XLIII).

Această formă este cunoscută, ca rezultând din seria lui NEWTON, aplicată la polinoame.

M. I. F.

4. *Asupra patrulaterului ortodiagonal.*

In problema 4776 G. M., Vol. XLIII, pag. 49 ceream să se arate următoarele:

„ABCD *fiind un patrulater ortodiagonal şi cercurile* C_a, C_b, C_c, C_d *cu centrele în* A, B, C, D *astfel ca perechile* (C_a, C_b), (C_b, C_c), (C_c, C_d) *să fie ortogonale, rezultă ortogonalitatea*

1) Urmare la Nota dela pag 524, Vol. XLIV, *Gazeta Matematică*.

cercurilor C_a, C_d, *adică cercurile ortogonale* C_a, C_b, C_c, C_d *formează un lanț închis*[1])".

Proprietatea admite reciproca:

„*Dacă cercurile* C_a, C_b, C_c, C_d *formează un lanț închis de cercuri ortogonale, adică perechile de cercuri* (C_a, C_b), (C_b, C_c), (C_c, C_d), (C_d, C_a) *sunt ortogonale, centrele cercurilor sunt vârfurile unui patrulater ortodiagonal*".

A, B, C, D fiind centrele cercurilor rezultă (loc. cit.):

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{DA}^2$$

care este condiția ca patrulaterul ABCD să fie ortodiagonal.

C. IONESCU-BUJOR.

5. *Notă asupra articolului „Proprietăți ale pseudo-rombului"* (*Gazeta Matematică*, Anul XLIV, pag. 510).

a) Proprietatea dela Nr. 2 este un caz particular al unei teoreme a lui NEWTON:

„*Diagonalele unui patrulater circumscris unui cerc și coardele punctelor de contact ale laturilor opuse se taie în același punct*". (Vezi *F. G. M. Exercices de Géométrie*, pag. 573).

b) Demonstrarea teoremelor dela Nr. 9 la Nr. 12 se face mai ușor cu ajutorul teoremei cunoscute:

„*Dacă avem un triunghiu isoscel* ABC (AB = BC) *și dacă* M *este un punct mobil pe* BC, *suma proiectantelor lui pe laturile egale este constantă*".

c) Perimetrul patrulaterului ADME este deasemenea constant.

d) Proprietățile se pot generaliza ducând în loc de perpendiculare, drepte egal înclinate.

e) La demonstrația proprietății Nr. 9 trebuie pus B' și D' în loc de B și D. Deasemenea trebuie corectat $PS_1 = PS_1''$ și $PS_4 + PS_1'' =$ constant.

f) La demonstrarea proprietății Nr. 10 sunt erori la demonstrație. Perimetrele patrulaterelor MS_1PS_4 și $PS_2M'S_3$ sunt în adevăr constante.

g) Mai e de observat că proprietățile Nr. 9 și Nr. 12 trebuiesc aplicate numai când P, pe paralela Δ, variază numai între B' și D'.

VIRGIL GHIȚESCU.

---

1) C. IONESCU-BUJOR: „Asupra cercurilor ortogonale". *Gazeta Matematică* XLII, p. 455.

BIBLIOGRAFIE

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tom. CXXVII. Fascicola V. Mai 1939. Buenos-Aires. Asupra unei definiţii algebrice a derivatelor de ALBERTO E. SAGASTUME BERRA.

Boletin Matematico publicat de B. I. BAIDAFF. Anul XII. Nr. 9. Iulie 1939. Buenos-Aires. Generalizarea teoremei lui LAGUERRE. Asupra rezolvării în numere întregi a sistemului

$A^{kx} + B^{kx} + C^{kx} + D^{kx} = E^x + F^x + G^x + H^x$. ($x=1, 2$ şi 3), de A. GLODEN.

Idem. Anul XII. Nr. 10. Iulie 1939. Generalizarea unei probleme din Culegerea de probleme de Algebră, de B. I. BAIDAFF. Relaţiuni între patrate de A. GLODEN.

Buletinul „I. R. E." Anui VII. Nr. 2. Iunie 1939. Bucureşti.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 45. Nr. 7. Iulie 1939. Menasha, Wis & New-York.

Mathesis. Tom. LIII. Anul 1939. Nr. 5—6. Mai - Iunie 1939. Asupra triunghiului special a cărui distanţă a punctelor lui BROCARD este maximă (urmare), de V. G. CAVALLARO. Rădăcina patrată a unei homografii binare, de R. DEAUX. Asupra unei observări a lui GOURSAT relativă la desfăşurarea în serie a unei clase de funcţii implicite de D-ra J. MORANT, Asupra izopolului de J. BILO, Asupra ecuaţiunilor lui HAAR în calculul variaţiunilor de P. GILLIS, Asupra unei generalizări a teoremei lui WEILL-AIYAR de R. GOORMAGHTIGH, Descompunerea unei omografii plane într'un produs de două involuţiuni de R. DEAUX.

Sphinx. Revue mensuelle des questions récréatives. An. IX. Nr. 9. Septemvrie 1939. Bruxelles.

Informaciones Generales. Anuario 1938—1939. Prima serie. Universitatea naţională din La Plata. Publicaţiunile facultăţii de ştiinţe fizico-matematice. Nr. 120. Mai 1939. La Plata. Argentina.

N. N. MIHĂILEANU. *Aritmetică* pentru clasa I-a secundară. Arad. Mai 1939. Cartea mai conţine şi un capitol cu probleme suplimentare; cele mai grele sunt însoţite de indicaţii şi soluţiuni. Preţul 70 lei.

N. N. MIHĂILEANU. *Aritmetică* pentru clasa II-a secundară. Arad. Mai 1939. *Idem.* Preţul 30 lei.

N. N. MIHĂILEANU. *Aritmetică* pentru clasa III-a secundară. Arad. Mai 1939. *Idem.* Preţul 30 lei.

AL. I. STOENESCU. Inginer. *Teoria Relativităţii.* Ediţia II-a. Bucureşti 1939.

AL. I. STOENESCU. Inginer. *Unităţi de măsură în mecanică.* Teoria modelului, aplicaţiuni şi probleme. Bucureşti 1939.

T. T. VESCAN. *Teze* prezentate facultăţii de ştiinţe a universităţii „REGELE FERDINAND I" din Cluj pentru obţinerea titlului de doctor în ştiinţele fizice. Cluj 1939.

THÉOPHILE T. VESCAN. *Note sur les orbites relativistes des planètes,* presentée à la séance du 10 Juillet 1939 de l'Académie des Sciences de Paris, par M. LOUIS DE BROGLIE.

RENÉ GARNIER. *Leçons d'Algèbre et de Géométrie* à l'usage des étudiants des facultés des sciences. Tome III. Gauthier-Villars. Paris 1937.

Primele două volume ale *Lecţiunilor* se refereau la Algebra şi Geometria lineară şi cuadratică.

Acest volum cuprinde: Eliminarea cu funcţiile simetrice ca introducere şi ca aplicaţii cu problema locurilor geometrice, coordonatele plückeriene, complexele linear şi tetraedral, transformarea lui LIE — adică transformarea de contact care schimbă elementele de contact ale unui plan cu ale unei sfere — transformarea de contact care păstrează liniile de curbură.

Introduceri în studiul transformărilor, volumele D-lui R. GARNIER sunt necesare celor ce vor să lucreze pe acest şantier. Ele presupun însă prealabila însuşire a elementelor geometriei analitice în plan şi spaţiu, a elementelor de Analiză, adică lectura unui Curs de Matematici generale.

C. IONESCU-BUJOR.

CERERI

Răspuns la Cererea Nr. 281. Ca supliment la Răspunsul publicat la pag. 588, adaog următoarele, scrise chiar de mâna lui PUŞCARIU, în un Buletin al lui care se găseşte la Societatea Politehnică din Bucureşti, la care el a fost unul dintre membri fondatori în anul 1881 :

„ION JOE PUSCARIU. *Inginer de politechnica din Zürich, 31 Martie 1874*".

După un tablou dela acea Societate, el ar fi fost născut la 1851 şi a trăit până la 1920.

I. I.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

H. A. LORENTZ. Le partage de l'énergie entre la matière pondérable et l'ether. Roma 1903.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

C. ALASIA. Alcune combinazioni di formule.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

CEZAR D. ORĂŞANU. Proiecţiunea Stereografică în România întregită. (Extras din Buletinul Cadastral Nr. 1. Vol. I. 1937). Bucureşti.

CEZAR D. ORĂŞANU. Proiecţiunea Colonelului BONNE în România. (Extras din Buletinul Cadastral Nr. 2. Vol. I. 1937). Bucureşti.

CEZAR D. ORĂŞANU. Transcalcularea coordonatelor topografice în coordonate geodezice. (Extras din Buletinul Cadastral Nr. 3. Vol. I. 1937). Bucureşti.

CEZAR D. ORĂŞANU. Geodezia României în raport cu geodezia internaţională. (Extras din Buletinul Cadastral Nr. 4. Vol. 1937). Bucureşti.

CEZAR D. ORĂŞANU. Desvoltarea bazei pe latura triangulaţiunei. (Extras din Buletinul Cadastral. Nr. 5 şi 6. Vol. I. 1937). Bucureşti.
Donate de autor.

AL. I. STOENESCU. Probleme de mecanică. Statica. Bucureşti. 1938.
Donată de autor.

BALIBAR, PIOBETA et PAGOSSE. Le mouvement pédagogique a l'étranger. I. U. R. SS. et Tchécoslivaquie. Paris 1938.
Donată de D-l T. VESCAN, profesor secundar.

G. MAHLER. Ebene Geometrie. Sammlung Göschen 1913. Berlin.
Donată de D-l O. N. ŢINO, profesor la Politehnica Timişoara.

J. VONDERLINN. Schattenkonstruktionen. Sammlung Göschen 1913. Berlin.
Donată de D-l O. N. ŢINO, profesor la Politehnica Timişoara.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2091. *Să se demonstreze că punctele lui* BROCARD *sunt simetrice faţă de dreapta care uneşte centrul cercului circumscris cu punctul simedian.*

TR. LALESCU.

Fie $A_1B_1C_1$ primul triunghiu al lui BROCARD corespunzător triunghiului ABC; O centrul cercului ABC; K punctul lui LEMOINE; Ω_1 şi Ω_2 punctele lui BROCARD aşezate cum se ştie pe cercul lui BROCARD (cercul de diametru OK).

Observând că punctele Ω_1 şi Ω_2 se găsesc prin definiţie respectiv pe dreptele BA_1 şi CA_1 şi că A_1K este paralelă la BC, deducem că:

$$\sphericalangle \Omega_1A_1K = \sphericalangle \Omega_1BC = \sphericalangle A_1BC = \sphericalangle A_1CB = \sphericalangle KA_1\Omega_2;$$

de altă parte că:

$$\sphericalangle \Omega_1A_1K = \sphericalangle \Omega_1OK \quad \text{şi} \quad \sphericalangle \Omega_2A_1K = \sphericalangle \Omega_2OK$$

deducem că:

$$\sphericalangle \Omega_1OK = \sphericalangle \Omega_2OK$$

de unde rezultă proprietatea enunţată. (Vezi *Traité de Géométrie* par E. ROUCHÉ et CH. DE COMBEROUSSE, première partie, pag. 480).

A rezolvat pe cale trigonometrică D-l N. N. MIHĂILEANU (bacalaureat Constanţa) calculând segmentele $\overline{O\Omega_1}$ şi $\overline{O\Omega_2}$ şi arătând că sunt egale.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 2578. *Se cere o funcţiune aşa ca rădăcina a* m^a *a funcţiunei ei primitive să fie funcţiunea primitivă a rădăcinei a* m^a *a ei.*

N. KAUFMANN.

Fie $\varphi(x)$ funcţiunea căutată. Conform enunţului trebue să avem:

$$\sqrt[m]{\int \varphi(x)\,dx} = \int \sqrt[m]{\varphi(x)}\,dx.$$

Să punem:

$$\int \varphi(x)\,dx = \Psi(x) \quad \therefore \quad \varphi(x) = \Psi'(x).$$

Vom avea:

$$\sqrt[m]{\Psi(x)} = \int \sqrt[m]{\Psi'(x)}\,dx.$$

De unde, diferenţiând:

$$\frac{1}{m}\left[\Psi(x)\right]^{\frac{1-m}{m}}\Psi'(x)=\left[\Psi'(x)\right]^{\frac{1}{m}}$$

sau încă:

$$\frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)}=\frac{1}{m^{\frac{1-m}{m}}}=m^{\frac{m-1}{m}}=n.$$

Integrând, avem:

$$L\Psi(x)=nx+k$$

$$\therefore \qquad \Psi(x)=e^{nx+k}$$

şi deci:

$$\varphi(x)=\Psi'(x)=ne^{nx+k}$$

aşa că funcţiunea cerută este:

$$\varphi(x)=m^{\frac{m}{m-1}}e^{m^{\frac{m}{m-1}}x+k}$$

k fiind o constantă.

Această soluţie a fost dată de D-l Căp. M. I. FOCŞENEANU, când era ofiţer elev al Şcoalei Speciale de Artilerie.

PROBLEMA 2585. *Două puncte* P *şi* P′ *sunt aşezate oricum pe două sfere concentrice. Dacă* A, B *şi* A′, B′ *sunt respectiv două puncte diametral aşezate pe cele două sfere, avem:*

$$\overline{P'A}^2+\overline{P'B}^2=\overline{PA'}^2+\overline{PB'}^2.$$

D. PERIEŢEANU.

Soluţie dată de D-l MIRCEA A. NEGREA-LEONTE (Brăila).
Fie:

$$R=\overline{OP}=\overline{OA}=\overline{OB} \text{ şi } R'=\overline{OP'}=\overline{OA'}=\overline{OB'}$$

razele celor două sfere. Mai notăm prin:

$$\text{ungh } AOP'=\alpha \text{ , ungh } A'OP=\beta.$$

Din triunghiurile AOP', BOP', scoatem :

$$\overline{P'A}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OP'}^2 - 2\overline{AO} \cdot \overline{OP'} \cos\alpha = R^2 + R'^2 - 2RR' \cos\alpha,$$

$$\overline{P'B}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OP'}^2 - 2\overline{BO} \cdot \overline{OP'} \cos(180^0 - \alpha) = R^2 + R'^2 + 2RR' \cos\alpha,$$

de unde rezultă imediat:

$$(1) \qquad \overline{P'A}^2 + \overline{P'B}^2 = 2(R^2 + R'^2).$$

Analog, din triunghiurile A'OP, B'OP, scoatem:

$$\overline{PA'}^2 = \overline{OA'}^2 + \overline{OP}^2 - 2\overline{OA'} \cdot \overline{OP} \cos\beta = R^2 + R'^2 - 2RR' \cos\beta,$$

$$\overline{PB'}^2 = \overline{OB'}^2 + \overline{OP}^2 - 2\overline{OB'} \cdot \overline{OP} \cos(180^0 - \beta) = R^2 + R'^2 + 2RR' \cos\beta,$$

de unde:

$$(2) \qquad \overline{PA'}^2 + \overline{PB'}^2 = 2(R^2 + R'^2).$$

Comparând pe (1) cu (2) rezultă :

$$\overline{P'A}^2 + \overline{P'B}^2 = \overline{PA'}^2 + \overline{PB'}^2.$$

GH. TH. GH.

PROBLEMA 2920. *Numerele* aab, aba, baa (a *şi* b *cifre*) *au acelaşi număr de divizori. Să se găsească acele numere.*

G. JUJESCU.

Un prim grup de soluţii evidente sunt cele 9 numere de forma *aaa.*

Pentru $a \neq b$ se procedează prin încercări, descompunând în factori primi toate cele 81 numere de 3 cifre de forma *aab*, apoi pe acelea de formele *aba* şi *baa* şi calculând numărul divizorilor lor după formula cunoscută.

$$n = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1),$$

în care α, β,... sunt exponenţii factorilor primi.

Se găsesc următoarele 14 soluțiuni:

aab	*aba*	*baa*	*n*
$113 = 1 \times 113$	$131 = 1 \times 131$	$311 = 1 \times 311$	2
$117 = 3^2 \times 29$	$171 = 3^2 \times 19$	$711 = 3^2 \times 79$	6
$226 = 2 \times 113$	$262 = 2 \times 131$	$622 = 2 \times 311$	2
$337 = 1 \times 337$	$373 = 1 \times 373$	$733 = 1 \times 733$	2
$339 = 3 \times 113$	$393 = 3 \times 131$	$933 = 3 \times 311$	4
$551 = 19 \times 29$	$515 = 5 \times 103$	$155 = 5 \times 31$	4
$553 = 7 \times 79$	$535 = 5 \times 107$	$355 = 5 \times 71$	4
$558 = 2 \times 3^2 \times 31$	$585 = 3^2 \times 5 \times 13$	$855 = 3^2 \times 5 \times 19$	12
$662 = 2 \times 331$	$626 = 2 \times 313$	$266 = 2 \times 133$	4
$771 = 3 \times 257$	$717 = 3 \times 239$	$177 = 3 \times 59$	4
$882 = 2 \times 3^2 \times 7^2$	$828 = 2^2 \times 3^2 \times 23$	$288 = 3^2 \times 2^5$	18
$991 = 1 \times 991$	$919 = 1 \times 919$	$199 = 1 \times 199$	2
$993 = 3 \times 331$	$939 = 3 \times 313$	$399 = 3 \times 133$	4
$998 = 2 \times 499$	$989 = 23 \times 43$	$899 = 29 \times 31$	4

Au dat soluții acestei probleme, la data propunerei ei D-nii: E. BĂLAN, D. BLUMENFELD, C. I. CIORĂNESCU și T. POPOVICIU.

Ca curiozitate numerică, se vede din tabloul precedent că numerele prime 113, 337, 991 rămân tot prime când li se schimbă oricum cifrele între ele.

G-L GH. BUICLIU.

PROBLEMA 3840. *Să se arate că între unghiurile oricărui triunghiu, avem relațiile:*

$$\Sigma \operatorname{tg}^3 \frac{A}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right)^3 = 1 + \Sigma \operatorname{tg}^3 \frac{A}{2} \operatorname{tg}^3 \frac{B}{2} - 6 \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2},$$

$$\Sigma \operatorname{cotg}^3 A (\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C)^3 = 1 + \Sigma \operatorname{cotg}^3 A \operatorname{cotg}^3 B - 6 \operatorname{cotg}^2 A \operatorname{cotg}^2 B \operatorname{cotg}^2 C.$$

CEZAR COȘNIȚĂ.

Soluție dată de D-nii: VLADIMIR I. CRIVĂȚ, PETRE I. GHIȘOIU, VICTOR IONESCU, C-TIN GH. LUPESCU, MARIUS MARGULIUS, N. N. MIHĂILEANU, EMILIAN MEREUȚĂ, MIRCEA-LEONTE A. NEGREA, I. C. PAREPEANU, CRISTIAN I. RÂMNICEANU și NIC. N. VELICESCU.

Să stabilim mai întâi o identitate algebrică. Avem:

$$(\Sigma xy)^3 = \Sigma x^3y^3 + 3\Sigma x^3y^2z + 6x^2y^2z^2,$$

sau încă:

$$(\Sigma xy)^3 = \Sigma x^3(y^3 + z^3 + 3y^2z + 3yz^2) - \Sigma x^3y^3 + 6x^2y^2z^2,$$

sau înfine:

$$\Sigma x^3(y+z)^3 = (\Sigma xy)^3 + \Sigma x^3y^3 - 6x^2y^2z^2,$$

identitate pe care o aveam în vedere.

Făcând aci:

$$x = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\ ,\quad y = \operatorname{tg}\frac{B}{2}\ ,\quad z = \operatorname{tg}\frac{C}{2};$$

şi apoi:

$$x = \operatorname{cotg}A\ ,\quad y = \operatorname{cotg}B\ ,\quad z = \operatorname{cotg}C,$$

cum:

$$\Sigma \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \Sigma \operatorname{cotg}A \operatorname{cotg}B = 1,$$

se obţin tocmai relaţiile din enunţ.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4029. *Se consideră un cerc înscris într'un triunghiu echilateral* ABC *cu latura* a. *Să se studieze variaţia produsului* $\overline{AM} \times \overline{MB}$ *în funcţie de unghiul* MOD, M *fiind un punct pe cerc, iar* D *piciorul perpendicularei din* O *pe* AB.

IULIU DEAC.

Soluţie dată de D-nii: C-TIN N. AVRAM, AUREL EM. BĂDESCU, Sub-Locot. C. D. IONESCU-ŢIU, N. N. MIHĂILEANU, GEORGE ŞT. ROŞCA şi V. I. C. VISSARION.

Fie: ungh MOD = x. Dreapta CD este axă de simetrie în triunghiul dat, deci este suficient, pentru a studia variaţia produsului, ca unghiul x să varieze între O şi 180^0. Presupunând că M se află pe semicercul tangent laturei AC, din triunghiul OMA, avem:

$$AM^2 = OM^2 + OA^2 - 2OM \cdot OA \cos(x - 60^0),$$

iar din triunghiul OMB,

$$BM^2 = OM^2 + OB^2 - 2OM \cdot OB \cos(x + 60).$$

Dar:

$$OM = OD = AD\,tg30^0 = \frac{a}{2\sqrt{3}},\quad OA = OB = \frac{AD}{\cos 30^0} = \frac{a}{\sqrt{3}},$$

de unde rezultă că:

$$AM^2 = \frac{a^2}{10}[5 - 4\cos(x - 60^0)]\ ;\ BM^2 = \frac{a^2}{12}[5 - 4\cos(x + 60^0)].$$

Dacă notăm cu y produsul a cărui variaţie vrem să studiem, putem scrie:

$$y = \frac{a^2}{12}\sqrt{25 - 20[\cos(x-60^0) + \cos(x+60^0)] + 16\cos(x-60^0)\cos(x+60^0)}$$

şi cum:

$$\cos(x - 60^0) + \cos(x + 60^0) = 2\cos x \cos 60^0 = \cos x,$$

$$\cos(x - 60^0)\ \cos\ (x + 60^0) = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 120^0)$$

$$= \frac{1}{4}(4\cos^2 x - 3),$$

urmează că:

$$y = \frac{a^2}{12}\sqrt{16\cos^2 x - 20\cos x + 13} = \frac{a^2}{12}\sqrt{\left(4\cos x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{27}{4}}\ .$$

Depe această expresie a lui y se citesc imediat următoarele rezultate:

y este minim atunci când: $\cos x = \frac{5}{8}$, $x = 51^0\,19'\,4''$

y este maxim atunci când: $\cos x = -1, x = 180^0$,

iar tabloul de variaţie, atunci când x variază între 0 şi 360^0 este:

x	0		$51^0\,19'\,4''$		180^0		$308^0\,40'\,54''$		360^0
y	$\frac{a^2}{4}$	descreşte	$\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ min.	creşte	$\frac{7a^2}{12}$ max.	descreşte	$\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ min.	creşte	$\frac{a^2}{4}$

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4177. *Fie* A', B', C' şi A", B", C" *centrele patratelor construite exterior, apoi interior pe laturile unui patrulater* ABCD *ale cărui diagonale* $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ *sunt egale. Să se arate că patrulaterele* A'B'B"A", B'C'C"B", C'D'D"C", D'A'A"D" *sunt echivalente* [1]).

V. THÉBAULT.

Observăm în primul rând că A' şi A", centrele patratelor, construite pe $\overline{AB}$ ca latură, în afară şi înlăuntrul patrulaterului ABCD, sunt celelalte două vârfuri opuse ale patratului construit pe $\overline{AB}$ ca diagonală; analog pentru celelalte perechi de centre.

Problema enunţată este o consecinţă imediată a proprietăţii mai importante relativă la un triunghiu:

Dacă pe laturile $\overline{BA}$ *şi* $\overline{BC}$ *ale triunghiului* ABC, *luate ca diagonale, construim respectiv patratele* AA'BA" *şi* BB'CB", *aria patrulaterului cu diagonalele* A'B", B'A" *este egală cu jumătatea ariei patratului construit pe* $\overline{AC}$ *ca latură.*

Triunghiurile B"BA' şi A"BB' sunt egale, având

$$\overline{BA'} = \overline{BA''} \; ; \; \overline{BB''} = \overline{BB'} \quad \text{şi} \quad \sphericalangle A'BB'' = \sphericalangle B'BA''.$$

(Căci $\sphericalangle A'BA'' = \sphericalangle B'BB'' = 90^0$;

$$\sphericalangle A'BA'' \pm \sphericalangle A''BA'' = \sphericalangle B'BB'' \pm \sphericalangle B''BA'');$$

deci:

$$\overline{A'B''} = \overline{B'A''} \quad (1) \quad \text{şi} \quad \sphericalangle BA''B' = \sphericalangle BA'B''. \quad (2)$$

Insemnând acum cu L punctul unde A'B" taie pe B'A", egalitatea (2) dă condiţia:

$$\sphericalangle BA'L = \sphericalangle BA''L, \quad \text{sau} \quad \sphericalangle BA'L \text{ şi } \sphericalangle BA''L$$

suplementare, adică patrulaterul A'BA"L *este inscriptibil;* deci $\sphericalangle A'LA''$ fiind egal sau suplementar cu $\sphericalangle A'BA''$, *este un unghiu drept.* Aşadar, diagonalele $\overline{A'B''}$ şi $\overline{B'A''}$ ale patrulaterului A'B'B"A" fiind egale şi perpendiculare, aria acestui patrulater este egală cu $\frac{1}{2}\overline{A'B''}^2$, adică:

$$S_{A'B'B''A''} = \frac{1}{2}\overline{A'B''}^2. \quad (3)$$

---

1) Enunţ corectat.

Observând acum că:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BB''}}{\overline{BC}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

şi

$$\sphericalangle A'BB'' = \sphericalangle A'BA + \sphericalangle ABB'' = 45^0 + \sphericalangle ABC - 45^0 = \sphericalangle ABC,$$

deducem că triunghiurile A'BB'' şi ABC sunt asemenea, raportul de asemănare fiind $\frac{1}{\sqrt{2}}$, deci $\frac{\overline{A'B''}}{\overline{AC}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ şi în consecinţă:

$$S_{A'B'B''A''} = \frac{1}{2}\,\overline{AC}^2 \qquad (4)$$

de unde rezultă proprietatea enunţată.

Aplicând această proprietate pentru fiecare triunghiu format de fiecare diagonală în patrulaterul ABCD şi ţinând seamă de faptul că diagonalele lui $\overline{AC}$ şi $\overline{BD}$ sunt egale rezultă problema enunţată.

Au rezolvat problema: D-l N. N. MIHĂILEANU (Student Bucureşti) pe cale geometrică, iar D-l CEZAR IVĂNESCU (Student Iaşi) cu ajutorul trigonometriei.

Observare. Aria patrulaterului A'B'A''B'', adică format pe diagonalele $\overline{A'A''}$, $\overline{B'B''}$, este egală cu aria triunghiului ABC; deoarece $\overline{A'A''} = \overline{AB}$; $\overline{B'B''} = \overline{BC}$, iar unghiul direcţiilor A'A'', B'B'' este egal sau suplementar cu unghiul ABC.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 4339. *Să se demonstreze identitatea:*

$$8r^3 \Sigma (r_a + r_b - 2r_c)^3 = 3\Pi\,[(a-b)^2 + c\,(a+b-2c)],$$

notaţiile fiind cele obişnuite[1]).

SUB-LT. I. C. SAVIN.

---

1) Enunţ corectat.

Soluţie dată de D-nul NEGREA A. MIRCEA-LEONTE (Brăila). Pornim dela identitatea:

$$A^3 + B^3 + C^3 = (A + B + C)^3 - 3(A + B)(B + C)(C + A),$$

în care facem:

$$A = r_b + r_c - 2r_a, \ldots, \text{ şi găsim:}$$

$$\Sigma (r_a + r_b - 2r_c)^3 = 3(r_a + r_b - 2r_c)(r_b + r_c - 2r_a)(r_c + r_a - 2r_b).$$

Folosind formulele cunoscute avem succesiv:

$$(a)\quad r_a + r_b - 2r_c = S\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} - \frac{2}{p-c}\right) = S\,\frac{p(b+a-2c) + bc + ac - 2ab}{(p-a)(p-b)(p-c)},$$

sau încă:

$$r_a + r_b - 2r_c = S\,\frac{(a-b)^2 + c(a+b-2c)}{2(p-a)(p-b)(p-c)}$$

şi deci:

$$\Sigma (r_a + r_b - 2r_c)^3 = 3S^3\,\frac{\Pi[(a-b)^2 + c(a+b-2c)]}{8(p-a)^3(p-b)^3(p-c)^3}$$

$$= \frac{3p^3}{8S^3}\,\Pi[(a-b)^2 + c(a+b-2c)] = \frac{3}{8r^3}\,\Pi[(a-b)^2 + c(a+b-2c)],$$

adică tocmai relaţia din enunţ.

D-l NEGREA A. MIRCEA-LEONTE face observarea: *enunţul sub care a fost publicată problema era eronat, autorul înlocuind în (a) p prin* $a + b + c$, *iar nu prin valoarea adevărată* $\frac{a+b+c}{2}$.

D-nii VILHELM CSEKE, PAUL DOBRESCU, GRIGORE MARTEŞ şi ION GH. ŞABAC au făcut observarea că enunţul problemei, aşa cum a fost publicat la început, era greşit.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4432. *Fie* M, N *punctele în care dreapta* Δ, *paralelă cu* BC, *taie cercul circumscris triunghiului* ABC.

Să se afle locul geometric al intersecţiei dreptelor lui SIMSON *ale punctelor* M *şi* N *luate în raport cu triunghiul* ABC, *când* Δ *se deplasează.*

C. IONESCU-BUJOR.

1°. Să considerăm mai general dreapta Δ neparalelă cu BC. Fie P intersecţia dreptelor lui SIMSON ale punctelor M, N luate în raport cu triunghiul ABC. Se ştie [1]) că P este ortopolul dreptei Δ în raport cu triunghiul ABC. Dacă dreapta Δ se deplasează păstrând direcţia, locul geometric al ortopolului este o dreaptă Δ' perpendiculară pe Δ [2]).

Să presupunem că Δ trece prin centrul cercului ABC. Punctele M fiind diametral opuse, dreptele lui SIMSON corespunzătoare sunt rectangulare şi se întâlnesc în P_0 pe cercul lui EULER. Deci dreapta Δ' trece prin P_0.

Apoi se vede uşor că Δ deplasându-se cu păstrarea direcţiei într'un sens al dreptei Δ', P se deplasează în acelaşi sens.

Fie E, F extremităţile diametrului perpendicular pe Δ. Când Δ ajunge în E, punctele M, N coincid în E, iar dreptele lui SIMSON respective coincid cu dreapta lui SIMSON a punctului E. Analog pentru punctul F.

Concentrând rezultatele precedente: „*Locul geometric al intersecţii dreptelor lui* SIMSON *ale punctelor în care o dreaptă* Δ *taie cercul circumscris, când* Δ *se deplasează păstrând direcţia, este format din dreptele lui* SIMSON Δ_1, Δ_2 *ale extremităţilor diametrului perpendicular pe* Δ *şi din porţiunea cuprinsă între* Δ_1 *şi* Δ_2 *a perpendicularei pe* Δ *dusă prin ortopolul diametrului paralel cu* Δ".

2°. In cazul particular al problemei: Δ_1 este dreapta lui SIMSON a mijlocului arcului BC, care trece prin A' mijlocul laturii BC şi este perpendiculară pe bisectoarea vârfului A; Δ_2, dreapta lui SIMSON a diametralului opus, trece deasemenea prin mijlocul laturii BC şi este perpendiculară pe bisectoarea exterioară; diametrul paralel cu BC are ortopolul pe cercul lui EULER în punctul diametral opus lui A', deci în punctul eulerian situat pe înălţimea vârfului A.

Deci locul cerut de problemă este format din Δ_1, Δ_2 (perpendicularele duse pe bisectoarele vârfului A din mijlocul laturii BC) şi din porţiunea înălţimii vârfului A cuprinsă între Δ_1 şi Δ_2.

3°. Au soluţionat parţial problema D-nii: I. I. ŢIŢEICA, NICOLAE D. ŞTEFĂNESCU, I. G. ŞABAC, M. C. POSTELNICESCU şi RADU V.

1) TR. LALESCU: La Géométrie du triangle: 2.24.
2) D. V. IONESCU: Teorema ortopolului. G. M. XXIX, p. 251.

APOSTOL dela Liceul militar N. Filipescu, VILHELM CSEKE (student Cluj) şi AL. POPESCU-ZORICA (Bucureşti).

4°. Analog se găseşte locul geometric al intersecţiei P, a dreptelor lui SIMSON de unghiu $\pi - \varphi$ ale punctelor unde o dreaptă Δ taie cercul ABC când Δ se deplasează păstrând direcţia, observând că punctul P este izopolul [1]) de unghiu φ al dreptei Δ în raport cu triunghiul ABC şi că P se deplasează pe o dreaptă înclinată de unghiul φ pe Δ.

C. I. B.

PROBLEMA 4829. *Intre unghiurile oricărui triunghiu avem:*

$$\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} - \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\right)\sin A + \left(\operatorname{tg}\frac{B}{2} - \operatorname{cotg}\frac{B}{2}\right)$$

$$\sin B + \left(\operatorname{tg}\frac{C}{2} - \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right)\sin C = -2\left(1 + \frac{r}{R}\right).$$

(Enunţ rectificat).

GH. VASILIU.

Primul membru al egalităţei se poate scrie succesiv:

$$\Sigma\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} - \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\right)\sin A = -2\Sigma \operatorname{cotg} A \cdot \sin A = -2\Sigma \cos A =$$

$$= -2\left(1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) = -2\left(1 + \frac{r}{R}\right).$$

Astfel au rezolvat problema D-rele CRĂCIUNESCU I. MARIA, GEREANU C. ANA, RACIU I. MARGARETA, ROMAŞCANU GEORGETA, TĂNĂSESCU VENERA şi D-nii: AMĂRĂŞTEANU F. MARCEL, ANDRIEVICI N., APOSTOL RADU, BEIU-PALADI GH. ERNEST, BODNĂRESCU M. HORIA, BOIAN EMIL, BUZNEA D. DINU, CÂRDEIU D. GH., CETĂŢEANU STELIAN, CORNĂŢEANU I. AUREL, COTULBEA I. CONST., DIACONESCU D. IOAN, DIACONESCU MARCEL, GOLDENBERG IACOB, GRUMĂZESCU M., GVIAZDOMORSCHI Z. ROMULUS, FLORESCU VICTOR, IONESCU B. N. GH., IONESCU D. STELIAN, IONESCU-FULGER M. CORNELIUS,

---

1) N. BOTEA: Curierul Matematic I, p. 6.

MATEI D. DUMITRU, MILU I. NIC., MODÂLCĂ S. EMIL, MOTAŞ C. CAMIL, NEGOIŢĂ M. V. P., NEGREA A. MIRCEA, OBREJA DORIN, PĂDUREŢ A. VASILE, PANTELIMON V. CONST., PÂRVULESCU AL. VLADIMIR, PESCARU IOAN, PETRESCU MIHAI, POPA D. MIRCEA, POPESCU ADRIAN, POPESCU-ZORICA N. AL., PREDOESCU-ŢÂNŢĂRENI TR., RĂDULESCU GH. OCT., REISCHER L. H., ROHR I. ALEXANDRU, ROŞCULEŢ N. MARCEL, ROSENBLATT S. MILU zis ROTH, ŞAICHIN O. ADOLF, SĂRULEŞTEANU I. EM., SOLOMON I. ISAC, SECU V. AD., SEGAL JOE, STAICU I. N., STAMATE I. IONEL, STOENESCU D. MIREL, STREDER IOAN, TOMA N. NIC., THEODORESCU N. DORIN, TILICĂ C. ŞTEFAN, TURCU R. SANDU şi VASILESCU-STABU AL. N.

D-nii CORNĂŢEANU I. AUREL şi TURCU R. SANDU au stabilit că:

$$\Sigma\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}-\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\right)\operatorname{cotg}B=-2.$$

D-nii NEGOIŢĂ M. V. P., PĂDUREŢ A. VASILE, PÂRVULESCU A. VLADIMIR şi SECU V. ADRIAN au stabilit deasemenea, că:

$$\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\right)\sin A-\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\right)$$

$$\sin B-\left(\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right)\sin C=-2.$$

D-nul ROSENBLATT S. MILU zis ROTH a stabilit identitatea:

$$\Sigma\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\right)\sin A=6$$

observând că pentru verificarea ei nefăcându-se uz de condiţia că unghiurile trebuesc să fie ale unui triunghiu, a generalizat-o astfel:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\operatorname{tg}\frac{Ai}{2}+\operatorname{cotg}\frac{Ai}{2}\right)\sin Ai=2n,$$

înfine, D-nul POPESCU-ZORICA N. AL. a stabilit relaţia generală:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\operatorname{tg}\frac{Ai}{2}-\operatorname{cotg}\frac{Ai}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{Ai}{2}=-2n.$$

GH. V.

PROBLEMA 4863. *a, b, c,* A, B, C *fiind laturile şi unghiurile unui triunghiu, iar* φ *un unghiu arbitrar, avem relaţiile:*

$$a^3\cos\varphi = b^3\cos(3C+\varphi)+c^3\cos(-3B+\varphi)+3abc\cos(C-B+\varphi)$$

$$a^3\sin\varphi = b^3\sin(3C+\varphi)+c^3\sin(-3B+\varphi)+3abc\sin(C-B+\varphi).$$

N. N. MIHĂILEANU.

Separând coeficienţii lui $\sin\varphi$ şi $\cos\varphi$ în cele două relaţii, vom arăta că aceste expresii sunt nule. Ţinem seama, pentru aceasta de relaţiile:

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \quad , \quad \cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\,\sin^2 x$$

$$b\cos B + c\cos C = a \quad , \quad b\sin B = c\sin B = h$$

$$2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2 \text{ şi analoagele}$$

şi scriem:

$$E_1 = b^3\sin 3C - c^3\sin 3B + 3abc\sin(C-B)$$

$$= b^3(3\sin C - 4\sin^3 c) - c^3(3\sin B - 4\sin^3 B)$$

$$+ 3abc(\sin C\cos B - \sin B\cos C) = 3hb^2 - 4h^3 - 3hc^2 + 4h^3$$

$$+ 3ahc\cos B - 3ahb\cos C = 3h[b^2 - c^2 + ac\cos B - ab\cos C]$$

$$= 3h[b^2 - c^2 + \tfrac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2) - \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)] = 0.$$

$$E_2 = a^3 - b^3\cos 3C - c^3\cos 3B - 3abc\cos(B-C)$$

$$= a^3 - b^3(\cos^3 C - 3\cos C\,\sin^2 C) - c^3(\cos^3 B - 3\cos B\,\sin^2 B)$$

$$- 3abc(\cos B\cos C + \sin B\sin C) = a^3 - b^3\cos^3 C - c^3\cos^3 B$$

$$+ 3bh^2\cos C + 3ch^2\cos B - 3abc\cos B\cos C - 3ah^2$$

$$= a^3 - [b^2\cos^3 C + c^3\cos^3 B + 3bc\cos B\cos C(b\cos B + c\cos C)]$$

$$- 3h^2[a - b\cos C - c\cos B] = a^3 - (b\cos C + c\cos B)^3 = 0.$$

Foarte bune soluţii date de D-rele: MIOARA I. CRĂCIUNESCU, ANA C. GEREANU (studente, Bucureşti) şi D-nii: STELIAN CETĂŢEANU (lic. Şincai, Bucureşti), PANTELIMON V. CONSTANTIN (lic. mil. Iaşi), VICTOR FLORESCU (lic. mil. M-rea Dealu), MIRCEA D. POPA (lic. mil. Iaşi), ALEXANDRU POPESCU-ZORICA (Bucureşti), MIREL D. STOENESCU (lic. mil. M-rea Dealu) şi DORIN N. THEODORESCU.

Observare. 1. Intrebuinţând metoda din R. M. T. (XVI, pag. 31), D-nii GRIGORE MARTEŞ (Sublt.) şi I. STREDER (lic. mil. Iaşi), dau soluţia următoare: dacă o dreaptă face cu laturile unui triunghiu, unghiurile α, β, γ şi θ e arbitrar, avem relaţia:

$$ae^{i(\alpha+\theta)} + be^{i(\beta+\theta)} + ce^{i(\gamma+\theta)} = 0$$

ridicând la cub [1]), avem:

$$a^3e^{3i(\alpha+\theta)} + \ldots = 3abce^{i(\alpha+\beta+\gamma+3\theta)}$$

notând $3\theta = \varphi$ şi separând părţile reale şi imaginare, avem:

$$a^3 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (3\alpha + \varphi) + \ldots = 3abc \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (\alpha + \beta + \gamma + \varphi)$$

dacă: $\alpha = \pi$, $\beta = C$, $\gamma = -B$, obţinem relaţiile din enunţ.

2. Relaţia a doua se poate obţine din prima şi prin înlocuirea lui φ cu $90^0 + \varphi$, ori prin derivare în raport cu φ.

3. Relaţiile $E_1 = 0$, $E_2 = 0$ au fost date la Concursul G. M. din anul 1937 şi rezolvate acolo foarte elegant şi în minimum de timp de D-nii: ILIE IOAN şi V. FLORESCU.

4. S'au mai primit câteva soluţii sub o aşa formă necuviincioasă că au fost aruncate.

PROBLEMA 4932. $A_2B_2C_2$ *fiind triunghiul complementar triunghiului* $A_1B_1C_1$ *care este tangenţial triunghiului* ABC, *să se arate că perpendicularele ridicate în* O *centrul cercului* ABC, *respectiv pe dreptele* OA_2, OB_2, OC_2 *taie laturile* BC, CA, AB *ale triunghiului în trei puncte colineare.*

TH. G. COCEA.

Soluţie dată de D-l M. VASILESCU-STABU (Alba-Iulia).

Fie L, intersecţia perpendicularei în O pe OA_2, cu BC. Acest punct fiind pe BC, polara lui va trece prin A_1, polul dreptei BC faţă de cercul (O) şi va fi perpendiculară pe OL, deci paralelă cu OA_2. Fie A_1A' (A' pe BC) această polară.

Punctele A_1 şi A_2 sunt omoloage în triunghiurile omotetice $A_1B_1C_1$ şi $A_2B_2C_2$, prin urmare paralelele A_1A', OA_2 sunt omoloage în aceleaşi triunghiuri. Insă dreptele OA_2, OB_2, OC_2 sunt concurente în punctul O al triunghiului $A_2B_2C_2$, deci dreptele A_1A' şi analoagele ei (B_1B', C_1C') vor fi concurente într'un punct ω al triunghiului $A_1B_1C_1$, omologul punctului O.

---

1) Dacă $x + y + z = 0$, $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

Cum dreptele A_1A', B_1B', C_1C' sunt respectiv polarele punctului L şi analoagelor lui (M şi N) rezultă că aceste puncte, polii dreptelor amintite se găsesc pe polara punctului de concurenţă ω, deci sunt colineare.

C. I. B.

PROBLEMA 4956. *Se dau în planul triunghiului* ABC *trei puncte* M, N, P *astfel ca să avem :*

$$\sphericalangle BAM = \sphericalangle MAP = \sphericalangle PAC = \alpha$$
$$\sphericalangle ABM = \sphericalangle MBN = \sphericalangle NBC = \beta$$
$$\sphericalangle BCN = \sphericalangle NCP = \sphericalangle PCA = \gamma.$$

Fie M' N', P' *punctele determinate de perechile de drepte* (BN, AP); (CP, BM); (AM, CN). *Dreptele* MM', NN', PP' *taie laturile* AB, BC, CA *respectiv în punctele* M", N", P". *Să se arate că dreptele* AN", BP", CM" *sunt concurente în acelaşi punct.*

O. N. ŢINO.

Soluţie dată de D-nii: C. PASCARU, CONST. V. PANTELIMON (Elevi Lic. Militar Iaşi). Observăm că dreptele AM şi BM fiind în triunghiul AM'B bisectoarele unghiurilor A şi B, dreapta MM' este a treia bisectoare interioară a triunghiului; deci aplicând proprietatea metrică a bisectoarei, avem:

$$\left|\frac{\overline{M''A}}{\overline{M''B}}\right| = \frac{M'A}{M'B}, \text{ dar în acelaşi triunghiu, avem că:}$$

$$\frac{M'A}{M'B} = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha}, \text{ deci: } \left|\frac{\overline{M''A}}{\overline{M''B}}\right| = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha}. \qquad (1)$$

In mod analog găsim relaţiile:

$$\left|\frac{\overline{N''B}}{\overline{N''C}}\right| = \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\beta} \quad (2) \quad \text{şi} \quad \left|\frac{\overline{P''C}}{\overline{P''A}}\right| = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\gamma}. \qquad (3)$$

Inmulţind relaţiunile (1), (2), (3) între ele şi ţinând seamă de sensul segmentelor, avem relaţia:

$$\frac{\overline{M''A}}{\overline{M''B}} \cdot \frac{\overline{N''B}}{\overline{N''C}} \cdot \frac{\overline{P''C}}{\overline{P''A}} = -1 \qquad (R),$$

deci M", N", P" în triunghiul ABC sunt picioarele a trei ceviene concurente în acelaşi punct, de unde rezultă proprietatea enunţată.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 5038. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}=\sqrt{x}$$

şi să se verifice soluţiile aflate.

LT. C. IONESCU-ŢIU.

Soluţie dată de D-l MIRCEA C. NICULESCU, Liceul „Titu Maiorescu" Bucureşti.

Ridicăm la patrat, facem reducerile şi obţinem:

$$\frac{2}{x}-x=2\sqrt{\frac{1}{x^2}-1+\frac{x^2}{4}}=2\sqrt{\left[\varepsilon\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{2}\right)\right]^2}=2\varepsilon\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{2}\right)$$

unde ε are ca valoare ± 1.

Pentru $\varepsilon=-1$ avem o ecuaţie care admite ca rădăcină $x=\sqrt{2}$, iar pentru $\varepsilon=+1$ avem o identitate.

Pentru valori reale ale lui x, partea doua a ultimei egalităţi este pozitivă când

$$\frac{2}{x}-x\geqslant 0 \quad \text{sau} \quad x\leqslant\sqrt{2}\,.$$

Deasemenea pentru valori reale ale lui x, prima parte din enunţ este reală şi deducem din partea doua că x este pozitiv, deci:

$$0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\,.$$

Se mai observă că:

$$\frac{1}{x}\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}>0,$$

deoarece:

$$\frac{1}{x^2}\geqslant 1-\frac{x^2}{2} \quad \text{sau} \quad (x^2-2)^2\geqslant 0.$$

D-sa a mai făcut şi verificări numerice pentru

$$x=1\,;\ \frac{1}{2}\,;\ \sqrt{2}\ \text{şi}\ \frac{1}{10}\,.$$

S'au mai primit numeroase soluţiuni incomplete care au arătat că $x=\sqrt{2}$ verifică egalitatea.

C. I. Ţ.

PROBLEMA 5077. *Să se găsească patratele perfecte de şase cifre, obţinute prin scrierea unui patrat perfect la stânga unui număr de cifre identice.*

G. G. CONSTANTINESCU.

Soluţia I, dată de D-l OVIDIU ENULESCU.

Terminaţiile în cifre identice şi semnificative ale unui patrat perfect sunt 44 şi 444, care singure trebuesc considerate pentru motivul că dacă patratul perfect se termină într'un număr par de zeruri, orice patrat perfect scris înaintea acestor zeruri, nu constitue decât o soluţie banală a problemei, deci lipsită de interes.

Acestea fiind, amintindu-ne că rădăcinile patratelor terminate în 44 sau 444 sunt respectiv de formele:

$$50n \pm 12 \qquad 500n \pm 38$$

conform enunţului, trebue să avem:

$$(50n \pm 12)^2 = 100x^2 + 44 \qquad (500n \pm 38)^2 = 100x^2 + 444$$

adică:

$$25n \pm 12n + 1 = x^2 \qquad 250n^2 \pm 38n + 1 = x^2.$$

Cum însă x^2 este respectiv de patru şi trei cifre, rezultă că valorile lui n sunt cele din intervalele $(\pm 7, \pm 20)$ şi $(\pm 1, \pm 2)$, iar calculul ne arată că numai pentru $n = \pm 1$ obţinem pentru x^2 un patrat perfect, anume 289, astfel încât singura soluţie a problemei este numărul

$$538^2 = 289444.$$

Soluţia II, dată de D-l OVIDIU ENULESCU.

Notând cu x^2 patratul la stânga căruia se scrie un număr de cifre identice, iar cu y^2 patratul rezultat, soluţiile problemei sunt date de ecuaţiile diofantine

$$100x^2 + 44 = y^2 \qquad 1000x^2 + 444 = y^2$$

atunci când nu considerăm decât acelea în care y^2 are şase cifre.

Prima ecuaţie se rezolvă imediat, căci ea scriindu-se

$$y^2 - (10x)^2 = 2^2 \cdot 11$$

rezultă că avem sistemele:

$$\begin{array}{lll} y - 10x = 1 & y - 10x = 2 & y - 10x = 4 \\ y + 10x = 44 & y + 10x = 22 & y + 10x = 11 \end{array}$$

din care deducem unica soluţie:

$$x = 1 \quad y = 12$$

care însă nu ne dă decât o soluţie banală 000144 a problemei.

Soluţia celei de a doua ecuaţii scrisă sub forma:

$$y^2 - 10\,(10x)^2 = 2^2 \cdot 3 \cdot 37$$

se obţine uşor aplicând cuvânt cu cuvânt metodul indicat de D-l G. CONSTANTINESCU în R. M. T.—XVI—Nr. 1 şi 2. Prima soluţie este:

$$y = 38 \qquad x = 1$$

adică avem patratul 1444 care nu corespunde însă problemii.

A doua soluţie, este:

$$y = 538 \qquad x = 17$$

care ne dă patratul 289444 ce satisface enunţului şi care constitue unica soluţie a problemei.

Observări. Au rezolvat problema D-nii: 1°. EMIL S. MODÂLCĂ asemănător cu prima parte a soluţiei II după care a continuat prin încercări, scriind patratele $x^2 444$ şi extrăgând rădăcinile.

2°. L-LT. M. GRUMĂZESCU şi REISCHER L. HERMAN asemănător primei soluţii.

3°. D. D. BOIANGIU (Liceul T.-Severin) şi M. AL. VASILESCU-STABU prin încercări.

4°. S'a primit şi o soluţie care nu conţinea însă decât soluţii banale, care nu prezintă nici un interes.

G. G. C.

EXERCIŢII

1. Ştiind că înălţimile AH, BK, CL ale triunghiului ABC întâlnesc cercul circumscris, respectiv în punctele A', B', C', să se arate că există relaţiile:

$$\frac{\cos(B - C)}{AA'} = \frac{1}{2R},$$

$$\frac{a}{HA'} + \frac{b}{KB'} + \frac{c}{LC'} = 2\,\mathrm{tg}A\ \mathrm{tg}B\ \mathrm{tg}C.$$

DUMITRU D. MATEI.

R. I. (1) $AA' = h_a + HA'$.

Dar, deoarece AA' şi BC sunt coarde ale cercului circumscris, rezultă:

$$HA' = \frac{CH \times BH}{h_a} = \frac{h_a^2 \operatorname{cotg}B \operatorname{cotg}C}{h_a},$$

(2) $HA' = h_a \operatorname{cotg}B \operatorname{cotg}C$.

Introducând valoarea din (2) în (1), obţinem:

$$AA' = h_a (1 + \operatorname{cotg}B \operatorname{cotg}C),$$

$$\therefore \quad AA' = \frac{h_a \cos(B - C)}{\operatorname{sin}B \operatorname{sin}C},$$

care devine, ţinând seamă de relaţia:

$$h_a = 2R \operatorname{sin}B \operatorname{sin}C,$$

$$AA' = 2R \cos(B - C).$$

De unde scoatem relaţia ce era de demonstrat.

II. Cunoscând că:

$$h_a = \frac{a}{\operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C},$$

relaţia (2), se scrie:

$$HA' = \frac{a \operatorname{cotg}B \operatorname{cotg}C}{\operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C} = \frac{a}{\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B},$$

de unde:

$$\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B = \frac{a}{HA'}, \text{ etc.}\ldots$$

Atunci:

$$\frac{a}{HA'} + \frac{b}{KB'} + \frac{c}{LC'} = 2(\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C) = 2 \operatorname{tg}A \operatorname{tg}B \operatorname{tg}C.$$

2. Se dă un triunghiu ABC şi un punct O pe prelungirea laturii CB astfel încât $OB = d$. Trei mobile M_1, M_2, M pornesc în acelaşi timp, primele două din A respectiv către B şi C, iar al treilea din O către B, C. Vitezele mobilelor M_1 şi M_2 fiind v_1 şi v_2, să se determine viteza v a lui M, astfel încât acesta să întâlnească în B pe M_1 şi în C pe M_2. In ce condiţie avem $v_1 = v_2$?

VIRGIL GHIŢESCU.

R. Ecuaţia mişcărilor mobilelor este $s = vt$. Egalând timpurile obţinem

$$t = \frac{c}{v_1} = \frac{d}{v} \quad \text{şi} \quad t = \frac{b}{v_2} = \frac{a + d}{v}.$$

De aci:

$$v = \frac{dv_1}{c} = \frac{(a + d) v_2}{b}.$$

Vitezele v_1 şi v_2 sunt legate prin relaţia lineară:

$$v_2 = \frac{bd}{c(a+d)} v_1 .$$

In cazul $v_1 = v_2$ avem:

$$bd = ac + cd.$$

Mai avem în triunghiul ABC:

$$b < a + c.$$

Inmulţind această relaţie cu d şi ţinând seamă de precedenta, obţinem:

$$d > c.$$

PROBLEME PROPUSE

5180. O mediană a unui triunghiu poate fi semisuma a două laturi ale triunghiului?

I. IONESCU.

5081. In *Gazeta Matematică*, Vol. XXVIII, pag. 217, am demonstrat că nici unul din numerele $55\ldots5_{2n-1}6$ nu poate fi patrat perfect. Să se demonstreze că deasemeni nici numerele $55\ldots5_{2n}6$ nu pot fi patrate perfecte în baza zecimală.

G-L GH. BUICLIU.

5182. Un număr M scris în baza x are toate cifrele de rang $(na_i - i)$, dela dreapta la stânga, egale cu 1, iar toate celelalte cifre sunt egale cu zero. Să se demonstreze că dacă $a_i > 1$, iar i ia toate valorile 1, 2,..., n, atunci M se divide prin numărul $11\ldots1_n$, format din n cifre egale cu 1.

M. AL. VASILESCU-STABU.

5183. Numerele 513 şi 514 se bucură de proprietatea:

$$513^2 = 263169 \quad , \quad 514^2 = 264196.$$

Să se determine alte perechi de numere ale căror patrate de opt cifre se bucură de o proprietate asemănătoare.

G. G. CONSTANTINESCU.

5184. In ce caz numerele poligonale P_{n-2}^{a} şi P_{n+2}^{b} sunt egale?

CPT. C-DOR I. LINTEŞ.

5185. Se consideră patrulaterul complet ABCDEF în care laturile opuse AB, CD se taie în F, iar diagonalele interioare se taie în O. Fie α, β, γ mijloacele segmentelor determinate pe o dreaptă Δ de laturile opuse AD, BC; AB, CD şi de diagonalele interioare AC, BD. Să se demonstreze că dreptele $E\alpha$, $F\beta$, $O\gamma$ sunt concurente.

P. BOLDESCU.

5186. Se dă trapezul ABCD cu bazele AD, BC. Să se construiască două drepte paralele cu bazele pe care diagonalele şi laturile neparalele determină trei segmente egale. Notăm cu E, F şi G, H punctele unde fiecare din aceste drepte taie diagonalele. Să se arate că laturile neparalele ale trapezului ABCD şi cele ale trapezului EFGH sunt concurente.

GH. D. SIMIONESCU.

5187. Se consideră patratele $BCB_a C_a$, $ACA_b C_b$, $BAB_c A_c$ construite pe laturile triunghiului ABC, în exterior. Fie Q al patrulea vârf al paralelogramului $AA_b QA_c$, în care $A_b A_c$ este o diagonală, şi β, γ intersecţiile dreptelor AB_a, AC_a cu BC. Să se arate că triunghiurile BQC, $BA\gamma$, $CA\beta$ au acelaşi ortocentru.

N. N. MIHĂILEANU.

5188. In triunghiul ABC fie AM mediana corespunzătoare vârfului A şi Δ simetrica acestei mediane faţă de BC. Se consideră două cercuri, care trecând unul prin B şi altul prin C, trec ambele prin M şi au al doilea punct comun N situat pe dreapta Δ. Aceste cercuri intersectează a doua oară pe AB şi AC în E şi F. Să se arate că EN şi FN trec prin două puncte isotomice ale lui BC.

THEODOR GH. COCEA.

5189. Dacă vârful S al tetraedrului SABC se proiectează pe planul ABC în punctul de intersecție al cercului lui BROCARD cu mediatricea laturei BC ale triunghiului ABC, avem relațiunea:

$$\overline{SA}^2 \cdot \overline{BC}^2 (\overline{CA}^2 - \overline{AB}^2) + \overline{SB}^2 \cdot \overline{CA}^2 (\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2) + \overline{SC}^2 \cdot \overline{AB}^2 (\overline{BC}^2 - \overline{CA}^2)$$
$$= 2S \cdot \overline{BC}^2 (\overline{CA}^2 - \overline{AB})^2 (\operatorname{cotg} A - \operatorname{tg} V),$$

S fiind suprafața triunghiului ABC, iar V unghiul lui BROCARD al aceluiași triunghiu.

AL. POPESCU-ZORICA.

5190. Fie φ punctul lui FEUERBACH al unui triunghiu oarecare ABC; A′, B′ C′ mijloacele laturilor sale și A_1, B_1, C_1 punctele de contact ale cercului înscris cu laturile triunghiului. Celelalte notații fiind cele obișnuite, să se demonstreze relațiile:

$$a \cdot \overline{\varphi A_1}^2 + b \cdot \overline{\varphi B_1}^2 + c \cdot \overline{\varphi C_1}^2 = 4Sr$$

$$\frac{\overline{\varphi A'}^2}{\overline{\varphi A_1}^2} + \frac{\overline{\varphi B'}^2}{\overline{\varphi B_1}^2} + \frac{\overline{\varphi C'}^2}{\overline{\varphi C_1}^2} = \frac{R(R-2r)}{2r^2}.$$

P. I. GHIȘOIU.

5191. Ce fel de triunghiu este acela ale cărui laturi sun proporționale cu rădăcinile sistemului:

$$x + y = 7 \quad , \quad x^2 + y^2 + 3xy = 61 \quad , \quad 5z - xy = 13.$$

JULIAN ALEXIU.

5192. Să se calculeze valoarea determinantului:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{p-1} & x_{p-1}^2 & \dots & x_p^{p-1} & x_p^n \\ x_n^p & x_p^{n-1} & x_p^{n-2} & \dots & x_p & 1 \\ 1 & x_{p+1} & x_{p+1}^2 & \dots & x_{p+1}^{n-1} & x_{p+1}^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Să se calculeze asemenea valoarea determinantului ce se obține înlocuind în Δ_n fiecare element prin derivata sa.

N. O. ZAHARIA.

5193. Dacă la un triunghiu sferic o mediană este suplementul jumătăţii laturei corespunzătoare, atunci şi celelalte două mediane sunt respectiv jumătăţile laturilor corespunzătoare, iar triunghiul sferic care uneşte mijloacele laturilor este tridreptunghic.

GENERAL GH. I. LITEANU.

5194. Se consideră funcţiunea:

$$f(x,\ m,\ n) = \frac{x^m}{1 - x^n},$$

unde m şi n sunt două numere întregi şi pozitive şi se cere:

1°. Să se reprezinte grafic diferitele forme ce poate avea curba

$$y = f(x,\ m,\ n)$$

după diferitele valori ale lui m, şi n.

2°. Să se deducă din reprezentările făcute, numărul de rădăcini reale ale ecuaţiei

$$x^m + a\,(x^n - 1) = 0,$$

a fiind un parametru variabil real.

3°. Să se studieze seria cu termenul general

$$u_n = f(x;\ n + p,\ n).$$

4°. Să se determine numărul n, în funcţiune de p, aşa fel ca limita produsului:

$$\lim_{x=\infty} f(x;\ 2,\ n) \cdot f(x;\ 6,\ n) \ldots f[x;\ p(p+1),\ n]$$

să fie finită şi diferită de zero.

GH. TH. GHEORGHIU.

Până la sfârșitul lunei precedente, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Bodnărescu M. Horia (5168, 71, 72, 73, 75, 76); *Buznea D. Dinu* (4989); *Cazanacli V. P.* (5047, 67, 90, 120); *Cetățeanu Stelian* (4339, 5030, 31, 46, 122, 50, 67, 71, N); *Djebcu Leonida* (5120, 52, 59, 60); *Eftimie D. C.* (4880, 81, 5150, 52, 53); *Enulescu Ovidiu* (2222, 599, 3819, 902, 4520, 25, 81, 654, 93, 782, 801, 09, 29, 5004, 62, 65. 66, 67, 111, 13, 59, 61, 73, 75); *Gloden A.* (N); *Mărculescu O.* (5157); *Mățieș V. I.* (A); *Modâlcă S. Emil* (4829, 5090, 107, 17, 22, 35, 52, 60); *Moessner A.* (N); *Petrescu Iulian* (5153, 60, 65, N); *Șaichin O. Adolf* (5118, 71, R); *Silaș George* (5173); *Ștefănescu D. Nicolae* (4453, 5050, 80, 174); *Thébault V.* (P); *Trefilav I. Mihail* (5069); *Vasilescu-Stabu Al.* (5154); *Vasilescu-Stabu Al. Mircea* (4829, 993, 109, 50, 52, 53, 64, 67, 71, 72).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus de **geometrie,** *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii și nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeași foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu** şi **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică* Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă). (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu** şi **Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie.* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică*, Fascicola I. Ediţia II-a revăzută şi adăogită, 1923. (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice. (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice. (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile Geometrice ale calculului infinitezimal Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240.

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 50 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

C. 58.345.

BIBLIOTECA CENTRALA
ASOCIATIUNII
SIBIU

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLV

NUMARUL 2. — OCTOMVRIE 1939

SUMARUL

1. Simultaneitate şi ulterioritate . . . . . *T. Vescan.*
2. Asupra unei teoreme a Domnului General Gh. Buicliu . . . . . *D. V. Ionescu.*
3. Desvoltarea unui polinom întreg în x în raport cu rădăcinile sale . . . . . *D. Georgescu.*
4. Note Matematice: 6 — 9.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 287.
7. Diverse.
8. Probleme rezolvate: 1876, 3210, 3477, 3915, 4125, 4175, 4329, 4708, 5164.
9. Exerciţii 3 — 6.
10. Probleme propuse: 4464, 5166, 5195 — 5209.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1939

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **D. Stoica**, Inginer; Cpt. Comandor-Inginer **Gr. Zapan**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Secretarul General al Ministerului Lucrărilor Publice şi Comunicaţiilor, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1939 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 5180, 81, 82, 83, 84, 85, 89, 90, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 200, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL XLV. Nr. 2 *SUPLIMENT* OCTOMVRIE 1939

RECREAŢIUNI

1. **Numărul 7.** Intr'un tratat de ştiinţe oculte găsim:

„Orice fruct trebuie cules în anotimpul lui. Natura, căreia îi place numerele ei, este satisfăcută de numărul 7 misterios, mai ales în lucrurile care privesc globul lunar. Luna ne face să vedem o cantitate infinită de alteraţiuni şi schimbări în acest număr *septenar*".

Mistere de nepriceput!

I. I.

*

2. **Jumătatea în cimilituri (ghicitori).** In cartea de *Cimilituri* de G. PASCU laşi 1909, găsim următoarele ghicitori:

Strigă *micica* din cetate, că-i cireada jumătate. *(Popa).*

Strigă Hogea din cetate, să vie vacile toate şi viţeii pe jumătate. *(Clopotul).*

Două jumătăţi de blid într'o margine de crâng. *(Urechile).*

Am o pară frumoasă, la un capăt înfocată, la un capăt secerată, jumătate de mâncat, jumătate de aruncat. *(Cocoşul).*

I. I.

*

3. **40 în Proverbe.** In colecţia de Proverbe a lui IULIU ZANNE găsim:

A aştepta pe cineva cu 40 ochi.

30 de meserii, 40 de nenorociri.

— O dată în 40 de ani sboară o găscă friptă.

— Averea mai mult de 40 de ani nu stă într'un loc; şi acolo stă atâta unde este câştigată cu dreptate, iar unde e cu strâmbătate, nu ţine nici atâta.

— Vrajba neprietenii, ca piatra de var lucrată, până 40 de ani tot fiarbe (dela DUMITRU CANTEMIR).

— Hopa! Ţopa! | Cât ţine nunta; | Chiu! Vai! Patruzeci de ai! |.

I. I.

*

4. **1 leu = 20 bani!** Intr'un număr al *Ziarului Călătoriilor* dinainte de războiu găsim:

10 bani = 2 gologani de câte 5 parale.

Ridicăm la patrat şi avem:

1 leu = 20 de bani.

M. GH. DUMITRESCU.

Din punct de vedere valutar, *un leu* este astăzi mult mai puțin decât 20 de bani de atunci. Din punct de vedere aritmetic se poate ajunge la paradoxuri și mai *grozave* dacă nu se face atenție la întrebuințarea unităților de măsură.

GH. B.

Chestiunea acestui paradox este tratată în „Culegere de probleme de Aritmetică". Partea I. Aritmetica rațională. Ediția II. 1937, pag. 7.

I. I.

*

5. **9 = 380!** Această egalitate este titlul unui capitol dintr'un roman al cărui titlu la rândul său este un număr. Este vorba de opera „Quatre-vingt-treize" de VICTOR HUGO. Iată și demonstrația egalității precedente, scoasă din textul capitolului :

«Le Capitaine avait l'oeil fixé sur son carnet et additionnait entre ses dents».

— Cent vingt-huit, cinquante deux quarante cent soixante.

En ce moment, La Vieuville remontait sur le pont.

— Chevalier, lui cria le Capitaine, nous sommes en présence de trois cent quatre-vingt pièces.

— Soit, dit Lavieuville.

— Vous revenez de l'inspection, Lavieuville ; combien décidement avons-nous de pièces en état de faire feu ?

— Neuf.

V. GH.

*

6. **Aritmetica la Cantemir.** In Hronic găsim :

„... *cinci* Tătari de Crâm plătesc mai mult decât *zece* de Bugeac și *cinci* Moldoveni biruesc pe *zece* Tătari de Crâm, iar *cinci* Codreni, adică Tighiceni, bat pe *zece* Moldoveni".

A. I. STAN.

*

7. **Greutate în litri!** Dintr'un dicționar Francez-Român :

Setier (ti-é) [1. sextarius] m. 1. (+) măsură de greutate de 156 litri, de lichide 7½ litri. 2. *demi-setier*, ¼ litru (lax Paris).

I. I.

*

8. **Numărul telefonului meu.** Cifrele telefonului meu sunt în progresie aritmetică. Cubul ultimei cifre este egal cu suma cuburilor celorlalte cifre. Care-i numărul telefonului meu ?

Ca să nu vă obosiți căutându-l vi-l dau eu, cu condiția să nu-mi telefonați :

3456 căci $6^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3$.

A. MOESSNER.

Intrebarea este dacă nu mai sunt și alte numere în aceste condiții și atunci vai de aparatul telefonic. O vom vedea aceasta în *Gazeta Matematică.*

GH. B.

*

9. **Problema mucurilor.** Un ţigan adună mucuri de pe stradă şi strânge 9 mucuri. Din 3 mucuri el face o ţigară. Câte ţigări va fuma?

R. 4, căci dela cele 3 ţigări ce a făcut i-a rămas câte un muc cu care a mai putut face o ţigară. Ii rămâne la urmă un muc.

A doua zi se duce cu un băiat al lui şi găseşte el 10 mucuri şi copilul 5 pe care vrea să i le ducă măsii acasă. Câte ţigări va fuma ţiganul cu cele 10 mucuri?

R. Cu 9 mucuri fumează 4 ţigări, şi ii rămâne un muc pe lângă al zecelea ce-l avea dela inceput. Cere copilului în împrumut un muc, face o nouă ţigare, iar mucul care îi rămâne îl dă înapoi copilului. Deci un muc în plus i-a procurat o ţigară întreagă în plus!

I. I.

*

10. **Teorema celor trei perpendiculare.** La un liceu de fete din Capitală:

— *Profesoara.* D-ta cunoşti teorema celor trei perpendiculare.

— *Eleva.* Da! Avem un plan şi un punct exterior; din punct coborîm pe plan trei perpendiculare...

(Autentic).

ADOLF O. ŞAICHIN.

*

11. **Piatra cubică curioasă.** O piatră cubică are volumul şi suprafaţa totală exprimată prin acelaşi număr. Măsurând cu decimetrul, se întreabă care sunt dimensiunile acelei pietre.

Răspuns. Muchia are 6 dm lungime, suprafaţa totală este $6 \times 6^2 = 216$ dm^2 şi volumul 6^3 dm^3 $= 216$ dm^3.

A. MOESSNER.

Dacă x este muchea unui astfel de cub, avem ecuaţia:

$$x^3 = 6x^2, \qquad \therefore \qquad x = 6.$$

Se întreabă dacă, între solidele uzuale, mai este vreunul care să aibă aceeaşi caracteristică. Răspunsurile exacte le vom publica la Recreaţii.

GH. B.

*

12. **Inmulţire exponenţială!** In *«La gondole aux chimères»* de M. DEKOBRA găsim:

«La lutte pour la vie devient féroce entre les nations. Les appétits sont multipliés à la troisième puissance».

A. ŢINTIREANU.

Rezultă că *poftele* s'ar putea şi ele măsura şi exprima prin numere care ar fi supuse apoi tuturor operaţiunilor aritmetice şi algebrice.

GH. B.

*

13. **Problemă cu multe necunoscute!** Intr'un articol în ziarul francez *«Le Journal»* defunctul nostru om politic GRIGORE FILIPESCU a scris la 14 Septemvrie 1930 următoarele:

«Pour résoudre un problème, il faut autant d'équations que d'inconnues. Les 27 Etats qui ont répondu favorablement à la généreuse initiative de MR. BRIAND, *s'efforcent de résoudre le grand problème de l'Europe, d'après guerre, en ne posant que 27 équations pour 28 inconnues».*

Et quelle inconnue? La Russie!"

V. C. POPESCU.

*

14. **O teoremă a lui** ION HELIADE RĂDULESCU: *«Timpul se are către loc ca durata către distanță».*

I. I.

*

15. **Puncte cardinale în gramatică.** AL. RUSSO vorbind de gramatici, spune următoarele:

„Unul preface toată limba în *iune*, altul în *ție*, altul în *in*, altul în *înt*, de nu știi cum să te încurci între aceste patru puncturi cardinale a gramaticilor".

I. I.

*

16. **Problemarium.** Un nou cuvânt matematic! El a fost pus în circulație de doi tineri, CĂLIN și BOGDAN ILIESCU-BRÂNCENI, dându-l ca titlu unei broșuri apărute în editura ziarului *«Universul»*. Autorii, *«băeți mari»* după cum ne spune în Introducere că le zice tatăl D-lor, s'au apucat să facă, fiind în școală, *herbarium, insectariu* și atunci le-a venit ideia ca să facă și un *«Problemarium»* adică o colecționare de *«Chestii»*, *«Probleme»* pe care le-au auzit prin familie, prin școală, sau pe care le-au citit și care le-au plăcut. Este o colecțiune modestă de jocuri, probleme, întrebări cu răspunsuri curioase; unele din ele sunt de mult publicate în aceste Suplimente ale *Gazetei Matematice*.

O curiozitate a acestei broșuri este că Prefața ei este scrisă de D-l Profesor de filosofie ION PETROVICI. D-sa explică ce l'a îndemnat să primească să scrie câteva cuvinte la începutul „Problemariumului" tinerilor autori.

I. I.

*

17. **Relativitate.** Un exemplu de relativitate îl găsim la începutul poezii *«Despărțire»* de G. TOPÂRCEANU:

„Trec pâlcuri de răchită și sălcii fug într'una, Pe cer, în clarul zilei, ne urmărește luna, — Și trenul de-o potrivă la'ntrecere cu ea, Aleargă peste câmpuri... Adio draga mea".

I. I.

*

18. **Până unde merge spiritul de reclamă!** In ziarul *The Nation* s'a publicat o reclamă de către WALTER SCOTT pentru o băutură căreia i-a dat numele **Rollion.** Multe și nenumărate avantagii date de inventatorul acesta băuturii născocite de el! Intre altele, fabricantul o recomandă elevilor și studenților care pricep greu matematicile!

I. I.

SIMULTANEITATE ŞI ULTERIORITATE

ELEMENTELE AXIOMATICEI TIMPULUI [1])

1°. **Cauzalitatea şi noţiunea de timp.** Din punct de vedere temporal *principiul cauzalităţii* formulat de către KANT, pretinde succesiunea regulată în timp a fenomenelor, a cauzelor şi efectelor. Analizând concepţia aceasta a cauzalităţii, fizicianul şi filozoful austriac E. MACH ajunge la concluzia că o poate înlocui prin afirmarea unor *raporturi invariabile*, existând *simultaneu*, între elementele cantitative ale fenomenelor, şi prin determinarea relaţiilor funcţionale pe cari le putem găsi între modificările lor.

Plecând poate dela HUME, el arată în *„Die Analyse der Empfindungen"* şi în *„Erkentniss und Irrtum"* că *noţiunea clasică* de *cauzalitate* este de o *simplicitate prea abstractă: unei cauze* îi urmează *un efect* direct. Insă relaţia dintre fenomene niciodată nu este aşa de simplă ca s'o putem reduce la o cauză unică. In general, nu se observă că un singur fenomen ar fi efectul pur al unui alt fenomen, ci se constată — de obiceiu — că fenomenele se influenţează reciproc. De aceea MACH propune *înlocuirea* noţiunii de cauzalitate *prin noţiunea de funcţie matematică.* Iată ce scrie: *„In ştiinţele mai desvoltate şi mai superioare întrebuinţarea noţiunilor de cauză-efect este din ce în ce mai limitată, mai rară; acest lucru se explică prin faptul că noţiunile acestea nu sunt destul de precise şi indică numai provizoriu şi imperfect starea unui sistem".* Nu este destul, de exemplu să spunem că prin cheltuirea unui lucru mecanic se desvoltă o căldură oarecare, ci trebuie să precizăm proprietăţile cantitative ale elementelor acestei transformări, ceea ce principiul cauzalităţii ne indică numai în mod foarte vag. De aici MACH conclude că *determinând factorii cantitativi ai elementelor unui fenomen „dependenţa reciprocă dintre aceste elemente se exprimă mult mai complect şi mult mai precis prin noţiunea de funcţie, decât prin noţiunile atât de nesigure de cauză şi efect".*

1) Aceste elemente sunt date cu scopul de a preciza noua noţiune a timpului din fizica matematică şi de a prezenta câteva din contribuţiunile personale ale autorului cuprinse în lucrarea de teză *«Contribuţiuni la teoria cinetică şi relativistă ale fluidelor reale»* asupra noţiunii de timp discontinuu al fizicei moderne.

Pornind dela particular la general vom putea releva încă o proprietate a timpului în cauzalitate, după concepţia lui MACH [1]), şi anume să luăm exemplul următor: fiind date două masse gravifice sunt date şi acceleraţiile lor. Afirmaţia aceasta trebue să fie analizată: nu putem afirma că sunt date numai massele, acest unic aspect al realităţii materiale, care apoi prin interacţiunea lor dau naştere la forţe atractive sau repulsive şi deci la acceleraţiile respective şi prin urmare la scurgerea unui interval de timp. Din contră, dinamismul fiind un alt aspect al realităţii materiale, constatăm că massele şi acceleraţiile apar simultaneu, scurgerea de timp este legată deci de materie prin mişcarea acesteia ca un „ceva" foarte natural, lipsit de „misticism", această veche idee a unui timp misterios şi antropomorfă haină a tuturor noţiunilor noastre izvorîte dintr'o experienţă ancestrală. In *concepţia de cauzalitate* [2]) a lui ERNST MACH se întroduce astfel, prin *principiul dependenţei reciproce*, în locul succesiunii regulate în timp, *simultaneitatea relaţiilor dintre fenomene*, un nou atribut temporal al cauzalităţii, care în acelaş timp pretinde ca noţiunea abstractă de timp a mecanicei clasice să fie considerată ca un aspect al realităţii materiale, fixându-i astfel aspectul său fizic, în locul celui metafizic. Un pas însemnat făcut în sensul evoluţiei conceptelor a lui AUGUSTE COMTE.

De aici urmează un lucru de mare importanţă şi anume că *determinismul* rămâne şi pe mai departe substratul de bază al concepţiei ştiinţifice asupra realităţii, a *Universului material în continuă prefacere;* doar „cauzalitatea" se schimbă, se perfecţionează, graţie progresului.

2⁰. **Timpul absolut şi timpul relativist.** Admiţând fie valabilitatea principiului clasic al cauzalităţii, fie principiul dependenţei reciproce a lui MACH rămânem deci în domeniul determinismului, un „determinism destul de rigid încă" după expresia lui MEYERSON [3]).

Acest „determinism rigid" impune deci din punct de vedere cauzal şi temporal studiul proprietăţilor de succesiune în timp ale

---

1) R. ROUVIER: *La pensée d'Ernst Mach* — Ed. J. Vrin, Paris, 1923.

2) T. VESCAN: *Din problemele filosofiei ştiinţelor II, Principiul cauzalităţii la Ernst Mach — «O lume nouă»* Cluj, Oct. 1932.

3) *De l'explication dans les sciences;* operă fundamentală editată de J. Vrin, Paris.

fenomenelor. In acest sens putem vorbi de *ulterioritatea* şi de *simultaneitatea* unui eveniment X faţă de un alt eveniment Y, cu care stă în relaţii de determinare, într'un „raport cauzal".

Este interesant de remarcat că aceste două „aspecte" ale noţiunii de timp au fost *relevate* în special de *teoria relativităţii* a lui EINSTEIN şi au fost matematizate [1]), în consecinţă.

Să considerăm deci un sistem de referinţă, definit prin cele patru coordonate x, y, z şi t, unităţile de măsură fiind alese în aşa fel încât să fie acceptabile pentru scurgerea fenomenelor vitale, în sistemul *xyzt*.

Vom spune că un fenomen constituie în raport cu sistemul *xyzt* un eveniment unic bine definit, când coordonatele tuturor punctelor acelui fenomen vor putea satisface relaţiilor

$$(1)\quad \begin{cases} a_1 \leqslant x \leqslant b_1 \ , \quad a_2 \leqslant y \leqslant b_2 \ , \quad a_3 \leqslant z \leqslant b_3 \\ t = fix \end{cases}$$

unde (a_i, b_i) sunt nişte numere reale finite, măsurate cu unităţile deja alese.

In mecanica clasică [2]), graţie principiilor fundamentale ale logicei, noţiunea de timp absolut se defineşte şi se axiomatizează relativ destul de uşor. In particular pentru două sisteme de observaţie *xyzt* şi XYZT în mişcare uniformă şi rectilinie cu viteza v, ea satisface formulelor de transformare ale lui GALILEU şi NEWTON:

$$(2)\quad \begin{cases} X = x - vt \\ Y = y \\ Z = z \\ T = t. \end{cases}$$

Din acest grup de formule avem mai întâiu *două proprietăţi analoage ale spaţiului şi timpului şi anume:*

I. *Intervalul de timp pentru două evenimente este acelaş pentru orice observator:*

$$t_1 - t_2 = T_1 - T_2.$$

1) Un studiu admirabil al axiomaticei relativiste se găseşte în excelenta carte a lui E. R. NEUMANN: *Vorlesungen zur Einführung in die Relativitätstheorie,* Jena, Ed. G. Fischer, 1922.

2) Ca introducere la această expunere, vezi: T. VESCAN, *Mecanica şi Teoria Relativităţii,* volum publicat la Cluj în 1938.

De exemplu, două evenimente simultanee pentru un sistem de coordonate *xyzt* sunt simultanee pentru orice alt sistem XYZT.

II. *Distanța în spațiu a două evenimente simultanee* ($t_1 = t_2$) este aceeaș:

$$X_1 - X_2 = x_1 - vt_1 - (x_2 - vt_2) = x_1 - x_2$$

pentru orice sistem de referință; lungimile se conservă; și pe urmă o altă *proprietate de disimetrie:*

III. *Intervalul de timp a două evenimente succesive este invariabil cu observatorul:*

$$t_1 - t_2 = T_1 - T_2,$$

până când distanța lor în spațiu variază cu aceasta. Exemplul dat de LANGÉVIN ne învederează acest lucru: dintr'o fereastră a unui vagon în mișcare lăsăm să cadă pe terasament, la intervale egale de timp, niște obiecte. Distanțele în spațiu ale căderilor obiectelor (adică ale unor evenimente succesive) sunt în raport cu un observator de pe tren egale cu zero (doar pornesc din aceeaș fereastră a vagonului) până când în raport cu un observator de pe terasament sunt diferite puncte ale traseului, așezate la distanțe egale, dacă trenul are o iuțeală constantă.

Grupul lui LORENTZ-EINSTEIN

$$(3) \qquad \begin{cases} X = \alpha(x - vt) \\ Y = y \\ Z = z \\ T = \alpha\left(t - \dfrac{vx}{c^2}\right) \end{cases} \qquad \text{cu } \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

face să dispară această *disimetrie* dintre:

invariabilitatea duratei a două evenimente succesive

și

variabilitatea distanței a două evenimente succesive.

Intr'adevăr, după formulele lui LORENTZ propoziția I nu mai este adevărată, intervalul de timp a două evenimente depinde de observator, de exemplu două evenimente simultanee pentru un grup de observatori:

$$(3a) \qquad x_1 \neq x_2 \quad , \quad \text{dar } t_1 = t_2$$

nu mai sunt simultanee pentru un alt grup de observatori:

$$(3b) \qquad T_1 - T_2 = \frac{\alpha v}{c^2}(x_2 - x_1) \neq 0.$$

Simultaneitățile nu se conservă.

Tot din formulele lui LORENTZ mai rezultă și faptul că propoziția III de disimetrie încă nu este adevărată. Pentru două evenimente succesive, avem atât

$$t_1 - t_2 \neq T_1 - T_2 \quad \text{cât și} \quad x_1 - x_2 \neq X_1 - X_2$$

adică ambele distanțe variază cu observatorul. Se pune prin urmare întrebarea: de ce totuși în fizica clasică nu s'a observat decât variabilitatea distanței? nu și a duratei? Răspunsul e ușor, este vorba de o aproximație, valabilă în condițiile noastre experimentale, însă departe de a exprima realitatea:

Aruncând o privire asupra formulelor lui LORENTZ observăm numaidecât următoarele: până când la X împărțim, din cauza lui α, ambele coordonate cu radicalul și deci aproximația este aceeași pentru aceste două elemente ale lui X, până atunci la T variabila x o mai împărțim și cu c^2, deci aproximația la t este mult mai bună și este foarte greu de constatat o deosebire între $(t_1 - t_2)$ și $(T_1 - T_2)$ pentru două evenimente succesive până când deosebirea între $(X_1 - X_2)$ și $(x_1 - x_2)$ este de domeniul experienței zilnice (experiența teoretică descrisă mai înainte, a lui LANGÉVIN, o dovedește îndeajuns aceasta). Intuiția, bazată pe simțul comun și pe experiența milenară a înaintașilor noștri s'a folosit cu suficientă aproximație de formulele lui GALILEU și NEWTON, sub forma invariabilității duratei și a distanțelor, pentru ca apoi la fondarea mecanicei aceasta să pară o consecință logică a experimentului. Nimic nu este mai clar că aceste formule nu pot fi decât o primă aproximație a realității, suficientă din punct de vedere practic uman, din punctul de vedere al transformărilor și mișcărilor mijlocii. Grupul lui LORENTZ este de o a doua aproximație, valabilă experiențelor extreme, cu viteze mari și viitorul ne rezervă altele și altele, probabil și mai apropiate de realitate.

Să mai observăm încă și faptul paradoxal că nici propoziția II nu se conservă. In ipoteza (3 *a*) vom avea într'adevăr, după (2):

$$(3c) \qquad X_1 - X_2 = \alpha (x_1 - x_2).$$

Lungimile sunt deci relative, sunt cu totul altele — văzute dintr'un sistem în mişcare faţă de ele. Aici iar nu se găseşte nimic misterios, toată chestiunea este o aparenţă optico-mecanică, deoarece lungimile se vor considera întotdeauna intrinsec adică raportate la imobilitatea lor.

De altfel chestiunea aceasta a măsurării lungimilor este strâns legată de axiomatica relativistă a timpului.

Să presupunem pentru, fixarea ideilor, că vrem să măsurăm c, viteza luminii. Aşezăm doi observatori la capetele unei linii de lungime s şi notăm intervalul de timp t dintre plecarea unui semnal luminos dela un capăt al liniei şi sosirea lui la celălalt capăt şi avem: $c = s/t$.

Această măsurare presupune următoarele:

I. Lumina se propagă mereu în acelaşi fel în toate porţiunile unui mediu.

II. Se cunoaşte lungimea s.

III. Cele două oroloage aşezate la capete umblă la fel, au putut fi sincronizate şi deci ne dau intervalul de timp t.

Prima ipoteză se poate admite din motive de simetrie, a propagării luminii: unda luminoasă n'are niciun motiv de neomogeneitate de situaţie pentru ca să-şi schimbe propagarea (exceptând cazul când ar fi de natură corpusculară şi în plus şi-ar micşora viteza printr'o anumită frecare faţă de mediul de propagare).

Cunoaşterea lungimii s, ne pretinde însă, în ultima analiză, tocmai cunoaşterea vitezei luminii. Intr'adevăr, pentru a avea lungimea s sau ar trebui să purtăm o riglă gradată de lungime unitară (prin definiţie) dealungul liniei, văzând de câte ori încape în ea (deci: ar trebui să presupunem că lungimea riglei nu variază cu timpul în deplasarea sa, ceea ce se poate constata făcând iar numai o măsurare de lungime,...) sau ar trebui să măsurăm intervalul de timp dela sosirea a două semnale luminoase pornite la un moment dat din cele două capete ale liniei s şi cunoscând viteza luminii să evaluăm distanţa s. Printr'un raţionament analog se constată că aflarea unui interval de timp cere cunoaşterea unei lungimi şi a vitezei luminii.

Suntem prin urmare într'un cerc vitios.

Acest cerc vitios dispare prin relativitate, care presupunând dată viteza luminii (aceeaşi pentru toate sistemele $xyzt$ în mişcare

reciprocă rectilinie şi uniformă ale unui mediu omogen) rezolvă contradicţia. In acest sens afirmarea faptului constanţei vitezei pentru toate sistemele de referinţă se reduce la observaţia experimentală că unicul mijloc de a ne defini lungimile şi a sincroniza oroloagiile este calea undelor luminoase sau mai general ale celor electromagnetice şi pentru ele trebue să admitem principiul relativităţii.

In sfârşit, necesitatea de a face să dispară disimetria cauzată prin propoziţiile I, II şi III ataşate de mecanica clasică noţiunilor de timp şi de spaţiu se reduce la o constatare geometrică. Scriind-o, legea de propagare a luminii

$$s = ct$$

sub forma

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

unde

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = ict,\ i = \sqrt{-1},\ s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

MINKOWSKI a relevat faptul că timpul joacă rolul unei coordonate echivalente celorlalte trei, într'o lume de „reprezentare“ ale proprietăţilor fizice, cu patru dimensiuni, şi deci nu poate avea alte legi de comportare decât acestea.

Lucru remarcabil, timpul ca un aspect al cauzalităţii, al determinismului material al fenomenelor, se clarifică prin relativitate şi reacţionează asupra ideei generatoare de cauzalitate: deoarece trecerea dela cauză la efect, după un „determinism rigid“ nu poate avea loc decât, sau numai în mod simultan sau numai în mod succesiv şi fiindcă simultaneităţile şi duratele timpurilor nu sunt aceleaşi pentru diferitele sisteme de referinţă în relativitate, de aceea dintr'o succesiune în timp pentru un sistem de observatori putem avea o simultaneitate sau chiar o succesiune inversă pentru un alt sistem de observatori, şi prin urmare o schimbare radicală a raporturilor de cauzalitate, care trebue să fie studiate cu o nouă şi extremă precauţie. Avem de a face aici cu un aspect cu totul dialectic al realităţii şi al evoluţiei.

(Va urma) T. VESCAN.

ASUPRA UNEI TEOREME A DOMNULUI GENERAL GH. BUICLIU

D-l GENERAL GH. BUICLIU a demonstrat[1]) următoarea teoremă:

O dreaptă Δ *taie laturile* AB, AC *ale unui triunghiu* ABC *în* C', B'. *Fie* D *proecția lui* A *pe* Δ *și* E *intersecția lui* BB' *cu* CC'. *Să se arate că dacă* Δ, B, C *rămân fixe atunci* DE *trece printr'un punct fix, oricare ar fi* A *în plan.*

Notând cu B_1, C_1 proecțiile punctelor B și C pe Δ, s'a demonstrat [1]), că punctul fix din enunțul teoremei este chiar intersecția dreptelor BC_1, CB_1.

S'a demonstrat la locul citat ca o generalizare că proprietatea se menține când AD_1 BB_1, CC_1 sunt paralele, fără a fi perpendiculare pe Δ.

Pentru nevoile demonstrațiilor ce urmează, vom da teoremei citate a D-lui G-L GH. BUICLIU următorul enunț:

Dacă pe laturile AC *și* AB *ale unui triunghiu* ABC *se iau punctele* B' *și* C' *și apoi se proectează punctele* A, B' *și* C' *în* P, Q, R *pe latura* BC, *intersecțiile diagonalelor patrulaterelor* BC'B'C, RC'B'Q *și punctul* P *sunt colineare.*

Această teoremă este un caz particular al următoarei teoreme:

Se consideră un triunghiu ABC și un alt triunghiu A'B'C', punctul A' fiind arbitrar, B' pe latura AC și C' pe latura AB. Dreptele AA', A'B', A'C' întâlnesc latura BC în punctele P, Q, R. *Intersecțiile diagonalelor patrulaterelor* BC'B'C, RC'B'Q *și punctul* P *sunt colineare.*

Demonstrația acestei teoreme se face ușor cu ajutorul teoremelor binecunoscute [2]) asupra triunghiurilor omologice. Și anume:

Dacă laturile a două triunghiuri $\alpha\beta\gamma\ \alpha'\beta'\gamma'$ *se tae două câte două în punctele* λ, μ, ν *situate în linie dreaptă, dreptele* $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ *care unesc vârfurile opuse, sunt concurente și reciproc.*

---

1) G-RAL GH. BUICLIU *Revista Matematică din Timișoara*, Anul XIV, 1934, p. 84.

2) A se vedea de ex: B. NIEWENGLOWSKI. *Cours de géométrie analytique.* Tome I, 1894, p. 107.

Intr'adevăr să considerăm perechile de triunghiuri

$$\begin{matrix} A\ R\ Q \\ P\ C'\ B' \end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix} A\ C'\ Q \\ P\ R\ B' \end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix} A\ R\ B' \\ P\ C'\ Q \end{matrix}$$

care sunt omologice, pentrucă dreptele AP, RC', QB' sunt concurente în punctul A'.

Dacă notăm cu t, u, v, w intersecţiile dreptelor (C'Q, RB'); (AQ, PB'); (AR, PC'); (RQ, C'B') rezultă că punctele u, v, w; t, u, B; t, C, v sunt colineare.

Să considerăm acum triunghiurile PC'B', tCB care sunt omologice pentru că laturile (B'C', CB), (PB', tB), (PC', tC) se taie în punctele w, u, v care sunt colineare.

Rezultă că dreptele Pt, CC', BB' sunt concurente şi teorema este demonstrată.

Dacă facem ca punctul A' să fie la infinit într'o direcţie perpendiculară pe BC se obţine teorema D-lui GENERAL GH. BUICLIU.

Un alt caz particular este următorul:

Să considerăm triunghiurile ABC, $A_1B_1C_1$, laturile BC şi B_1C_1 fiind aşezate pe o aceeaşi dreaptă Δ, iar dreapta AA_1 fiind paralelă cu Δ. Să notăm cu B' intersecţia dreptelor AC, A_1C_1 şi cu C' intersecţia dreptelor AB, A_1B_1.

Dreapta care uneşte punctul de întâlnire al diagonalelor patrulaterului BC'B'C *cu punctul de întâlnire al diagonalelor patrulaterului* $B_1C'B'C_1$ *este paralelă cu* Δ.

Intr'adevăr dreapta precedentă trebue să treacă prin intersecţia dreptelor AA_1 şi Δ care fiind paralele, va fi paralelă cu ele.

* * *

In acest articol vreau să mai dau şi o generalizare în spaţiu teoremei precedente.

Să considerăm un tetraedru SABC şi pe muchiile SA, SB, SC să luăm punctele A', B', C', pe urmă să unim un punct arbitrar S' cu punctele S, A, B, C şi să luăm intersecţia acestor drepte cu planul ABC; se va obţine astfel punctele P, A_1, B_1, C_1. Se notează cu I intersecţia planelor AB'C', BC'A', CA'B' şi cu I_1 intersecţia planelor $A_1B'C'$, $B_1C'A'$, $C_1A'B'$. *Punctele* P, I, I_1 sunt colineare.

Voiu face demonstrația acestei teoreme cu ajutorul calculului vectorial.

Să notăm:

$$\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{u} \quad , \quad \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{v} \quad , \quad \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{w}$$

și

$$\frac{\overline{A'S}}{\overline{A'A}} = \alpha \quad , \quad \frac{\overline{B'S}}{\overline{B'B}} = \beta \quad , \quad \frac{\overline{C'S}}{\overline{C'C}} = \gamma.$$

Este ușor de văzut că

$$\overrightarrow{SA'} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}\overrightarrow{u} \quad , \quad \overrightarrow{SB'} = \frac{\beta}{\beta - 1}\overrightarrow{v} \quad , \quad \overrightarrow{SC'} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\overrightarrow{w}.$$

Un punct oarecare I_a din planul AB'C' este determinat de vectorul

$$\overrightarrow{SI_a} = \overrightarrow{SA} + \lambda\overrightarrow{AB'} + \mu\overrightarrow{AC'}$$

unde λ, μ sunt parametrii arbitrari.

Formula precedentă se mai scrie

$$(1) \qquad \overrightarrow{SI_a} = \overrightarrow{u} + \lambda\left(\frac{\beta}{\beta - 1}\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}\right) + \mu\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}\overrightarrow{w} - \overrightarrow{u}\right).$$

La fel se vede că un punct I_b din planul BC'A' este determinat de vectorul

$$(2) \qquad \overrightarrow{SI_b} = \overrightarrow{v} + \lambda'\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}\overrightarrow{w} - \overrightarrow{v}\right) + \mu'\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\right)$$

și un punct I_c din planul CA'B' este determinat de vectorul

$$(3) \qquad \overrightarrow{SI_c} = \overrightarrow{w} + \lambda''\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}\right) + \mu''\left(\frac{\beta}{\beta - 1}\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}\right).$$

Punctul de intersecție I al planelor AB'C', BC'A', CA'B' este reprezentat prin una din formulele unde parametrii λ, μ, λ', μ', λ'', μ'' au valori astfel alese ca aceste formule să fie identice.

Trebue deci ca acești parametrii să satisfacă la următoarele ecuații:

$$1 - \lambda - \mu = \mu' \frac{\alpha}{\alpha - 1} = \lambda'' \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

$$1 - \lambda' - \mu' = \mu'' \frac{\beta}{\beta - 1} = \lambda \frac{\beta}{\beta - 1}$$

$$1 - \lambda'' - \mu'' = \mu \frac{\gamma}{\gamma - 1} = \lambda' \frac{\gamma}{\gamma - 1}.$$

Rezolvând acest sistem de ecuații în raport cu λ, μ, λ', μ', λ'', μ'' se găsește fără greutate

$$\lambda = \frac{\beta - 1}{\alpha + \beta + \gamma - 2}$$

$$\mu = \frac{\gamma - 1}{\alpha + \beta + \gamma - 2}$$

și prin urmare

$$\overrightarrow{SI} = \frac{\alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v} + \gamma \overrightarrow{w}}{\alpha + \beta + \gamma - 2}. \tag{4}$$

Formula aceasta arată că I *este baricentrul maselor proporționale cu* -2, α, β, γ *și plasate în punctele* S, A, B, C.

Să notăm

$$\overrightarrow{SS'} = l\overrightarrow{u} + m\overrightarrow{v} + n\overrightarrow{w}$$

și

$$\frac{\overline{A'S'}}{\overline{A'A_1}} = \alpha_1, \qquad \frac{\overline{B'S'}}{\overline{B'B_1}} = \beta_1, \qquad \frac{\overline{C'S'}}{\overline{C'C_1}} = \gamma_1.$$

Observăm că

$$\overrightarrow{S'A'} = \overrightarrow{SA'} - \overrightarrow{SS'} = \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} - l\right)\overrightarrow{u} - m\overrightarrow{v} - n\overrightarrow{w}.$$

Pe de altă parte scriind că

$$\overrightarrow{SA_1} = \overrightarrow{SS'} + \lambda \overrightarrow{S'A'}$$

vom avea identitatea

$$l\overrightarrow{u} + m\overrightarrow{v} + n\overrightarrow{w} + \lambda\left[\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} - l\right)\overrightarrow{u} - m\overrightarrow{v} - n\overrightarrow{w}\right]$$

$$= \overrightarrow{u} + k_1(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}) + k_2(\overrightarrow{w} - \overrightarrow{u})$$

de unde rezultă ecuațiile

$$l + \lambda\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} - l\right) = 1 - k_1 - k_2$$

$$m - \lambda m = k_1$$

$$n - \lambda n = k_2$$

de unde rezultă că avem:

$$\lambda = \frac{1-(l+m+n)}{\frac{\alpha}{\alpha-1}-(l+m+n)}$$

λ fiind determinat, rezultă că avem

$$\vec{A'A_1} = \vec{S'A_1} - \vec{S'A'} = (\lambda - 1)\,\vec{S'A'}$$

sau

$$\vec{A'A_1} = \frac{\frac{1}{\alpha-1}}{\frac{\alpha}{\alpha-1}-(l+m+n)}\,\vec{A'S'}.$$

Identificând relaţia aceasta cu

$$\frac{\overline{A'S'}}{\overline{A'A_1}} = \alpha_1$$

rezultă că

$$\alpha_1 = \alpha - (\alpha-1)(l+m+n) \tag{5}$$

şi la fel se demonstrează că

$$\beta_1 = \beta - (\beta-1)(l+m+n)$$
$$\gamma_1 = \gamma - (\gamma-1)(l+m+n). \tag{5}$$

Să mai notăm

$$\vec{u_1} = \vec{S'A_1} = \lambda\,\vec{S'A'} \quad , \quad \vec{v_1} = \vec{S'B_1} \quad , \quad \vec{w_1} = \vec{S'C_1}.$$

Din calculele precedente rezultă că:

$$\vec{u_1} = \frac{1-(l+m+n)}{\frac{\alpha}{\alpha-1}-(l+m+n)}\left[\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}-l\right)\vec{u} - m\vec{v} - n\vec{w}\right] \tag{6}$$

şi la fel se arată că:

$$\vec{v_1} = \frac{1-(l+m+n)}{\frac{\beta}{\beta-1}-(l+m+n)}\left[-l\vec{u} + \left(\frac{\beta}{\beta-1}-m\right)\vec{v} - n\vec{w}\right]$$

$$\vec{w_1} = \frac{1-(l+m+n)}{\frac{\gamma}{\gamma-1}-(l+m+n)}\left[-l\vec{u} - m\vec{v} + \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}-n\right)\vec{w}\right].$$

Punctul I_1, intersecția planelor $A_1B'C'$, $B_1C'A'$, $C_1A'B'$ este dat de formula analoagă cu (4), adică

$$\vec{S'I_1} = \frac{\alpha_1 \vec{u_1} + \beta_1 \vec{v_1} + \gamma_1 \vec{w_1}}{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - 2}.$$

Inlocuind pe α_1, β_1, γ_1 cu formulele (5) și pe u_1, v_1, w_1 cu formulele (6) vom avea

$$(7)\quad \vec{S'I_1} = \frac{[1-(l+m+n)][\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} - (\alpha+\beta+\gamma-3)(l\vec{u} + m\vec{v} + n\vec{w})]}{(\alpha+\beta+\gamma-2)[1-(l+m+n)] + (l+m+n)}.$$

In sfârșit să mai determinăm și punctul P scriind identitatea

$$\vec{SP} = \mu(l\vec{u} + m\vec{v} + n\vec{w}) = \vec{u} + h_1(\vec{v} - \vec{u}) + h_2(\vec{w} - \vec{u})$$

avem ecuațiile

$$\mu l = 1 - h_1 - h_2$$

$$\mu m = h_1$$

$$\mu n = h_2$$

de unde rezultă că

$$\mu = \frac{1}{l+m+n},$$

adică

$$(8)\quad \vec{SP} = \frac{l\vec{u} + m\vec{v} + n\vec{w}}{l+m+n} = \frac{\vec{SS'}}{l+m+n}.$$

Ținând seama de formulele (4), putem scrie formula (7) sub forma

$$\vec{S'I_1} = \frac{[1-(l+m+n)][(\alpha+\beta+\gamma-2)\vec{SI} - (\alpha+\beta+\gamma-3)\vec{SS'}]}{[1-(l+m+n)](\alpha+\beta+\gamma-2) + (l+m+n)}$$

Se deduce din

$$\vec{SI_1} = \vec{SS'} + \vec{S'I_1}$$

că

$$\vec{SI_1} = \frac{[1-(l+m+n)](\alpha+\beta+\gamma-2)\vec{SI} + \vec{SS'}}{[1-(l+m+n)](\alpha+\beta+\gamma-2) + (l+m+n)}$$

sau ţinând seamă de formula (8), avem

$$(9)\quad \overrightarrow{SI_1} = \frac{(\alpha+\beta+\gamma-2)(1-l-m-n)\overrightarrow{SI} + (l+m+n)\,SP}{(\alpha+\beta+\gamma-2)(1-l-m-n) + (l+m+n)}$$

Formula aceasta arată că I_1 este baricentrul maselor $l+m+n$ $(\alpha+\beta-2)$ $(1-l-m-n)$ plasate în punctele P şi I şi prin urmare punctele I_1, I, P sunt colineare. Teorema noastră este deci demonstrată.

Să semnalăm un caz particular interesant.

Să considerăm două tetraedre SABC, $S'A_1B_1C_1$ *care au bazele* ABC, $A_1B_1C_1$ *pe acelaşi plan* π *vârfurile* S *şi* S' *fiind astfel ca dreapta* SS' *să fie paralelă cu planul* π, *iar muchiile* SA, $S'A_1$ *se întâlnesc în* A', *muchiile* SB, $S'B_1$ *se întâlnesc în* B', *muchiile* SC, $S'C_1$ *se întâlnesc în* C'. *Dacă se notează cu* I *intersecţia planelor* AB'C', BC'A', CA'B' *şi cu* I_1 *intersecţia planelor* $A_1B'C'$, $B_1C'A'$, $C_1A'B'$, *dreapta* II_1 *este paralelă cu dreapta* SS'.

Intr'adevăr punctele I şi I_1 trebue, după teorema precedentă, să fie colineare cu punctul P, intersecţia lui SS' cu planul π care în acest caz este la infinit.

Calculele precedente ne permit însă să aducem o preciziune mai mare.

Să notăm ca mai sus

$$\frac{\overline{A'S}}{\overline{A'A}} = \frac{\overline{A'S'}}{\overline{A'A_1}} = \frac{\overline{SS'}}{\overline{AA_1}} = \alpha$$

$$\frac{\overline{B'S}}{\overline{B'B}} = \frac{\overline{B'S'}}{\overline{B'B_1}} = \frac{\overline{SS'}}{\overline{BB_1}} = \beta$$

$$\frac{\overline{C'S}}{\overline{C'C}} = \frac{\overline{C'S'}}{\overline{C'C_1}} = \frac{\overline{SS'}}{\overline{CC_1}} = \gamma$$

şi

$$\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{u}\ ,\quad \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{v}\ ,\quad \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{w}$$

$$\overrightarrow{SA_1} = \overrightarrow{u_1}\ ,\quad \overrightarrow{SB_1} = \overrightarrow{v_1}\ ,\quad \overrightarrow{SC_1} = \overrightarrow{w_1}.$$

Scriind că conturul de vectori $\vec{SA}$, $\vec{AA_1}$, $\vec{A_1S'}$, $\vec{S'S}$ este închis avem

$$\vec{u} + \frac{1}{\alpha}\vec{SS'} - \vec{u_1} + \vec{S'S} = 0$$

de unde rezultă că

$$\vec{u_1} = u + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\vec{SS'}. \tag{10}$$

La fel se arată că

$$\vec{v_1} = \vec{v} + \left(\frac{1}{\beta} - 1\right)\vec{SS'}$$

$$\vec{w_1} = \vec{w} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\vec{SS'}.$$

Aplicând formula (4) avem

$$\vec{SI} = \frac{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}}{\alpha + \beta + \gamma - 2}$$

$$\vec{S'I_1} = \frac{\alpha\vec{u_1} + \beta\vec{v_1} + \gamma\vec{w_1}}{\alpha + \beta + \gamma - 2}.$$

Inlocuind pe $\vec{u_1}$, $\vec{v_1}$, $\vec{w_1}$ deducem că

$$\vec{S'I_1} = \vec{SI} + \frac{3 - (\alpha + \beta + \gamma)}{\alpha + \beta + \gamma - 2}\vec{SS'} \tag{11}$$

şi ţinând seama că

$$\vec{SI_1} = \vec{SS'} + \vec{S'I_1}$$

se deduce că

$$\vec{SI_1} = \vec{SI} + \frac{\vec{SS'}}{\alpha + \beta + \gamma - 2}$$

sau

$$\vec{II_1} = \frac{\vec{SS'}}{\alpha + \beta + \gamma - 2}. \tag{12}$$

Formulele (10) se pot deduce şi ca un caz particular din formulele (6) căci dacă SS' este paralel cu planul ABC, atunci

$$l + m + n = 0.$$

Deasemenea formula (11) se deduce din formula (7) când facem

$$l + m + n = 0.$$

Formula (12) arată nu numai că $\overrightarrow{II_1}$ este paralel cu $\overrightarrow{SS'}$, dar şi că raportul segmentelor $\overline{II_1}$, $\overline{SS'}$ este independent de poziţia lui S' în planul dus prin S paralel cu planul ABC.

Se mai poate vedea din formula (9) că *dacă punctele* S, A, B, C, A', B', C' *sunt fixe, iar punctul* S' *este variabil într'un plan paralel cu planul* ABC, *locul geometric al punctului* I_1 *este un plan paralel cu planul* ABC.

Intr'adevăr dacă S' este variabil într'un plan paralel cu planul ABC şi care nu trece prin S, atunci

$$l + m + n = k$$

k fiind o constantă diferită de zero.

Formula (9) arată că:

$$\frac{\overrightarrow{I_1P}}{\overline{I_1I}} = (\alpha + \beta + \gamma - 2)\frac{k-1}{k}.$$

Punctul I fiind fix şi P descriind planul ABC, urmează că punctul I_1 va descrie un plan paralel cu planul ABC.

D. V. IONESCU

Profesor la Facultea de Ştiinţe din Cluj.

DESVOLTAREA UNUI POLINOM ÎNTREG ÎN x ÎN RAPORT CU RĂDĂCINILE SALE

Fie $P(x)$ un polinom întreg în x de gradul n, ale cărui rădăcini fie: $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$.

Desvoltând polinomul după formula lui TAYLOR se ştie că avem:

$$(1) \quad P(x+h) = P(x) + \frac{h}{1}P'(x) + \frac{h^2}{2!}P''(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!}P^{(n)}_{(x)}.$$

Dacă ţinem seama că avem:

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$$

vom avea:

$$P'(x) = P(x)\left[\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \dots \; n \text{ termeni}\right]$$

$$P''(x) = P(x)\left[\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} + \frac{1}{(x-x_1)(x-x_3)} + \dots n(n-1) \text{ termeni}\right]$$

$$P'''(x) = P(x)\left[n(n-1)(n-2) \text{ termeni de forma } \frac{1}{(x-x_\alpha)(x-x_\beta)(x-x_\gamma)}\right]$$

. . . . . .

Cum cele n rădăcini luate câte una ne dau $C_n^1 = n$ combinări, luate câte 2 ne dau: $C_x^2 = \frac{n(n-1)}{2!}$ combinări, câte trei ne dau:

$$C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

combinări, etc. rezultă că termenii lui $P'(x)$ sunt toţi diferiţi, ai lui $P''(x)$ sunt câte $2!$ egali; ai lui $P'''(x)$ sunt câte $3!$ egali; şi atunci vom avea:

$$P'(x) = P(x) \sum \frac{1}{x - x_\alpha}$$

$$P''(x) = 2!\, P(x) \sum \frac{1}{(x - x_\alpha)(x - x_\beta)}$$

$$P'''(x) = 3!\, P(x) \sum \frac{1}{(x - x_\alpha)(x - x_\beta)(x - x_\gamma)}$$

$$\vdots$$

$$P_{(x)}^{(n)} = n!\, P(x) \sum \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)}.$$

Ducând aceste valori în formula (1) găsim:

$$P(x+h) = P(x) + h\,P(x) \sum \frac{1}{x - x_\alpha} + h^2 P(x) \sum \frac{1}{(x-x_\alpha)(x-x_\beta)} + \dots + h^n P(x) \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)},$$

formulă care mai poate fi pusă şi sub forma:

$$\begin{aligned}(2)\quad P(x+h) = P(x) &+ h \sum (x-x_\alpha)\dots(x-x_\lambda) \text{ câte } (n-1) \text{ factori} \\ &+ h^2 \sum (x-x_\alpha)\dots(x-x_\nu) \text{ câte } (n-2) \text{ factori} \\ &\quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ &+ h^{n-1}(x - x_\alpha) \text{ câte un factor} \\ &+ h_n .\end{aligned}$$

Aplicaţii. *Exprimarea câtului şi restului împărţirei unui polinom întreg în x prin* $(x-h)^p$ *cu ajutorul rădăcinilor polinomului.*

Dacă în formula (2) înlocuim pe x cu h şi pe h cu x, găsim:

$$P(x+h)=(h-x_1)(h-x_2)\ldots(h-x_n)+x\Sigma(h-x_\alpha)\ldots(h-x_\lambda);(n-1)\text{ fact.}$$
$$+x^2\Sigma(h-x_\alpha)\ldots(h-x_\nu);(n-2)\text{ fact.}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+x^{n-1}\Sigma(h-x_\alpha)+x^n.$$
$$+x^n.$$

Şi acum dacă înlocuim pe x cu $(x-h)$ avem:

$$(3)\quad P(x)=(h-x_1)(h-x_2)\ldots(h-x_n)+(x-h)\Sigma(h-x_\alpha)\ldots(h-x_\lambda)$$
$$+(x-h)^2\Sigma(h-x_\alpha)\ldots(h-x_\nu)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(x-h)^{n-1}\Sigma(h-x_\alpha)+(x-h)^n.$$

Sub această formă vedem uşor că dacă împărţim polinomul $P(x)$ prin $(x-h)^p$; $(p<n)$ găsim câtul:

$$Q(x)=\Sigma(h-x_\alpha)\ldots(h-x_\pi)\text{ câte }(n-p)\text{ factori}$$
$$+(x-h)\Sigma(h-x_\alpha)\ldots(h-x_m)\text{ câte }(n-p-1)\text{ factori}$$
$$+(x-h)^{n-p}\text{ şi restul:}$$

$$R(x)=(h-x_1)\ldots(h-x_n)+(x-h)\Sigma(h-x_\alpha)\ldots(h-x_\lambda)\text{ câte }(n-1)\text{ fact.}$$
$$+(x-h)^2\Sigma(h-x_\alpha)\ldots(h-x_\nu)\text{ câte }(n-2)\text{ fact.}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(x-h)^{p-1}\Sigma(h-x_\alpha)\ldots(h-x_\eta)\text{ câte }(n-p+1)\text{ fact.}$$

Exemplu. Câtul şi restul împărţirii polinomului:

$$x^3-6x^2+11x-6,$$

care admite rădăcinile 1, 2 şi 3, găsim $(x-4)^2$ vor fi:

$$Q(x)=(4-1)+(4-2)+(4-3)+(x-4)=x+2$$
$$R(x)=(4-1)(4-2)(4-3)+(x-4)[(4-1)(4-2)$$
$$+(4-1)(4-3)+(4-2)(4-3)]$$
$$=6+(x-4)(6+3+2)=11x-38.$$

D. GEORGESCU.
Profesor-Piteşti.

NOTE MATEMATICE

6. *Notă asupra relațiilor multigrade.* 1) In articolul dela pag. 293, *Gazeta Matematică* Vol. XLIV, D-l A. GLODEN a dat, la pag. 295, relația:

$$(1)\quad \begin{cases} 1, 9, 21, 35, 47, 47, 59, 73, 85, 93 \overset{p}{=} \\ 3, 5, 29, 31, 37, 57, 63, 65, 89, 91 \end{cases}$$
$$(p = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).$$

Adunând 1 la fiecare termen și împărțind prin 2 se obține noua relație multigradă.

$$(2)\quad \begin{cases} 1, 5, 11, 18, 24, 24, 30, 37, 43, 47 \overset{p}{=} \\ 2, 3, 15, 16, 19, 29, 32, 32, 45, 46 \end{cases}$$
$$(p = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).$$

Relația (1) se poate obține și în felul următor. Avem:

$$1, 18, 24, 37, 43 \overset{2}{=} 2, 15, 29, 32, 45$$

ușor de verificat. Dacă se pune:

$$s = \frac{16}{41}(1 + 18 + 24 + 37 + 43) = 48$$

se găsește, conform unei teoreme a relațiilor multigrade:

$$1, 18, 24, 37, 43, 48-43, 48-37, 48-24, 48-24, 48-18, 48-1 \overset{p}{=}$$
$$2, 15, 29, 32, 45, 48-45, 48-32, 48-29, 48-15, 48-2$$

care, după efectuarea calculelor și aranjarea termenilor în ordinea crescândă, devine tocmai relația (1).

Relația (1) se reduce la

$$1, 6, 13, 19, 23 \overset{p}{=} 5, 8, 9, 21, 22$$
$$(p = 2, 4, 6).$$

2) La fel relația:

$$1, 9, 21, 47, 55, 59, 83, 93, 115, 117 \overset{p}{=}$$
$$3, 5, 27, 37, 61, 65, 73, 99, 111, 119$$
$$(p = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$$

dela pag. 296, Vol. XLIV duce la

$$1, 5, 11, 24, 28, 30, 42, 47, 58, 59 \overset{p}{=}$$

$$2, 3, 14, 19, 31, 33, 37, 50, 56, 60$$

$$(p = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8).$$

3) In o corespondenţă cu D-l A. GLODEN, mi-am propus să deduc noi relaţii multigrade din o relaţie de forma:

$$A_1, A_2, A_3, A_4 \overset{3}{=} B_1, B_2, B_3, B_4$$

şi am găsit că aceasta se poate prin egalitatea

$$(yA_1 + B_1)(yA_2 + B_2)(yA_3 + B_3)(yA_4 + B_4) \overset{3}{=}$$

$$(yB_1 + A_1)(yB_2 + A_2)(yB_3 + A_3)(yB_4 + A_4)$$

unde y este oarecare.

Concluzii analoage se trag pentru relaţia:

$$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 \overset{5}{=} D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6.$$

A. MOESSNER.

7. *Asupra problemei 3911* [1]).

Soluţia dată acestei probleme la pag. 433, (Vol. XLIV) este greşită, datorită unei simple scăpări din vedere. In adevăr, se cerea să se determine valorile întregi ale lui n, pentru care expresiunea

$$E = 8n^2 - 7n - 1 = (n - 1)(8n + 1)$$

este cub perfect.

Dacă d este cel mai mare divizor comun al numerelor $n - 1$ şi $8n + 1$, punând

$$n - 1 = du \quad , \quad 8n + 1 = dv$$

deci $E = d^2uv$, se conchide că, deoarece u şi v sunt prime între ele, trebue ca d^2, u, v să fie cuburi perfecte, ceea ce nu este exact, deoarece u şi v pot avea, separat, divizori comuni cu d^2.

---

1) Această notă a fost primită la redacţie înaintea aceleea publicată la pag. 636 (Vol. XLIV).

Iată deci cum se poate aborda rezolvarea generală a acestei probleme: Fie

$$d = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3^2 \gamma_1^3 \gamma_2^3 \gamma_3^3,$$

$$u = \alpha_2 \alpha_{22} \beta_2^2 \beta_{22}^2 \gamma_2^3 \gamma_{22}^3,$$

$$v = \alpha_3 \alpha_{33} \beta_3^2 \beta_{33}^2 \gamma_3^3 \gamma_{33}^3,$$

unde α, reprezintă produsul factorilor primi comuni la puterea întâia, β_1^2 produsul factori analogi la puterea a doua, iar γ_1^3 la puterea a treia a numerelor $n-1$ și $8n+1$; α_2, β_2^2, γ_2^3 produse analoage ale factorilor comuni numerelor d și u, iar α_3, β_3^2, γ_3^3 produse analoage pentru d și v; β_{22}^2, β_{33}^2, γ_{22}^3, γ_{33}^3 produse analoage de factori necomuni lui u și v sau lui d. Se înțelege că acei factori primi, conținuți la puteri mai mari ca 3, se găsesc în γ, iar ceea ce prisosește peste puterea multiplu de 3 se găsesc în α sau β. Urmează deci ca α, γ; β, γ pot avea factori comuni dar α, β, γ nu pot avea în același timp un divizor comun. Vom avea deci:

$$E = d^2uv = \alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^3 \beta_1^4 \beta_2^6 \beta_3^6 \gamma_1^6 \gamma_2^9 \gamma_3^9 \alpha_{22} \alpha_{33} \beta_{22}^2 \beta_{33}^2 \gamma_{22}^3 \gamma_{33}^3,$$

ceea ce arată că

$$E_1 = \alpha_1^2 \beta_1 \beta_{22}^2 \beta_{33}^2 \alpha_{22} \alpha_{33}$$

trebue să fie cub perfect. Cum aceşti factori sunt primi între ei, doi câte doi, trebue ca fiecare să fie cub perfect, adică

$$\alpha_1 = \alpha^3 \ , \ \beta_1 = \beta^3 \ , \ \beta_{22} = \lambda^3 \ , \ \beta_{33} = \mu^3 \ , \ \alpha_{22} = a^3 \ , \ \alpha_{33} = b^3.$$

Pe de altă parte, egalitatea, obținută prin eliminarea lui n

$$(\alpha) \qquad d(v - 8u) = 9$$

arată că d poate fi 1, 3, 9. Să examinăm pe rând aceste trei cazuri.

1°. $d = 1$. In acest caz

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1,$$

$$u = a^3 \lambda^6 \gamma_2^3 \gamma_{22}^3 = x^3 \quad , \quad v = b^3 \mu^6 \gamma_3^3 \gamma_{33}^3 = y^3,$$

iar (α) devine

$$y^3 - 8n^3 = 9,$$

care dă soluția întreagă unică, $n = 0$, găsită în soluția citată dela pag. 433.

2^0. $d = 3$. In acest caz

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 3 \quad , \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1,$$

$$u = \alpha_2 a^3 \lambda^6 \gamma_2^3 \gamma_{22}^3 = \alpha_2 x^3 \quad , \quad v = \alpha_3 b^3 \mu^6 \gamma_3^3 \gamma_{33}^3 = \alpha_3 y^3,$$

$$\therefore \quad E = d^2 uv = 9\alpha_2\alpha_3 x^3 y^3.$$

Față de $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 3$, rezultă $\alpha_2\alpha_3 = 3$, $\alpha_1 = 1$, deci $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 3$ sau $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 1$. Aceste cazuri duc, după (α), la una din ecuațiile

$$(\beta) \qquad 3y^3 - 8x^3 = 3 \quad , \quad y^3 - 24x^3 = 3,$$

care trebuesc, separat, rezolvate în numere întregi și pozitive. Prima admite, de ex., soluția $x = 0$, $y = 1$, deci $u = 0$, $v = 3$ care conduce la $n = 1$, soluție a problemei căci $E = 0^3$.

A doua admite soluția $x = 1$, $y = 3$, deci $u = 3$, $v = 27$, care conduc la $n = 10$, soluție a problemei, căci

$$E = (10 - 1)(80 + 1) = 9 \cdot 81 = 9^3.$$

Această soluție este străină ipotezei u și v prime între ele. Locul ei este de fapt la cazul ce urmează, explicația fiindcă a doua ecuație (β) cere $y = 3z$, care astfel se reduce la prima ecuație (γ) ce urmează.

3^0. $d = 3^2$. In acest caz

$$\beta_1\beta_2\beta_3 = 3 \quad , \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1,$$

$$u = a^3 \beta_2^2 \lambda^6 \gamma_2^3 \gamma_{22}^3 = \beta_2^2 x^3 \quad , \quad v = b^3 \beta_3^2 \mu^6 \gamma_3^3 \gamma_{33}^3 = \beta_3^2 y^3,$$

$$\therefore \quad E = d^2 uv = 3^4 \beta_2^2 \beta_3^2 \lambda^3 y^3.$$

Față de $\beta_1\beta_2\beta_3 = 3$, rezultă $\beta_1 = 1$, $\beta_2\beta_3 = 3$, deci $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 3$ sau $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 1$. Aceste cazuri duc, după (α), la una din ecuațiile

$$(\gamma) \qquad 9y^3 - 8x^3 = 1 \quad , \quad y^3 - 72x^3 = 1,$$

care trebuesc rezolvate, separat, în numere întregi și pozitive.

Prima admite soluția $x = y = 1$, regăsind $n = 10$. A doua $x = 0$, $y = 1$, regăsind $n = 1$.

Rezolvarea complectă a problemei 3911 este legată deci de aceea a ecuațiilor (β) și (γ) în numere întregi și pozitive. Observ că și prima ecuație (β) se reduce la a doua ecuație (γ), deoarece trebue $x = 3z$, astfel că rămân de rezolvat numai ecuațiile (γ).

M. G.

8. *Numere interesante cu 10 cifre diferite*[1]) 1°. Pe lângă soluţiile găsite de D-l G-L GH. BUICLIU la pag. 127 şi 241, Vol. XLIV pentru N_3 începând cu 8 şi cu 9, am mai găsit următoarele 38 soluţii:

N_3	N	N_3	N
845 972 160	2 537 916 480	928 654 701	2 785 964 103
846 159 720	2 538 479 160	928 654 710	2 785 964 130
849 702 561	2 549 107 683	928 716 450	2 786 149 350
849 712 560	2 549 137 680	946 581 702	2 839 745 106
854 970 126	2 564 910 378	946 582 170	2 839 746 510
854 970 261	2 564 910 783	950 125 486	2 910 376 458
860 214 597	2 580 643 791	950 182 546	2 910 547 638
870 264 951	2 610 794 853	950 214 586	2 910 643 758
871 264 950	2 613 794 850	950 215 846	2 910 647 538
872 916 450	2 618 749 350	972 015 846	2 916 047 538
892 716 450	2 678 149 350	984 570 216	2 953 710 648
894 710 265	2 684 130 795	984 571 602	2 953 714 806
895 012 647	2 685 037 941	984 572 016	2 953 716 048
895 102 647	2 685 307 941	984 572 160	2 953 716 480
897 014 526	2 691 043 578	984 601 572	2 953 804 716
897 024 615	2 691 073 845	987 014 526	2 961 043 578
897 160 245	2 691 480 735	987 015 246	2 961 045 738
. . . . .	. . . . .	987 024 615	2 961 073 845
902 856 471	2 708 569 413	987 160 245	2 961 480 735
902 865 471	2 708 596 413	. . . . .	. . . . .

2°. La pag. 127, Vol. XLIV, în a doua coloană a soluţiilor trebue înlocuit N = 2 537 916 480 prin N = 2 537 916 048.

ST. CETĂŢEANU.

9. *Asupra problemei 1379.*

In această problemă se cereau coeficienţii desvoltării

$$(1+ax)^{\frac{1}{x}} = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_px^p + \ldots$$

1) Urmare la Nota dela pag. 29 Vol. XLV, *Gazeta Matematică.*

Formula

$$(5)\qquad pA_p+\left[(p-1)+\frac{a^2}{2}\right]A_{p-1}-\frac{a^3}{2.3}A_{p-2}+\frac{a^4}{3.4}A_{p-3}-\ldots$$

$$+\frac{(-1)^{p-1}a^p}{(p-1)p}A_1=\frac{(-1)^p a^{p+1}A_0}{p(p+1)},$$

stabilită de D-l GH. TH. GHEORGHIU în articolul cu acelaşi titlu dela pag. 567—571, permite a se da răspunsul definitiv la chestiune.

In adevăr, dacă în relaţia (5) dăm lui p valorile succesive 1, 2, 3,... p, obţinem un sistem de p ecuaţii lineare şi neomogene cu necunoscutele $A_1, A_2, \ldots A_p$; regula lui CRAMER ne permite a scrie imediat, cu $A_0 = e^a$,

$$A_p=\frac{(-1)^{pa}e}{p!}\begin{vmatrix} \frac{a^{p+1}}{p(p+1)} & (p-1)a+\frac{a^2}{2} & -\frac{a^3}{2.3} & \frac{a^4}{3.4} & \ldots & \frac{(-1)^p a^p}{(p-1)p} \\ -\frac{a^p}{(p-1)p} & p-1 & (p-2)a+\frac{a^2}{2} & -\frac{a^3}{2.3} & \ldots & \frac{(-1)^{p-1}a^{p-1}}{(p-2)(p-1)} \\ \vdots & 0 & p-2 & \ldots & \ldots & \ldots \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (-1)^{p-1}\frac{a}{1.2} & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

M. G.

BIBLIOGRAFIE

American Mathematical Society. Colloquium publications. Vol. XXIV. *Structure of Algebras,* de A. ADRIAN ALBERT. New-York, City 1939.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 45, Nr. 8. August 1939. Menasha, Wis., & New-York.

Pitagora. Revistă de matematici. An. V. Nr. 1. 10 Octomvrie 1939. Rezultatul concursului pe anul IV. O proprietate a curbelor $y = ax^3 + b$ de CEZAR COŞNIŢĂ. Asupra criteriilor de convergentă RAABE de G. G. CONSTANTINESCU. Abonamentul anual 100 lei, pe adresa N. N. MIHĂILEANU. Str. Popa Nan 157. Bucureşti IV.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XIX. Nr. 7-8-9. Septemvrie-Octomvrie-Noemvrie 1939. Trigonometria patratică, partea IV-a (urmare) de V. ALACI.

Suplimentul Gazetei Matematice. An. VI. Nr. 1. 1 Octomvrie 1939. Exerciţii rezolvate şi propuse. Abonamentul 50 lei anual. Calea Griviţei 158. Bucureşti 2.

EVARISTO ARTAZA. *Saneamiento Urbano en la republica Argentina. Provisión de agua y desagües urbanos.* Publicaţiunile facultăţii de ştiinţe fizico-matematice. Nr. 122. Iunie 1939. La Plata. Argentina.

CERERI

287. Urmărind istoria Facultăţii de Ştiinţe din Cluj, aşi dori o clarificare. Este adevărat că D-l D. DESMIREANU, Directorul Institutului internaţional de Agricultură din Roma. Secţia Economia Matematică, este acelaşi cu Doctorul DESMIREANU, fost Conferenţiar al Universităţii din Cluj?

Ce se ştie despre activitatea şi şederea sa în Cluj. Cum a ajuns la Roma, în loc să rămână în ţară la noi?

27 August 1939.

I. C. POPESCU
(Licenţiat în Filosofie al Facultăţii de Litere din Cluj).

Răspuns la Cererea Nr. 283.

Partea III-a a cursului de **Algebră,** publicat de G. I. ROŞIU, tratează numai despre *Rigla de Calcul.* Această parte a apărut în fascicolă separată în 1889 şi are următorul titlu:

Elemente de Algebră | Curs propus la Scóla de fii de Militari din Iaşi | de | G. I. ROŞIU | licenţiat în Matematici şi Profesor | Partea III | Iaşi | Tipo-Litografia H. Goldner, Str. Primăverei | 1889. |

Broşura are 192 pagini tipărite, de 14,5×21,5cm. Ea cuprinde două cărţi: Cartea VI şi Cartea VII, fiecare împărţită în câte patru capitole, având următorul cuprins:

Cartea VI. Linia calculatoare. Capitolul I. Descrierea liniei calculatoare. I. Introducere. II. Linia fixă. Scara părţilor egale. Scara inferioară a liniei ficsă. Scara superioară a liniei ficsă. III. Linia mişcătoare: Scara de pe faţia anterioară. Scara părţilor egale pe faţia de dindărăpt. Scara Tangentelor. Scara Sinurilor. Demonstrarea scărei Tangentelor. Demonstrarea Scărei Sinurilor. Diverse poziţiuni a liniei mişcătoare.

Capitolul II. Teoria liniei calculatoare. I. Numerii cetiţi direct pe instrument cu linia mişcătoare în poziţia directă. II. Numerii cetiţi direct pe instrument cu linia mişcătoare în poziţiune inversă. III. Partea semnificativă. Numărul cifrelor şi cetirea unui număr. IV. Numerii cetiţi direct pe instrument cu linia mişcătoare în poziţiunea directă întoarsă. V. Numerii cetiţi direct pe instrument cu linia mişcătoare în poziţie întoarsă inversă.

Capitolul III. Aplicaţiile liniei calculatoare. I. Operaţiunile cu linia calculatoare. II. Inmulţirea. III. Impărţirea. IV. Proporţia D : A = B : X. V. Patratul unui număr. VI. Rădăcina patrată. VII. Cubul şi rădăcina cubică a unui numer. VIII. Rezoluţiunea triunghiurilor dreptunghice. IX. Diverse calcule.

Capitolul IV. Tablourile formulelor calculabile cu linia calculatoare. (Extrase din „*Teoriea e pratica del regolo calculatore* per QUINTINO-SELLA, Torino [1])".

Cartea VI. Probleme. (Extrase şi prelucrate după GANOT, TARNIER, E. MENU, de S. MESHIER, etc.) *Capitolul I. Probleme asupra densităţilor* (45 probleme). *Capitolul II. Probleme asupra principiului lui* ARCHIMED (13 probleme). *Capitolul III. Probleme asupra presiunii atmosferice* (17 probleme). *Capitolul IV. Probleme asupra echilibrului lichidelor* (3 Probleme) [2]).

I. S. A.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

A. R. FORSYTH. On the present condition of partial differential equations of the second order, as regards formal integration. Roma 1908.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

C. ALASIA. Una transformacion del prof. ALLARDICE. Zazagoza 1900.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

D'ALEMBERT. Traité de Dynamique, 2 vol., Paris, 1921.

G. CALUGARÉANO. Les fonctions polygènes comme intégrales d'équations différentlelles. Extrait.

H. CARTAN. Les groupes de transformations analytiques. Act. Hermann No. 198. Paris, 1935.

B. CHAIT. Essai d'explication des crises économiques par l'économétrie. Act. Hermann No. 650. Paris, 1938.

H. CRAMÉR, P. LÉVY. R. DE MISÈS. Les Sommes et les fonctions de variables aléatoires. Paris 1938.

M. CHARPENTIER. Thèses sur les points de Peano d'un équation différentielle du premier ordre. Cluj. 1931.

J. CHMELAŘ. Le problème allemand en Tchécoslovaquie. Praga, 1936.

---

1) In aceste tablouri sunt date, în afară de formule şi poziţia pe care trebue să o aibă rigla de calcul pentru calcularea formulei şi determinarea numărului de cifre.

2) Toate problemele sunt numerice şi însoţite de soluţia respectivă.

M. DRĂGANU. Sur la Créations des électrons lourds. Cluj, 1939.

R. FORTRAT. Mécanique statistique, Fasc. VI de l'Introduction à l'étude de la physique théorique. Paris, 1927.

C. IACOB. Étude d'un jet gazeux. Extrait. Timişoara, 1937.

AUREL IONESCU. Spectre d'absorbtion de l'acétylène dans l'ultraviolet. Bucureşti 1934.

A. F. MÖBIUS. Das Planetensystem, I. T. v. Astronomie. Berlin, 1916.

S. MUHAMMAD. The Mathematical Theory of a new relativity. 1935.

O. ONICESCU-G. MIHOC. La dépendance statistique, Chaines et familles de chaînes discontinues. Act. Hermann No. 503. Paris, 1937.

CH. PLATRIER. Cinématique des milieux continus. Act. Hermann No. 327. Paris, 1936.

W. SIERPIŃSKI. Note sur une suite universelle d'ensembles dénombrables. Warszawa, 1936.

T. VESCAN. Mecanica şi teoria relativităţii. Cluj, 1938.

W. WEBER. Zum Gleichheitsbegriff in der abstrakten Algebra. Leipzig, 1936.

J. YVON. La théorie statistique des fluides et l'équation d'État. Act Hermann No. 203. Paris, 1935.

Donate de D-l T. VESCAN, Cluj.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1876. *Să se determine un polinom de gradul al treilea cu coeficienţi raţionali, astfel ca expresiunea:*

$$F\left(\frac{7x^2 - 9x - 4}{6}\right)$$

să fie divizibilă prin $F(x)$. *Să se generalizeze.*

T. LALESCU.

Fie $f(x) \equiv ax^2 + bx + c$ polinomul dat de gradul al doilea cu coeficienţii a, b, c raţionali şi $F(x) \equiv x^3 + p_1x^2 + p_2x + p_3$ polinomul de gradul al treilea, cu coeficienţi raţionali, ce urmează a fi determinat astfel ca să avem:

$$F\left[\frac{f(x)}{k}\right] \equiv \varphi(x) \cdot F(x), \qquad (1)$$

k fiind un număr raţional. Urmează din egalitatea identică (1) că $\varphi(x)$ este deasemenea un polinom de gradul al treilea cu coeficienţi raţionali.

Observăm că pentru valorile lui x pentru care avem $f(x) = kx$, trebue să avem $\varphi(x) \equiv 1$, cu alte cuvinte $\varphi(x) - 1$ se anulează pentru rădăcinile ecuaţiunii $f(x) - x = 0$ (2), de unde rezultă că:

$$\varphi(x) \equiv 1 + (\alpha x + \beta)\,[f(x) - kx] \qquad (3)$$

α, β fiind două numere raţionale ce urmează a fi determinate. Identitatea (1) scrisă desvoltat devine, deci:

$$\frac{1}{k^3}[ax^2 + bx + c]^3 + \frac{p_1}{k^2}[ax^2 + bx + c]^2 + \frac{p^2}{k}[ax^2 + bx + c] + p_3$$

$$\equiv \{1 + (\alpha x + \beta)\,[f(x) - kx]\}\,(x^3 + p_1 x^2 + p_2 x + p_3);$$

sau încă:

$$\frac{1}{k^3}[(ax^2 + bx + c)^3 - k^3 x^3] + \frac{p_1}{k^2}[(ax^2 + bx + c)^2 - k^2 x^2]$$

$$+ \frac{p_2}{k}[(ax^2 + bx + c) - kx]$$

$$\equiv (\alpha x + \beta)\,[ax^2 + (b - k)\,x + c]\,(x^3 + p_1 x^2 + p_2 x + p_3)$$

şi observând că ambii membri sunt divizibili cu polinomul

$$ax^2 + (b - k)\,x + c,$$

deducem prin simplificare relaţia:

$$\frac{1}{k^3}[(ax^2 + bx + c)^2 + kx\,(ax^2 + bx + c) + k^2 x^2]$$

$$+ \frac{p_1}{k^2}[ax^2 + (b + k)\,x + c] + \frac{p_2}{k} \equiv (\alpha x + \beta)\,[x^3 + p_1 x^2 + p_2 x + p_3]$$

şi eliminând numitorul k^3, avem:

$$(ax^2 + bx + c)^2 + kx\,(ax^2 + bx + c) + k^2 x^2$$

$$+ p_1 k\,[ax^2 + (b + k)\,x + c] + p_2 k^2$$

$$\equiv k^3\,(\alpha x + \beta)\,(x^3 + p_1 x^2 + p_2 x + p_3). \qquad (4)$$

Desvoltând calculele şi identificând obţinem pentru determinarea lui p_1, p_2, p_3, α, β următoarele relaţii:

$$\left.\begin{aligned} a^2 = \alpha k^3 \;\;;\;\; a^2 p_1 + \beta k^3 - ak - 2ab = 0 \\ (\beta k^3 - ak) p_1 + a^2 p_2 - (b^2 + bk + k^2 + 2ac) = 0 \\ (bk + k^2) p_1 - \beta k^3 p_2 - a^2 p_3 + 2bc + ck = 0 \\ ckp_1 + k^2 p_2 - \beta k^3 p_3 + c^2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Pentru ca sistemul liniar în p_1, p_2, p_3 să fie compatibil, trebue ca să avem:

$$\begin{vmatrix} a^2 & 0 & 0 & \beta k^3 - ak - 2ab \\ \beta k^3 - ak & a^2 & 0 & -(b^2 + bk + k^2 + 2ac) \\ bk + k^2 & -\beta k^3 & -a^2 & 2bc + ck \\ ck & k^2 & -\beta k^3 & c^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Pentru ca problema să fie deci posibilă, trebue ca numerele date a, b, c, k să fie astfel alese încât ecuaţia de condiţie (6) să determine pentru ca k *cel puţin* o valoare raţională.

Odată această valoare raţională a lui k determinată de ecuaţia (6) cunoscută, trei din ecuaţiile sistemului (5) determină valorile lui p_1, p_2, p_3 şi problema propusă va avea atâtea soluţiuni câte rădăcini raţionale admite ecuaţia (6) în β.

Putem obţine acum câteva cazuri particulare, dând mai dinainte valoarea lui β.

Exemplu luând $\beta = 0$ şi $k = -2b$ ecuaţia (5) devine:

$$\begin{vmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 2ab & a^2 & 0 & -(3b^2 + 2ac) \\ 2b^2 & 0 & -a^2 & 0 \\ -2bc & 4b^2 & 0 & c^2 \end{vmatrix} = 0; \text{ sau } a^2c^2 + 4b^2(3b^2 + 2ac) = 0$$

sau încă:

$a^2c^2 + 4b^2 . ac + 12b^4 = 0$, care dă: $(ac)' = -2b^2$; $(ac)'' = -6b^2$.

Dacă luăm $k = 6 \;\; \therefore \;\; b = -3$, $ac = -18$, deci obţinem un exemplu particular, luând: $a = 9$, $b = -3$, $c = -2$, $k = 6$, pentru care problema are soluţie.

Asemenea luând $k = -2b$ şi $\beta = \frac{a}{4b^2}$ obţinem ecuaţia de condiţie pentru a, b, c devine:

$$\begin{vmatrix} a^2 & 0 & 0 & -2ab \\ 0 & a^2 & 0 & -(3b^2+2ac) \\ 2b^2 & 2ab & -a^2 & 0 \\ -2bc & 4b^2 & 2ab & c^2 \end{vmatrix} = 0, \text{ sau } a^2c^2+12b^2.ac+32b^4=0$$

care dă $ac=-4b^2$ şi $ac=-8b^2$,

luând deci $k=6 \therefore b=-3$, $c=-4$, $a=9$, în care caz cunoaştem anticipat rădăcina raţională $\beta = \frac{1}{4}$. In cazul particular propus, problema are atâtea soluţiuni câte rădăcini raţionale are ecuaţiunea în β corespunzătoare valorilor $a=7$, $b=9$, $c=-4$, $k=6$.

Un început de soluţiune bună pe altă cale, a fost dat de D-l G. G. CONSTANTINESCU (Student, Bucureşti).

O. N. Ţ.

PROBLEMA 3210. *Se consideră o curbă plană* Γ *şi un punct* M *pe această curbă, iar* O *un punct fix în planul ei. Perpendiculara, ridicată în mijlocul lui* OM, *taie normala în* M *la curbă, în punctul* M_1. *Când* M *descrie curba* Γ, M_1 *descrie o curbă* Γ_1. *Să se demonstreze că* Γ_1 *este învelitoarea parabolelor ce au punctul* O *ca focar şi tangenta în* M *la* Γ, *ca directoare.*

A. ANGELESCU.

1. *Soluţie geometrică.* Notăm cu N mijlocul lui OM care va descrie, când M se mişcă în condiţiile problemei, o curbă C omotetică cu Γ. Fie M' un punct vecin lui M pe Γ, N' corespunzătorul său pe C şi P punctul unde NM_1 taie perpendiculara în N' pe OM'. Să considerăm cercul circumscris triunghiului ON'P care atunci când M' tinde către M (adică N' tinde către N) are drept poziţie limită cercul I ce trece prin O, N şi este tangent în N la curba C, adică la tangenta N*t* la această curbă. Poziţia limită a punctului P este la intersecţia cercului I cu perpendiculara dusă în N pe OM. Să arătăm că acest punct este chiar M_1, ceea ce revine la a demonstra că PM este perpendiculară pe tangenta MT

la curba Γ. In adevăr, P fiind situat pe perpendiculara în N pe OM triunghiul OPM este isoscel, şi deci:

$$\text{ungh OMP} = \text{ungh POM} = \frac{1}{2}\,\text{arc PN}.$$

Mai departe, cum Nt este paralelă cu MT rezultă că:

$$\text{ungh OMT} = \text{ungh ON}t = \frac{1}{2}\,\text{arc ON}.$$

Deci:

$$\text{ungh PMT} = \frac{1}{2}\,\text{arc ONP} = 90^0, \text{ deoarece ungh PNO} = 90^0.$$

Dreapta NM_1 este tangentă în M_1 la Γ_1 şi proprietatea din enunţul problemei rezultă imediat folosind o proprietate cunoscută a parabolei care spune că: tangenta în M_1 la parabola având pe O ca focar şi pe MT ca directoare este perpendiculară pe mijlocul dreptei ce uneşte focarul cu proiecţia lui M_1 pe directoare.

Alte soluţii geometrice date de D-nii: B. M. BARBĂLATT, OVIDIU BOLGIU, M. I. FOCŞENEANU, AD. C. GHEORGHIU, GH. D. SIMIONESCU şi I. C. VASILIU.

2. *Soluţie analitică* dată de D-nii: TIBERIU POPOVICIU, AD. C. GHEORGHIU şi CEZAR COŞNIŢĂ. Luăm drept axe două drepte perpendiculare oarecari trecând prin O. Fie:

(1) $y = f(x)$ ecuaţia curbei Γ. Curba Γ_1, adică locul geometric al punctului M_1, va fi definită prin sistemul:

$$(2)\qquad \begin{cases} y = f(x) \\ Y - y = -\dfrac{1}{y'}(X - x) \\ Y - \dfrac{y}{2} = -\dfrac{x}{y}\left(X - \dfrac{x}{2}\right) \end{cases}$$

unde accentul indică operaţia derivării. In sistemul (2), x şi y joacă rolul a doi parametrii legaţi prin relaţia (1). Din acest sistem se poate deduce imediat o reprezentare parametrică a curbei Γ_1.

Ecuaţia parabolei având pe MT ca directoare şi pe O ca focar, se găseşte folosind proprietatea fundamentală a acestei curbe şi este:

$$(3)\qquad (1 + y'^2)(X^2 + Y^2) = [Y - y - y'(X - x)]^2.$$

Infăşurătoarea acestei parabole se obţine eliminând pe x şi y între ecuaţiile (1), (3) şi cea care se capătă din aceasta prin derivare, în raport cu parametrul x:

$$(4) \quad y'(X^2+Y^2) = -(X-x)\,[Y-y-y'(X-x)].$$

(Am simplificat în această ecuaţie cu y'' pe care putem să-l presupunem diferit de zero, deoarece în caz contrar parabola este fixă).

Să arătăm că curba definită de ecuaţiile (1), (3) şi (4) este tocmai curba Γ_1, cu alte cuvinte acest sistem este echivalent cu (2). Intr'adevăr eliminând între (3) şi (4) pe X^2+Y^2 găsim:

$$\frac{1+y'^2}{y'} = \frac{Y-y-y'(X-x)}{-(X-x)};$$

$$(5) \quad X-x+y'(Y-y) = 0.$$

Eliminând între (4) şi (5) pe y' obţinem:

$$(6) \quad x(2X-x)+y(2Y-y) = 0.$$

Sistemul (1), (3), (4) este echivalent cu (1), (5), (6) care este identic cu (2). Proprietatea din enunţ este dovedită.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 3477. *Dacă* M_a *este momentul static polar al laturei* BC *dintr'un triunghiu faţă de vârful* A, *să se arate că avem:*

$$\frac{M_a}{h_a^2}+\frac{M_b}{h_b^2}+\frac{M_c}{h_c^2} = \frac{a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)-2abcp}{8S^2}+L\frac{p}{r}.$$

I. C. VASILIU.

In articolul întitulat *„Momente statice polare“* D-l Prof. I. IONESCU stabileşte la pag. 45, Vol. XVII, *Gazeta Matematică* că *momentul static polar al laturei unui triunghiu în raport cu vârful opus ei este:*

$$M_a = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2a}(b+c)\,[a^2+(b-c)^2]+h_a^2 L\frac{a+b+c}{b+c-a}\right\} \quad (1)$$

în care L este baza logaritmului neperian. Inlocuind în (1) pe

$a+b+c$ şi $b+c-a$ în funcţie de perimetrul $2p$ al triunghiului şi divizând prin h_a^2 obţinem:

$$\frac{M_a}{h_a^2} = \frac{(b+c)[a^2+(b-c)^2]}{4ah_a^2} + \frac{1}{2} L \frac{p}{p-a}$$

$$\therefore \quad \frac{M_a}{h_a^2} = \frac{a(b+c)[a^2+(b-c)^2]}{4a^2h_a^2} + \frac{1}{2} L \frac{p}{p-a} . \qquad (2)$$

In (2) înlocuesc pe ah_a prin $2S$, deci:

$$\frac{M_a}{h_a^2} = \frac{a(b+c)[a^2+(b-c)^2]}{16S^2} + \frac{1}{2} L \frac{p}{p-a} . \qquad (3)$$

Se obţin la fel celelalte două formule analoage cu (3), pe care adunându-le cu (3) şi ţinând seamă de o proprietate cunoscută a logaritmilor, găsim

$$\sum \frac{M_a}{h_a^2} = \frac{\Sigma a(b+c)[a^2+(b-c)^2]}{16S^2} + \frac{1}{2} L \frac{p^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} . \qquad (4)$$

Dar

$$\frac{p^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{p^4}{S^2} = \frac{p^4}{p^2r^2} = \frac{p^2}{r^2}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} L \frac{p^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2} L \frac{p^2}{r^2} = L \frac{p}{r} . \qquad (5)$$

Apoi, este uşor de văzut că:

$$\frac{\Sigma a(b+c)[a^2+(b-c)^2]}{16S^2} = \frac{2\Sigma a^3(b+c) - 2abc(a+b+c)}{16S^2} . \qquad (6)$$

Ducând pe (5) şi (6) în (4) se găseşte tocmai relaţia de demonstrat.

Notă. 1°. In enunţul propus la pag. 119, Vol. XXXII, s'a strecurat o eroare, anume numărătorul primei fracţiuni din membrul al doilea a fost imprimat

$$a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b)$$

ceea ce se vede din soluţie că nu este adevărat. Pentru acest motiv nu menţionez numele celor doi rezolvitori care au reuşit să dovedească relaţiunea aşa cum a fost publicată la propunere.

2°. După cum se vede, interesul pe care-l prezintă problema 3477 este numai de a stimula pe corespondenţi să citească interesantele articole, publicate de

D-l Prof. I. IONESCU în *Gazeta Matematică* Vol. XVII, sub titlul «*Momente Statice Polare*». Acele articole interesează în deosebi pe politechnicieni.

3°. Amintesc cu acest prilej că tot în acele articole, în special la pag. 87, Vol. XVII, se găsesc toate elementele necesare pentru rezolvarea problemei 1764 propusă tot de D-l Prof. I. IONESCU, cu enunțul:

Să se găsească polul minimum al unui triunghiu.

Problema 1764 încă n'a fost rezolvată.

G-L GH. B.

PROBLEMA 3915. *Fie* A_1 *piciorul înălțimii coborîtă din* A *în triunghiul* ABC, *iar* B_1, C_1 *proiecțiile lui* A_1 *respectiv pe* AC *și* AB. *Să se găsească locul geometric al ortocentrului triunghiului* AB_1C_1, *când latura* BC *este fixă, iar* A *se mișcă pe cercul* ABC.

AURELIAN STAN și P. IGNAT.

Fie B', C' picioarele înălțimilor BB', CC' ale triunghiului ABC, H ortocentrul lui, A', punctul unde AO taie cercul ABC a doua oară, H_1 unde AO taie pe B'C'. Considerând cercul BC'B'C și triunghiurile dreptunghiuri AA_1B, AA'C, AH_1B' se deduce, după cum se știe, că raza OA este perpendiculară pe antiparalela la BC în unghiul BAC, deci pe B'C'. Dealtăparte, considerând perechile de triunghiuri asemenea:

$$(AHB', AA_1B_1) \text{ și } (AHC', AA_1C_1)$$

avem:

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AA_1}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB_1}} \text{ și } \frac{\overline{AH}}{\overline{AA_1}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC_1}} \quad \therefore \quad \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC_1}} \qquad (1)$$

deci că dreptele B'C' și B_1C_1 sunt paralele; deci AH_1 fiind perpendiculară pe B'C' este înălțime în triunghiul AB_1C_1. Mai mult, putem arăta că H_1 este chiar ortocentrul triunghiului AB_1C_1. In acest scop, este deajuns să arătăm că C_1H_1 este paralelă cu BB'. Considerând succesiv perechile de triunghiuri asemenea:

$$(AH_1B'; AA_1B) \; ; \; (AB'C', ABC) \; ; \; (AC'H_1, ACA_1),$$

avem următoarele relații:

$$\frac{\overline{B'H_1}}{\overline{BA_1}} = \frac{\overline{AH_1}}{\overline{AA_1}} \; ; \; \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} \; ; \; \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AH_1}}{\overline{AA_1}},$$

deci: $$\frac{\overline{B'H_1}}{\overline{BA_1}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}},$$

sau încă: $$\frac{\overline{B'H_1}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{BA_1}}{\overline{BC'}}; \qquad (2)$$

dar perechea de triunghiuri asemenea: (BA_1C_1, BCC') dă deasemenea relaţia:

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC_1}}{\overline{BC'}}. \qquad (3)$$

Comparând (2) cu (3) deducem relaţia:

$$\frac{\overline{B'H_1}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{BC_1}}{\overline{BC'}}, \qquad (4)$$

de unde rezultă că CH_1 este paralelă la BB', deci perpendiculară pe AB_1, Aşadar, *ortocentrul* H_1 *al triunghiului* AB_1C_1 *este proiecţiunea centrului* O *pe* $B'C'$. Când punctul A se mişcă pe cercul ABC, latura BC rămânând constantă ca poziţie şi mărime, punctele B', C' se mişcă pe cercul (M) descris pe BC ca diametru. Observăm însă că:

$$\sphericalangle B'BC' = \sphericalangle B'BA = \sphericalangle OBC = \text{Const.},$$

deci coarda $B'C'$ când se mută în cercul $BC'B'C$, întinzând arce egale, rămâne tangentă unui cerc (Γ) concentric cu cercul (M). Poziţiunile punctului H_1 fiind proiecţiunile punctului fix O pe tangentele la un cerc fix (Γ), prin definiţie *locul punctului* H_1 *este melcul lui* PASCAL *relativ la cercul* (Γ) *şi punctul* O. [Podara punctului O faţă cu cercul (Γ)].

A rezolvat problema Domnul AL. D. STOICA (Liceul „Marele Voevod Mihai", Bucureşti).

O. N. Ţ.

PROBLEMA 4125. *Fie* O *un punct fix pe o dreaptă, iar* M *un punct mobil pe dreaptă. Se consideră cercul de diametru* OM; *prin centrul cercului se duce o dreaptă care taie cercul în* N *şi* N'. *Se cere locul punctelor* N *şi* N' *când* M *parcurge dreapta. Unghiul dreptei* NN', *faţă de dreapta dată rămâne constant.*

D. ARG. DUMITRESCU.

Soluția I. Fie I centrul cercului descris pe OM ca diametru și α unghiul dreptelor OM, NN'. Prin urmare $\widehat{NOM} = \frac{\alpha}{2} = ct$ încât locul lui N este dreapta care trece prin O și face unghiul $\frac{\alpha}{2}$ cu dreapta dată. Locul lui N' este tot o dreaptă perpendiculară pe prima.

Soluția II. Dacă $OM = 2\lambda$, ecuația cercului (I) este:

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x = 0,$$

iar ecuația dreptei NN'

$$y = (x - \lambda)\,\mathrm{tg}\alpha.$$

Eliminând pe λ obținem:

$$\mathrm{tg}\alpha \cdot x^2 - 2xy - \mathrm{tg}\alpha \cdot y^2 = 0$$

ecuația locului punctelor N și N' se compune din două drepte perpendiculare care trec prin origină.

S'au primit soluții analitice și geometrice dela Domnii: N. ACIKGHEOZIAN, I. CÂRSTOIU, C. IVĂNESCU, M. MARGULIUS, P. MAZILU, N. N. MIHĂILEANU, M. PREDA, C. I. SAVIN.

Au rezolvat problema numai geometric următorii: H. IONESCU-BIS, D. MAVRODIN, M. NĂSTASE, I. PARAPEANU, I. PETRESCU, M. POSTELNICESCU, G. ROȘCA I. SAGER, I. ȘARAMET, GH. ȘEREMET, C. TRIFON, P. VARLAAM.

Au dat numai soluția analitică următorii: A. BĂDESCU, Ș. OLTEANU, G. SÂMBOTIN, V. VISARION.

D-l I. C. SAVIN observă că problema se poate generaliza, luând pe dreapta NN', deoparte și de alta a centrului, segmente egale, amplificate cu un anumit număr față de rază. Locul punctelor e alcătuit tot din două drepte ce trec prin origină.

P. B.

PROBLEMA 4175. *Intr'un cerc* O *o secantă oarecare întâlnește două coarde* AB, AC *în* B', C', *iar cercul* O *în* M_b, M_c. *Să se arate că:*

1°. *Perechile de cercuri* M_b BB' *cu* M_b CC' *și* M_b CC' *cu* M_c BB' *sunt respectiv tangente;*

2°. *Tangentele comune respective în* M_b *și* M_c *sunt concurente în* P *pe cercul* O, *iar* AP *este paralelă la* $M_b M_c$;

3°. *Dacă* T_b *şi* T_c *sunt intersecţiile perechilor de drepte* (M_b P, AC) *şi* (M_c P, AB), *dreptele* $T_b T_c$, M_b B, M_c C *sunt concurente în* N;

4°. *Punctul* A *fiind mobil pe cerc, iar coarda* $M_b M_c$ *păstrând o lungime constantă, să se găsească locurile punctului* N *şi al centrului radical al cercurilor* M_b CC', M_c BB' *şi* (O).

I. NICOLAU-DOBRIDOR.

Soluţiune dată de D-ra PREDUŢA BUNGEŢIANU (Studentă Bucureşti) şi D-nii: N. N. MIHĂILEANU (Student Bucureşti); CEZAR IVĂNESCU (Student Iaşi); CEZAR COŞNIŢĂ (Bârlad); I. GH. ŞABAC (liceul militar „N. Filipescu"); VASILE B. GHIOCEL (Baccalaureat, Giurgiu).

1°. Fie $M_b T$ şi $M_b T'$ tangentele în M_b la cercurile M_b BB' şi M_b CC'. Observăm că:

$$\sphericalangle TM_b B' = \sphericalangle M_b BB' = \sphericalangle M_b BA = \sphericalangle M_b CA =$$
$$= \sphericalangle M_b CC' = \sphericalangle T'M_b C' = \sphericalangle T'M_b B',$$

deci cele două tangente $M_b T$ şi $M_b T'$, fiind de aceeaşi parte a secantei $M_b M_c$ şi formând în acelaş punct unghiuri egale cu ea, sunt suprapuse una alteia; ca urmare cele două cercuri având aceeaşi tangentă în punctul M_b, sunt tangente unul altuia.

Analog demonstrăm pentru cealaltă pereche de cercuri M_c BB' şi M_c CC'.

2°. P fiind punctul de întâlnire al tangentelor comune $M_b T$ şi M_1T_1, avem pe deoparte:

$$\sphericalangle PM_b B' = \sphericalangle M_b BB' = \sphericalangle M_b BA,$$

de alta:

$$\sphericalangle PM_c C' = \sphericalangle M_c CC' = \sphericalangle M_c CA = \sphericalangle M_c BA, \qquad (2)$$

de unde deducem imediat că:

$$\sphericalangle M_b PM_c = 180^0 - (\sphericalangle PM_b B' + \sphericalangle PM_c C') =$$
$$= 180^0 - (\sphericalangle M_b BA + \sphericalangle M_c BA) = 180^0 - \sphericalangle M_b BM_c, \qquad (3)$$

adică punctul P aparţine arcului $M_b AM_c$.

Observând încă că:

$$\sphericalangle APM_c = \sphericalangle ACM_c = \sphericalangle M_c CC' = \sphericalangle PM_c C' \qquad (4)$$

deducem că AP şi $M_b M_c$ sunt paralele.

3°. Observăm că punctul T_b, din felul cum a fost definit, este intersecţia axelor radicale $M_b P$ şi AC respectiv ale perechilor de cercuri (M_b BB′, M_b CC′) şi (M_b CC′, M_c CC′); deci este *centrul radical* al cercurilor M_b BB′, M_b CC′, M_c CC′ şi ca urmare T_b este un punct al axului radical al cercurilor M_b BB′ şi M_c CC′.

Analog arătăm că punctul T_c este un punct al axului radical al cercurilor M_b BB′ şi M_c CC′.

Asemenea se observă că, punctul N de întâlnire al axelor radicale ale perechilor de cercuri [(O); M_b BB′] şi [(O); M_c CC′], fiind centrul radical al cercurilor (O); M_b BB′; M_c CC′, aparţine axului radical $T_b T_c$ al cercurilor M_b BB′, M_c CC′ adică $T_b T_c$ trece prin punctul N *de întâlnire al dreptelor* BM_b, CM_c.

4°. Punctele B şi C rămânând fixe pe cercul O, iar coarda $\overline{M_b M_c}$ păstrând o lungime constantă, $\sphericalangle$ BNC este constant şi cum laturile lui trec prin punctele fixe B şi C, locul vârfului său N nu depinde de poziţia punctului A, ci numai de a coardei $\overline{M_b M_c}$ şi este compus din arcele a două segmente de cerc capabile respectiv de unghiurile $\frac{\alpha - \beta}{2}$ şi $\frac{\alpha + \beta}{2}$, deoparte şi de alta a segmentului de dreaptă $\overline{BC}$; α fiind măsura arcului mai mic întins de coarda BC, iar β măsura arcului mai mic întins de coarda de lungime constantă $\overline{M_b M_c}$. (In ipoteza că punctele M_b şi M_c se mişcă pe cercul O urmând de exemplu sensul pozitiv, iar $\overline{M_b M_c} < \overline{BC}$). Analog examinăm cazul $\overline{M_b M_c} > \overline{BC}$.

Centrul radical I al cercurilor M_b CC′, M_c BB′, (O) este punctul de intersecţie al coardelor comune M_b C şi M_c B, deci locul punctului I nu depinde de poziţia punctului A pe cercul O, ci numai de a coardei $M_b M_c$; deci în aceleaşi notaţii şi ipoteză ca la locul punctului N, punctul I descrie arcele a două segmente de cerc construite pe coarda $\overline{BC}$ deoparte şi de alta şi capabile respectiv de unghiurile $\frac{\alpha + \beta}{2}$ şi $\frac{\alpha - \beta}{2}$.

Observare. Punctul 4° al problemii n'a fost soluţionat complet de nici unul din rezolvitorii problemii.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 4329. *Să se calculeze câtul şi restul împărţirii polinomului*

$$x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$$

prin $(x-4)^2$, *cu ajutorul rădăcinilor polinomului, fără să se facă împărţirea*

D. GEORGESCU-PITEŞTI.

Soluţie dată de D-rele GELLA BĂLĂCEANU, MARGARETA CARACUDOVICI (Studente Bucureşti) şi D-nii: MIRCEA-LEONTE A. NEGREA (Brăila); DIMITRIE D. MAVRODIN (Lic. M. Eminescu, Bucureşti); PANAIT C. MAZILU; A. ARŞAVSKI; WILHELM CSEKE (Student Mat. Cluj); S-LT A. EM. BĂDESCU (Fontainebleau); GRIGORE V. MARTEŞ (Lic. Mil. Chişinău); D. I. LEBĂDĂ (Lic. Mil. Iaşi); IOAN M. POPESCU (Lic. M. Eminescu, Bucureşti); CAROL HAIMER.

Insemnând cu $P(x)$ polinomul dat şi observând că el admite ca rădăcini întregi pe $+1$, $+2$, $+3$, -2, avem:

$$P(x) \equiv (x-1)(x-2)(x-3)(x+2). \qquad (1)$$

Insemnând acum câtul şi restul împărţirii lui $P(x)$ prin $(x-4)^2$ cu $Q(x)$ şi $R(x)$, deducem că $Q(x)$ este un polinom de gradul al doilea, iar $R(x)$ un polinom de gradul întâi, deci vom pune

$$Q(x) \equiv x^2 + ax + b \quad \text{şi} \quad R(x) \equiv cx + d,$$

căci ţinând seamă de identitatea ce trebue să existe

$$P(x) \equiv (x-4)^2 Q(x) + R(x) \qquad (2)$$

primul coeficient al lui $Q(x)$ este $+1$.

Inlocuind acum pe x în identitatea (2) pe rând prin una din rădăcinile aflate ale lui $P(x) = 0$, obţinem următorul sistem de relaţiuni:

$$9a + 9b + c + d + 9 = 0 \; ; \quad 8a + 4b + 2c + d + 16 = 0;$$

$$3a + b + 3c + d + 9 = 0 \qquad (3)$$

$$-72a + 36b - 2c + d + 144 = 0.$$

Insemnând cu Δ determinantul sistemului (3) avem:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & 9 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ -72 & 36 & -2 & 1 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 6 & -8 & 2 \\ 81 & 27 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 84 & 12 & 0 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 21 & 6 \end{vmatrix} = -120 \neq 0;$$

deci sistemul (3) determină prin metoada lui CRAMER valori finite unice pentru a, b, c, d anume:

$$a = -\frac{\Delta_a}{\Delta} = +4 \quad ; \quad b = -\frac{\Delta_b}{\Delta} = 15 \quad ; \quad c = -\frac{\Delta_c}{\Delta} = 72;$$

$$d = -\frac{\Delta_d}{\Delta} = -252;$$

deci

$$Q(x) \equiv x^2 + 4x + 15 \quad ; \quad R(x) \equiv 72x - 252.$$

Observarea I. D-l MIRCEA-LEONTE A. NEGREA observă că problema poate fi generalizată urmându-se procedeul indicat în *nota* D-lui I. MĂRGINEANU din R. M. T. Vol. XIV, p. 17. In legătură cu aceasta face cunoscut că D-l D. GEORGESCU-PITEŞTI propunătorul problemei a trimes odată cu această problemă un articol unde este tratată chestiunea generală.

Observarea II. Ceilalţi corespondenţi, care au trimes soluţiuni nefolosind rădăcinile polinomului cum cerea enunţul, n'au fost menţionaţi ca rezolvitori ai problemii deşi au găsit rezultate exacte.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 4708. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\cos 5x - 5\cos 3x = m.$$

Discuţie.

GH. POPESCU-BOTOŞANI.

Soluție dată de D-nii: M. A. NEGREA (Brăila), GR. MARTEȘ (S-Lt.) și I. I. SOLOMON (Iași).

Punând

$$\cos x = y \tag{1}$$

și folosind formulele:

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$$

ecuația dată devine:

$$f(y) = 16y^5 - 40y^3 + 20y - m = 0. \tag{2}$$

Pentru diferite valori numerice de ale lui m se caută rădăcinile ecuației (2) cuprinse în intervalul $(-1, +1)$. Cu ajutorul egalității (1) și al tablelor de logaritmi se determină arcele x corespunzătoare, care sunt rădăcinile ecuației propuse în enunț.

Discuție. Vom folosi teorema lui ROLLE pentru a stabili, pentru diferitele valori ale lui m, numărul rădăcinilor reale ale ecuației (2) care dau rădăcinile ecuației din enunț.

Ecuația derivată a ecuației (2)

$$f'(y) = 20(4y^4 - 6y^2 + 1) = 0$$

are ca rădăcini pe:

$$y_i = \pm \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2\sqrt{2}}$$

sau efectuând calculele:

$$y_1 = -1{,}144 \; ; \; y_2 = -0{,}437 \; ; \; y_3 = 0{,}437 \; ; \; y_4 = 1{,}144.$$

Deoarece pentru ecuația din enunț interesează numai valorile lui y din intervalul

$$-1 \leqslant y \leqslant 1 \tag{3}$$

vom folosi pentru șirul lui ROLLE numai pe y_2 și y_3 la care adăugăm și valorile particulare -1, 0, $+1$.

Șirul lui ROLLE, în aceste condițiuni, este:

$$f(-1) = -m + 4 \; ; \; f(y_2) = -m - 4\sqrt{2} \; ; \; f(0) = -m$$

$$f(y_3) = -m + 4\sqrt{2} \; ; \; f(1) = -m - 4.$$

De aici, dând lui m diferitele valori caracteristice, se deduce următorul tabel al discuției rădăcinilor ecuației (2) pentru intervalul (3):

m	$f(-1)$	$f(y_2)$	$f(0)$	$f(y_3)$	$f(1)$	Natura și numărul rădăcinilor
$m < -4\sqrt{2}$	+	+	+	+	+	Nici o rădăcină.
$m = -4\sqrt{2}$	+	0	+	+	+	O rădăcină dublă reală egală cu y_2.
$-4\sqrt{2} < m < -4$	+	−	+	+	+	2 rădăcini reale: una cuprinsă între −1 și y_2 și alta între y_2 și 0.
$m = -4$	+	−	+	+	0	3 rădăcini reale: una egală cu 1 și 2 ca în intervalul precedent.
$-4 < m < 0$	+	−	+	+	−	3 rădăcini reale câte una în fiecare din intervalele $(-1, y_2)$, $(y_2, 0)$, $(y_3, 1)$.
$m = 0$	+	−	0	+	−	3 rădăcini reale: una 0 și 2 în intervalele $(-1, y_2)$, $(y_3, 1)$.
$0 < m < 4$	+	−	−	+	−	3 rădăcini reale în intervalele $(-1, y_2)$, $(0, y_3)$, $(y_3, 1)$.
$m = 4$	0	−	−	+	−	3 rădăcini reale: una egală cu −1 și 2 în intervalele $(0, y_3)$ și $(y_3, 1)$
$4 < m < 4\sqrt{2}$	−	−	−	+	−	2 rădăcini reale cuprinse în intervalele $(0, y_3)$ și $(y_3, 1)$.
$m = 4\sqrt{2}$	−	−	−	0	−	O rădăcină dublă reală egală cu y_3.
$4\sqrt{2} < m$	−	−	−	−	−	Nici o rădăcină.

In rezumat pentru

$$-4\sqrt{2} \leqslant m \leqslant 4\sqrt{2} = 5{,}656...$$

ecuaţia dată are 2 sau 3 rădăcini reale.

Observaţii. 1°. Soluţii bune s'au primit încă dela D-nii: A. CORNĂŢEANU şi T. C. ŞTEFAN.

2°. D-şoara SONIA M. TUDORAN a rezolvat numeric ecuaţia pentru $m = 0$, apoi a anexat un tabel cu valorile lui x pentru $m = \pm 5{,}5$, ± 4, $\pm 1{,}96$, şi 0, fără a justifica ce a determinat alegerea acestor valori particulare.

3°. Ecuaţia din enunţul problemei 4708 a fost propusă iniţial, la pag. 648, Vol. XLI, sub forma:

$$\cos 5x - 5\cos^3 x = m.$$

Plecând dela această formă se găseşte că ecuaţia în y, corespunzătoare ecuaţiei (2), este:

$$f(y) = 16y^5 - 25y^3 + 5y - m = 0$$

care se rezolvă şi se discută la fel cu ecuaţia (2).

4°. Pentru rezolvarea şi discutarea ecuaţiilor parametrice, de felul ecuaţiei (2) se pot întrebuinţa şi metodele grafice, după cum s'a arătat adesea în *Gazeta Matematică*. Mă folosesc de acest prilej pentru a da o soluţie complectă pe cale grafică problemei 4708, spre a servi ca îndrumare la rezolvarea problemelor analoage.

Rădăcinile ecuaţiei (2) sunt coordonatele punctelor de intersecţie ale curbei

$$z = 16y^5 - 40y^3 + 20y \tag{4}$$

cu dreapta

$$z - m = 0. \tag{5}$$

Se găseşte uşor din (4) că z se anulează pentru:

$$y_0 = 0 \quad \text{şi} \quad y_1 = \pm\sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{4}}$$

sau făcând calculele:

$$y_0 = 0 \ ; \ y_1 = -1{,}34... \ ; \ y_2 = -0{,}83... \ ; \ y_3 = 0{,}83... \ ; \ y_4 = 1{,}34...$$

Avem apoi:

$$z' = 20(4y^4 - 6y^2 + 1) \tag{6}$$

care se anulează pentru:

$$y_5 = -1{,}15... \ ; \ y_6 = -0{,}44... \ ; \ y_7 = 0{,}44... \ ; \ y_8 = 1{,}15...$$

In fine:

$$z'' = 80y(4y^2 - 3)$$

se anulează pentru:

$$y_9 = -0{,}86... \ ; \ y_{10} = 0 \ : \ y_{11} = 0{,}86.$$

Curba (4) are deci maxime, minime, puncte de inflexiune, puncte de ordonată nulă, şi puncte la infinit.

Pentru-că $-1 \leqslant y = \cos x < +1$, adăugăm la valorile găsite, valorile particulare ± 1 cu care se construeşte uşor următorul tabel centralizator al variaţiei funcţiei z din (4).

y	z'	z''	z şi natura punctelor particulare
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
	+	—	Creşte
— 1,34	60,25...	—	0 Punct H'
	+	—	Creşte
— 1,15...	0	— 210,6...	+ 5,78... Punct M, *maxim*
	—	—	Scade
— 1,00	— 20,00	— 80,00	+ 4 Punct C
	—	—	Scade
— 0,86...	— 25,06...	0	+ 0,729... Punct A, *inflexiune*
	—	+	Scade
— 0,83...	— 24,74...	+	0 Punct I'
	—	+	
— 0,44...	0	+	— 5,65... Punct N', *minim*
	+	+	Creşte
0	20,00	0	0 Punct O, *inflexiune*
	+	—	Creşte
0,44	0	—	5,65... Punct N, *maxim*
	—	—	Scade
0,83...	— 24,74...	—	0 Punct I
	—	—	Scade
0,86...	— 25,06 ..	0	— 0,729... Punct B, *inflexiune*
	—	+	Scade
1,00	20,00	+ 80	— 4 Punct D
	—	+	Scade
1,15...	0	+ 210,68...	— 5,78... Punct M', *minim*
	+	+	Creşte
1,34...	60,85...	+	0 Punct H
	+	+	Creşte
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Tangentele în punctele de inflexiune A, O, B sunt paralele respectiv cu dreptele :

$$z + 25{,}06 \ldots x = 0 \; ; \; z - 20x = 0 ;$$

$$z + 25{,}06 \, . \, x = 0$$

tangentele în A şi B fiind paralele.

Tangentele în punctele particulare C, C′ sunt paralele între ele şi paralele cu

$$z + 20x = 0.$$

Cu ajutorul tabloului precedent şi al direcţiilor tangentelor considerate se construeşte curba (4), aşa cum e reprezentată pe figura alăturată.

Atât din tabel, cât şi din figură se vede că curba (4) este simetrică faţă de origină. Aceasta se deduce şi din ecuaţia (4) scrisă sub forma

$$z = y \, (16y^4 - 40y^2 + 20)$$

unde se vede că pentru două valori egale şi de semne contrare ale lui y, z capătă valori egale şi de semne contrare.

Intersecţia curbei (4) cu dreapta (5) dau soluţiile ecuaţiei (2). Dintre acestea interesează numai acelea cuprinse între dreptele

$$y \pm 1 = 0$$

trasate pe figură cu linii punctate. Complectăm dreptunghiul CDC′D′ de diagonală CC′ şi construim dreptunghiul FGG′F′ ale cărui laturi paralele cu axele trec prin N, N′, C, C′. Felul cum încadrează laturile acestor dreptunghiuri ramurile curbei se vede că ecuaţia din enunţul problemei 4708 are rădăcini acceptabile numai dacă

$$-5{,}65 \ldots \leqslant z = m \leqslant 5{,}65 \ldots$$

şi anume:

$m = -5{,}65\ldots$	O rădăcină dublă egală cu: $-0{,}44\ldots$
$-5{,}65\ldots < m < -4$	Două rădăcini.
$m = -4$	Trei rădăcini din care una egală cu $+1$.
$-4 < m < 4$	Trei rădăcini cuprinse între -1 şi $+1$.
$m = 0$	Rădăcinile 0 şi $\pm 0{,}83\ldots$
$4 < m < 5{,}65\ldots$	Două rădăcini.
$m = 4$	Trei rădăcini din care una egală cu -1.
$m = 5{,}65\ldots$	O rădăcină dublă egală cu $+0{,}44$.

Aceste rezultate concordă cu acelea obţinute cu ajutorul tabelului şirului ROLLE dela pagina 98 unde trebue observat că:

$$m = \pm 4\sqrt{2} = \pm 5{,}65\ldots$$

ordonatele punctelor N şi N'.

Deasemeni se vede de pe figură că ecuaţia (2), fără restricţia ca rădăcinile ei să reprezinte cosinusuri, are toate rădăcinile reale pentru:

$$-5{,}78\ldots \leqslant m \leqslant +5{,}78\ldots$$

are 3 rădăcini reale pentru:

$$-5{,}78\ldots < m < -5{,}65\ldots \quad \text{şi} \quad 5{,}65 < m < 5{,}78$$

şi că are o singură rădăcină reală pentru:

$$m < -5{,}78\ldots \quad \text{sau} \quad +5{,}78\ldots < m.$$

5°. Dacă în membrul II al ecuaţiei din enunţul problemei 4708 s'ar înlocui m prin $f(m)$, problema s'ar rezolva căutând intersecţiile curbei (4) cu curba

$$z = f(m)$$

ceeace nu este greu când curba din urmă se poate construi exact.

Vom reveni cu probleme de această natură.

6°. Ecuaţia

$$\sin 5x + 5\sin 3x = m$$

conduce pentru $\sin x$ absolut la aceleaşi rezultate ca şi ecuaţia problemei 4708 pentru $\cos x$, pentru că

$$\sin 5x + 5\sin 3x = 16\sin^5 x - 40\sin^3 y + 20\sin x$$

după cum se poate stabili uşor.

G-L GH. BUICLIU.

PROBLEMA 5164. *La un număr de două cifre scrim odată o cifră înainte şi apoi a doua oară o cifră în urmă. In ce caz unul din numerele formate este multiplu al celuilalt?*

I. IONESCU.

Fie u un număr de două cifre. Scriind cifra x înaintea lui u, el devine $(100x + u)$; scriind cifra y în urma lui, el devine $(10u + y)$. Avem deci:

$$10 \leqslant u \leqslant 99, \qquad 1 \leqslant x \leqslant 9, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 9.$$

Fie z un întreg; va trebui să avem:

$$100x + u = z\,(10u + y), \tag{1}$$

sau:

$$10u + y = z\,(100x + u). \tag{1'}$$

Numerele $(100x + u)$ şi $(10u + y)$ având câte trei cifre, câtul lor z nu poate avea decât o cifră. Deci:

$$1 \leqslant z \leqslant 9.$$

Observăm mai întâiu că dacă $z = 1$, egalităţile (1) şi (1') se reduc la una singură:

$$100x + u = 10u + y$$

$$\therefore \qquad 9u = 100x - y = 99x + (x - y)$$

$$\therefore \qquad u = 11x + [(x - y)].$$

Numărul u nu poate fi întreg decât dacă $(x - y) = \mathfrak{M}\,9$. Ţinând seamă de limitele lui x şi y, nu putem lua decât $x = 9$, $y = 0$ sau $x = y$. Primul caz dă $u = 100$, inadmisibil. Al doilea conduce la $u = 11x$, adică u format din două cifre identice. Valoarea 0 nu este admisibilă pentru x, după enunţul problemei. Ea duce la $u = 00$ şi de aci soluţia formală:

$$000 = z \times 000.$$

Dacă scrim grase cifrele ce alcătuiesc pe u atunci egalitatea de mai sus se poate scri:

$$\mathbf{000} = z \times \mathbf{00}0 \qquad \text{sau} \qquad \mathbf{00}0 = z \times \mathbf{000},$$

după cum o privim de tipul (1) sau de tipul (1').

Dacă n este o cifră semnificativă, putem lua pentru $z = 1$ pe $x = y = n$ şi $u = nn$. De aci soluţia:

$$n\mathbf{nn} = 1 \times \mathbf{nn}n \qquad \text{sau} \qquad \mathbf{nn}n = 1 \times n\mathbf{nn}$$

după cum o considerăm ca rezolvând ecuaţia (1) sau (1'). Cum n poate fi 1, 2, 3...9 se vede că avem aci nouă soluţiuni, privite sub două aspecte.

Să căutăm acum soluţiunile ce corespund la alte valori ale lui z. Să luăm ecuaţia (1) şi să o scrim sub forma:

$$(10z - 1)\,u = 100x - yz.$$

Pentru $z > 1$ avem $(10z - 1) > yz$, căci această neegalitate se poate scri $(10 - y)\,z > 1$ care este adevărată, căci cea mai mică valoare a părţii întâia o dă $y = 9$, $z = 2$ şi anume 2. Astfel fiind, egalitatea precedentă ne arată că u este câtul lui $100x$ prin $(10z - 1)$, iar yz restul acestei împărţiri. De aci reese un mijloc de a găsi pe x, y, şi u pentru diferite valori ale lui z. Impărţim pe $100x$ prin $(10z - 1)$ şi câtul este u dacă este între limitele lui, iar restul să fie un $\mathfrak{M}z$. Impărţind restul cu z găsim atunci pe y.

Mai observăm aci că $u \geqslant 10$ şi deci $100x \geqslant 10\,(10z - 1)$, care ne conduce la $x \geqslant z$. Iată acum aci toate calculele necesare pentru rezolvarea ecuaţii (1):

$$-z = 2. \qquad y \geqslant 2. \qquad 19u = 100x - 2y.$$

200 | 19	300 | 19	400 | 19	500 | 19	600 | 19
10 | 10=u	110 | 15	20 | 21	120 | 26=u	30 | 31
$y=5$	15	1	6	11
			$y=3$	

700 | 19	800 | 19	900 | 19
130 | 36=u	40 | 42=u	140 | 47
16	2	7
$y=8$	$y=1$	

De aci rees 4 soluţiuni:

$$210 = 2 \times 105, \quad 526 = 2 \times 263, \quad 736 = 2 \times 368, \quad 842 = 2 \times 421,$$

$$-z = 3. \qquad x \geqslant 3. \qquad 29u = 100x = 3y.$$

300 | 29	400 | 29	500 | 29	600 | 29	700 | 29
10 | 10	110 | 13	210 | 17	20 | 20	120 | 24
	23	7		4

800 | 29	900 | 29
220 | 27	30 | 31
7	1

Nu avem nici o soluţie.

$-z = 4.$ $\quad x \geqslant 4.$ $\quad 39u = 100x - 4y.$

400	39	500	39	600	39	700	39
10	10	110	12=u	210	15	310	17
		32		15		37	
		y=8					

800	39	900	39
20	20=u	130	33
y=5		13	

.

Avem aci două soluţii:

$$\mathbf{512} = 4 \times \mathbf{128}, \qquad \mathbf{820} = 4 \times \mathbf{205}.$$

$-z = 5.$ $\quad x \geqslant 5.$ $\quad 49u = 100x - 5y.$

500	49	600	49	700	49	800	49	900	49
10	10=u	110	12	210	14	310	16	410	18
y=2		12		34		16		18	

Avem o singură soluţie:

$$\mathbf{510} = 5 \times \mathbf{102}.$$

$-z = 6.$ $\quad x \geqslant 6.$ $\quad 59u = 100x - 6y.$

600	59	700	59	800	59	900	59
10	10	110	11	210	13	310	15
		51		33		15	

.

Nu avem nici o soluţie.

$-z = 7.$ $\quad x \geqslant 7.$ $\quad 69u = 100x - 7y.$

700	69	800	69	900	69
10	10	110	11	210	13
		41		3	

.

Nu avem nici o soluţie.

$-z = 8.$ $\quad x \geqslant 9.$ $\quad 79u = 100x - 8y.$

800	79	900	79
10	10	110	11
		31	

.

Nu avem nici o soluţie.

$$-z = 9. \qquad x = 9. \qquad 89u = 100x - 9y.$$

$$\left\| \begin{matrix} 900 \\ 10 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 89 \\ 10 \end{matrix} \right\| .$$

Nu avem nici o soluţie.

Deci pentru $z > 1$ avem 7 soluţii de tipul (1).

— Pentru tratarea ecuaţii (1′) se poate urma aceeaşi cale. Se poate ajunge la rezultat mai repede prin grupări convenabile de termeni, care cer însă oarecare obişnuinţă. Procedeul nu mai are uniformitatea celui de mai sus. Iată cum putem găsi soluţiile mai simplu. Scrim ecuaţia (1′) sub forma:

$$(10 - z)\, u = 100xz - y.$$

Cum $u < 100$ reese că:

$$100xz - y < 100\,(10 - z),$$

$$\therefore \quad (x + 1)\, z < 10 + 0{,}01y,$$

$$\therefore \quad (x + 1)\, z < 10.$$

Aceasta ne arată că pentru $z \geqslant 6$ nu avem soluţie căci ar eşi $x < 1$. Deci nu putem lua decât $z = 2, 3, 4, 5$.

$$z = 2. \qquad x \leqslant 4. \qquad 8u = 200x - y.$$

Se vede că $y = \mathfrak{M}8$, şi deci nu putem lua decât $y = 0$ sau $y = 8$. Acestea conduc la $u = 25x$ sau $u = 25x - 1$. De aci următoarele 7 soluţii:

$$\mathbf{250} = 2 \times \mathbf{125}, \quad \mathbf{500} = 2 \times \mathbf{250}, \quad \mathbf{750} = 2 \times \mathbf{375},$$

$$\mathbf{248} = 2 \times \mathbf{124}, \quad \mathbf{498} = 2 \times \mathbf{249}, \quad \mathbf{748} = 2 \times \mathbf{374}, \quad \mathbf{998} = 2 \times \mathbf{499}.$$

$$-z = 3. \qquad x \leqslant 2. \qquad 7u = 300x - y,$$

$$\therefore \quad 7u = 7 \times 43x - (x + y).$$

Se vede că $(x + y) = \mathfrak{M}7$. Deci nu putem lua decât $x = 1$, $y = 6$ sau $x = 2$, $y = 5$. Ele dau respectiv $u = \mathbf{42}$ şi $u = \mathbf{85}$. De aci două soluţii:

$$\mathbf{426} = 3 \times \mathbf{142} \quad , \qquad \mathbf{855} = 3 \times \mathbf{285}.$$

$$-z = 4. \qquad x = 1. \qquad 6u = 400 - y,$$

$$\therefore \quad u = 66 + [(4 - y)/6].$$

Se vede că nu putem lua decât $y = 4$ şi deci $u = 66$. Avem o soluţie:

$$664 = 4 \times 166.$$

$$-z = 5. \qquad x = 1. \qquad 5u = 500 - y,$$

$$\therefore \quad u = 100 - (y/5).$$

Nu putem lua decât $y = 5$ şi deci $u = 99$, de unde soluţia:

$$995 = 5 \times 199.$$

In rezumat problema are 26 soluţii dintre care 9 date de numerele cu două cifre identice. Numerele 11, 12, 20, 22, 24, 24, 25, 26, 33, 36, 44, 49, 50, 55, 74, 75, 77, 85 şi 88 dau soluţiuni simple; numerele 10, 42, 66 dau soluţiuni duble şi numărul 99 o soluţie triplă. Mai avem soluţia formală 00.

I. I.

D-l AL. M. VASILESCU-STABU a examinat bine cazul $z = 1$ şi a rezolvat prin încercări ecuaţiile (1) şi (1'). La prima ecuaţie a pierdut soluţia $u = 26$ şi la a doua soluţiile 25, 50, 75 şi 99 cu $z = 2$.

D-l ST. CETĂŢIANU a dat numai soluţiile cu u având cifre identice, inclusiv 00.

EXERCIŢII

3. Să se găsească un număr prim mai mic decât *10.000*, care adunat cu *8* dă un alt număr prim. Numărul numerelor prime cu acel număr şi mai mici ca el este un patrat perfect, iar complimentul lui tot un patrat perfect.

D. D. BOIANGIU.

R. Numărul prim se termină numai cu *1*, *3*, *7*, *9* căci adunându-i *8* trebue să rămână prim.

Indicatorul unui număr prim se obţine scăzând *1*, care trebuind să fie patrat perfect, urmează că numărul prim se va termina cu *1*, deci patratul cu *00*.

Dintre toate patratele mai mici ca *10.000* numai *3.600* şi *6.400* şi *100* şi *900* satisfac fiind complimente.

Dar număr prim nu este decât *101*.

Soluţia *1* este banală.

4. Pe un cerc O se ia două puncte fixe A, B şi un punct mobil M. Fie P simetricul lui B faţă de AM. Dreapta PM taie cercul O în R, iar RB taie pe AM în S.

1) Punctele A, P, R, S sunt pe un cerc.

2) Cercul precedent este egal cu O, dacă AM = AB.

MIRCEA D. POPA.

R. Se observă că

$$\sphericalangle PAM = \sphericalangle MAB = \sphericalangle SRM$$

deci patrulaterul APRS e inscriptibil.

Cercurile având o coardă comună AR, vor fi egale dacă unghiurile opuse APR = ABM şi AMR = AMB sunt egale, deci dacă triunghiul MAB e isoscel.

5. Pe un cerc se ia trei puncte A, B fixe, C mobil. Paralela la AB prin piciorul D al perpendicularei din C pe tangenta în A, taie pe BC în M. Se cere locul geometric al punctului M.

MIRCEA D. POPA.

R. Fie T tangenta în A; se observă pe figură, că

$$\sphericalangle (DA, DM) = \sphericalangle (AT, AB) = \sphericalangle (CA, CB)$$

deci patrulaterul ADCM e inscriptibil, unghiul M e drept ca şi D şi locul lui M este cercul de diametru AB.

6. Să se găsească valoarea expresiei

$$\frac{\beta(x_2 - x_1) - \alpha(y_2 - y_1) + y_2x_1 - x_2y_1}{\beta^2 - \beta(y_1 + y_2) + y_1y_2}$$

şi să se arate că este independentă de α şi β, ştiind că perechile (x_1, y_1), (x_2, y_2) şi (α, β) satisfac relaţia

$$y^2 = 2px.$$

MIRCEA GH. STAVRAT.

R. Se înlocuieşte x_1, x_2, α prin

$$\frac{y_1^2}{2p}, \quad \frac{y_2^2}{2p}, \quad \frac{\beta^2}{2p}$$

şi după o socoteală simplă de factori comuni, se obţine:

$$\frac{y_1 - y_2}{2p}.$$

PROBLEME PROPUSE

4464 [1]). Când laturile şi raza cercului circumscris unui triunghiu ABC verifică relaţia

$$a^2 + b^2 + c^2 = 6R^2$$

atunci cercul conjugat trece prin punctul lui LEMOINE şi reciproc.

V. THÉBAULT.

5166 [2]). Să se examineze dacă numărul:

$$N = 2000! + 1$$

este divizibil cu *4001.*

CPT. C-DOR I. LINTEŞ.

5195. O carte de Recreaţiuni Matematice apărută de curând; *„Curiosités" & Récréations mathématiques,* de G. BOUCHENY, are pusă la pag. 43 următoarea problemă:

„On a un nombre de 6 chiffres. Le chiffre de gauche est 2; si l'on le transporte à la droite du nombre, le nouveau nombre surpasse la premier de 333 308. Quel est le nombre primitif?"

Se dă ca rezultat 237 034, şi se face o verificare, adunând acestui număr pe 333 306, găsindu-se astfel că rezultatul este bun, ceeace nu e de fapt. Care este rezultatul exact? Cum se explică reuşita verificării?

I. IONESCU.

5196. Cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, luate câte o singură dată, să se formeze patru numere care să fie dividentul, împărţitorul, câtul şi restul unei împărţiri.

V. THÉBAULT.

---

1) Problema 4464 propusă la pag. 238 Vol. XL, fiind identică cu problema 4376 propusă la pag. 384, Vol. XXXIX se anulează şi se înlocueşte cu prezenta.

2) Scriindu-se în expresiunea lui N numărul *4000* în loc de *2000*, enunţul problemei Nr. 5166 se publică din nou.

5197. Să se determine un număr de n cifre, astfel încât multiplicate succesiv cu 1, 2, 3,..., n să obţinem drept produse numere ce nu diferă de numărul căutat decât prin ordinea cifrelor sale.

ALEXANDRU STOENESCU.

5198. Fie M şi N mijloacele laturilor opuse AB şi CD ale unui dreptunghiu ABCD. Prin N se duce o dreaptă Δ care taie pe AB în E. Pe MN se iau punctele P şi Q simetrice faţă de N şi aşa încât

$$\frac{\overline{NP}}{\overline{EM}} = \frac{\overline{NQ}}{\overline{EM}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}.$$

Se notează cu P' şi Q' proiecţiunile lui P şi Q pe Δ şi se cere să se demonstreze că figura CP'CQ' este un paralelogram în care laturile opuse $\overline{CP'}$ şi $\overline{DQ'}$ sunt constante oricare ar fi poziţia dreptei Δ.

G-L GH. BUICLIU.

5199. Fie ABCD un patrulater înscris într'un cerc de centru O şi a, b, c, d mijloacele laturilor $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$. Să se arate că:

cercurile AOC, BOD, aOc, bOd

se întâlnesc într'un punct.

N. N. MIHĂILEANU.

5200. Fie H, $A_1B_1C_1$ şi $A_2B_2C_2$ ortocentrul, triunghiul ortic şi triunghiul median ale triunghiului ABC. Insemnăm cu A_3; B_3; C_3 intersecţiile perechilor de drepte BC, B_1C_1; AC, A_1C_1; AB, A_1B_1, iar cu M, N, P intersecţiile perechilor de drepte (A_2H, AH_3); (B_2H, BB_3); (C_2H, CC_3). Să se arate că triunghiul format de dreptele A_1M, B_1N, C_1P este ortologic cu triunghiul format de mijloacele lui A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3, şi să se determine centrele de ortologie.

THEODOR GH. COCEA.

5201. Într'un triunghiu ABC se consideră picioarele a trei ceviene şi izotomicele lor: A_1, B_1, C_1 şi A', B', C'. Să se arate:

1°. Dreptele lui GAUSS ale patrulaterelor $AA_1B'C'$ şi analoagele sale, sunt paralele.

2°. Asemenea pentru patrulaterele $AA'B_1C_1$ şi analoagele sale.

LT. I. GH. ZAMFIRESCU.

5202. Dacă ecuaţiunea $x^3+px^2+qx+r=0$ are toate rădăcinile cuprinse între *zero* şi $\frac{1}{2}$, avem $0>p+q>-\frac{3}{4}$; iar dacă toate rădăcinile sunt mai mari ca 2 avem: $0>\frac{p+q}{r}>-\frac{3}{4}$.

LT. C. IONESCU-ŢIU.

5203. Să se rezolve ecuaţia:

$$f(x)\equiv Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0$$

ştiind că ecuaţia $f(x-1)=0$ este bipatrată, iar $f(x+1)=0$ este reciprocă. Să se arate că, în general, înlocuind pe 1 cu α (număr oarecare), $f(x)$ are întotdeauna două rădăcini duble. Să se determine valorile acestor două rădăcini în funcţie de α.

VIRGIL GHIŢESCU.

5204. Să se rezolve ecuaţia:

$$(y^2+1)^n+2\sum_{k=1}^{n-1}(y^2+1)^k\left[\sum_{j=0}^{m}(-4)^j\,C_{n-k}^{2j}\,y^{2j}\,(y^2-1)^{n-2k-2j}=0\right]$$

m fiind cel mai mare întreg cuprins în $\frac{n-k}{2}$.

M. GHERMĂNESCU.

5205. Să se arate că puterea unui punct, al unei conice cu centru, faţă de cercul lui MONGE corespunzător este egală cu produsul razelor focale.

ALEXANDRU V. NICULESCU.

5206. Fie parabolă $y^2=2px$. Să se ducă o dreaptă (Δ), care să treacă prin focarul F al parabolei şi să taie parabola în două puncte M_1 şi M_2, îndeplinind condiţia:

$$\overline{M_1F}^2-\overline{M_2F}^2=4p^2.$$

GH. DUMITRESCU.

5207. Fie M un punct de pe o elipsă de axe $2a$ şi $2b$ şi N intersecţia normalei în M cu axa mică a elipsei. Să se arate că, dacă segmentul $\overline{MN}$ este egal cu axa mare a elipsei, focarele elipsei şi punctul N formează un triunghiu echilateral.

Care este condiţia ca să putem avea pe elipsă puncte M pentru care $\overline{MN} = 2a$? Să se arate, că cercul, cu centrul în punctul N de mai sus (pentru care $\overline{MN} = 2a$) şi de rază $2a$, este tangent elipsei în două puncte M, distincte în general şi că elipsa nu traversează cercul (acesta nu e osculator elipsei). Generalizare la cazul unui segment $\overline{MN}$ oarecare, raza cercului considerat fiind chiar $\overline{MN}$.

RADU BĂDESCU.

5208. Două cercuri egale au o coardă comună $\overline{AB}$. Pe unul din cercuri se ia un punct fix C, iar pe celalt un punct mobil M. Se cere:

1°. Înfăşurătoarea dreptei ce uneşte proiecţia M' a lui M pe AB cu mijlocul M'' al segmentului $\overline{MC}$.

2°. Să se construiască punctul de contact ω al dreptei M'M'' cu înfăşurătoarea sa.

3°. Să se găsească înfăşurătoarea paralelei din ω la raza punctului M.

CPT. MIHAIL I. FOCŞENEANU.

5209. Punctul A, mobil pe cercul O_1, este solidar legat cu punctul B, mobil pe cercul O_2 în acelaşi plan cu primul.

Să se studieze mişcarea punctului A când punctul B descrie cercul O_2 cu iuţeala unghiulară ω.

ION S. ANTONIU.

ERATĂ. 1°. Problema a doua propusă la pag. 53 numărul precedent are numărul de ordine 5181, iar nu 5081.

2°. In No. 11 din Iulie 1939, pag. 572, *rândul 10,* în loc de e^{ay-bx}, a se citi e^{-ay-bx}; iar în *rândul 11,* în loc de x/c a se citi $x/(ab-c)$.

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Aldea V. Mircea (4923, 68, 160, 91); *Badea A. Ioan* (5191); *Bodnărescu M. Horia* (5169, 86, 88, 91); *Boiangiu D. D-tru* (5032, 120, 52, 67, 91, E); *Cetăţeanu Stelian* (4279, 373, 765, 881, 5075, 142, 52, 60, 86, 87, 91, P); *Cherţman Mozes* (5152); *Chiţulescu I. Traian* (5191); *Ciurescu Florin* (5191); *Crăciunescu I. Mioara* (5191); *Dimitriu C. Călin Ioan* (4880, 5160, E); *Drăghicescu P. Paul* (5166); *Eftimie D. C.* (5191); *Gheorghiu E. Octavian* (5033, 79, 152); *Gheorghiu P. Petre* (5159); *Jiletcovici G. Alex.* (5136, 43, 50, 52, 53, 59, 66); *Moessner A.* (N); *Pantelimon Const.* (5135, 36, 43, 50, 52, 53, 59, 60, 66, 67, 71, 72, 76); *Pascaru I. Const.* (5152, 59, 60, 66); *Petrescu V. Achile* (5152, 59); *Popa D. Mircea* (5042, 119, 28, 36, 43, 44, 45, 50, 52, 53, 59, 60, 68, 71, 74, 75, 76); *Popa N. Aurel* (5150, 52, 53, 66); *Popescu Zorica N. Alex.* (5145, 68, 72, 76); *Potopeanu Gh.* (5159); *Rohr I. Alex.* (5116, 35, 36, 43, 45, 50, 52, 53, 59, 60, 68, 70, 72, 76); *Şeibulescu Const.* (5191); *Ştefănescu D. Nicolae* (5153, 76, 86, 87, 91); *Ştefanovici I. Mircea* (5152, 91); *Trefilov I. Mihail* (5025, 78, 160, 91); *Trofin I. Petre* (5171, 73, 91); *Turcu R. Sandu* (5135, 43, 52, 66); *Văduva Fl. Marin* (5032, 122, 35, 52, 53); *Vasilescu Stabu Al. M.* (4923, 170); *Vasiliu C. Ion* (A, P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică* Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*
Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 50 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

C. 58.578.

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNII

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLV

NUMĂRUL 3. — NOEMVRIE 1939

SUMARUL

1. Impresiile contelui Samuil Teleki despre matematicianii străini . . . . . *Victor Marian.*
2. Simultaneitate şi ulterioritate (urmare şi sfârşit) . . . . . *T. Vescan.*
3. Egalităţile multigrade . . . . . *M. Ghermănescu.*
4. Raport asupra premiului „Vasile Conta" *Comisiunea pentru premii.*
5. Note Matematice: 10 — 12.
6. Chestiuni de examen.
7. Bibliografie.
8. Cereri.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 1987, 2298, 2803, 2828, 3509, 3775, 4852, 4933, 5062, 5103, 5148.
11. Exerciţii 7 — 9.
12. Probleme propuse: 5210 — 5224.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1939

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **D. Stoica**, Inginer; Cpt. Comandor-Inginer **Gr. Zapan**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Secretarul General al Ministerului Lucrărilor Publice şi Comunicaţiilor, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1939 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 5182, 83, 84, 85, 89, 90, 92, 93, 95, 96, 97, 99, 200, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

IMPRESIILE CONTELUI SAMUIL TELEKI DESPRE MATEMATICIANI STRĂINI

(Cu ocazia bicentenarului naşterii lui TELEKI)

I. Studii la Bâle

Dela contele SAMUIL TELEKI (1739—1822), fost cancelar al Ardealului, pe lângă activitatea politică şi culturală, şi în afară de vestita bibliotecă din Târgul-Mureş, au rămas două lucruri care interesează istoria matematicilor. Ele sunt *Carnetul de călătorie*[1]) din anii 1759—1763, şi *Corespondenţa*[2]) sa, din anii 1761—1769, cu unii matematicieni străini. In cele ce urmează mă voiu mărgini la *Carnetul de călătorie*, atât de bogat în observaţii şi aprecieri personale interesante asupra matematicianilor străini cu care contele a fost în contact, încât ele merită să fie spicuite din cuprinsul atât de variat al *Carnetului* şi aduse la cunoştinţa lumii matematice.

La 7 Noemvrie 1769 contele S. TELEKI, având abia 20 de ani şi o pregătire intelectuală sumară, pleacă, împreună cu prietenul său IOSIF KOVÁTS[3]), la studii în Apus, unde rămâne timp de aproape patru ani, oprindu-se pe rând în Elveţia, Olanda şi Franţa.

Prima etapă este oraşul Bâle, unde cunoaşte vestiţii matematicieni, fraţii ION şi DANIEL BERNOULLI, profesori la universitatea de acolo. Din cauza totalei lipse de pregătire în domeniul matematicii, TELEKI îşi dă seama că nu poate urma cu folos cursurile dela Universitate; de aceea ia ore particulare mai întâi dela ION BERNOULLI, timp de 17 luni, apoi timp de două luni ore de mecanică dela DANIEL BERNOULLI. Lui ION BERNOULLI i-a plătit 51 de galbeni imperiali, iar lui DANIEL 6 galbeni, în total.

In ceea ce priveşte pe cei doi BERNOULLI amintiţi aici, e vorba de fiii lui ION BERNOULLI, întemeietorul dinastiei de matematicieni, care timp de un veac au ilustrat catedra de matematici

1) Ifj. BIÁS ISTVÁN, *Gróf* TELEKI SÁMUEL *erdélyi kanczellár úti naplója*, Târgul-Mureş, 1908.

2) GULYÁS KÁROLY, *Gróf* TELEKI SÁMUEL *levelezése külföldi mathematikusokkal, Mathematikai és Fizikai Lapok*, 1912, pag. 194.

3) IOSIF KOVÁTS (1732—1795), dela 1767 a fost profesor de matematici la Colegiul reformat din Aiud.

a Universităţii din Bâle. Familia BERNOULLI prezintă de fapt fenomenul unic în istoria matematicii de a fi moştenit geniul matematic din tată în fiu timp de mai multe generaţii. Din cauza identităţii de nume a unora din ei se obişnuieşte a-i distinge, ca şi pe regi, prin numere romane alăturate pronumelui. Astfel cei dintâi membri iluştri ai familiei au fost IACOB I (1654—1705), şi fratele acestuia ION I (1667—1748). Primul nu a avut copii; ION I însă a avut trei fii şi anume pe NICOLAE (1695—1726), DANIEL (1700—1782) şi ION II (1710—1790). DANIEL de asemenea nu a avut urmaşi, ION II însă a avut ca urmaşi pe ION III (1744—1807) şi pe IACOB II (1759—1789).

Relaţiile dintre TELEKI şi cei doi BERNOULLI au fost foarte cordiale, ceea ce se datoreşte, nu numai firii blânde şi amicale a celor doi savanţi, ci şi situaţiei sociale a lui TELEKI. Conţii maghiari erau bine văzuţi la Bâle, ceea ce s'a arătat îndeosebi cu ocazia jubileului de 300 de ani a Universităţii din Bâle, serbat în ziua de 15 Aprilie 1760, când în procesiunea festivă dela Universitate la Catedrală, S. TELEKI, împreună cu vărul său ADAM şi nepotul său IOSIF TELEKI, deşi numai studenţi, au fost aşezaţi în frunte, imediat după Rectorul Universităţii.

Impresia profundă produsă de cei doi BERNOULLI asupra tânărului conte este atât de profundă, încât în notele sale nu vorbeşte despre dânşii decât cu cea mai mare admiraţie şi recunoştinţă. Dar să dăm cuvântul lui TELEKI (pag. 45):

„La 4 Martie 1760 am început un colegiu matematic particular la d-l ION BERNOULLI, *care este profesor ordinar de matematică. Din copilărie am dorit incontinuu să învăţ matematica, dar până acum nu am avut posibilitatea; acum însă Dumnezeu, care în mod milostiv mi-a orânduit toate lucrurile, mi-a dat şi această posibilitate şi anume una pe care, înafară de Bâle numai cu greu, sau deloc, nu aşi fi putut-o afla, pentrucă în ziua de azi e greu să afli matematiciani de talia lui* BERNOULLI; *ba chiar nu cunosc pe nimeni pe care l'aş putea asemăna cu ei, care nu au niciun păcat decât acela că nu scriu lucrări (cum a făcut şi a muncit tatăl lor, vestitul* ION BERNOULLI). *Este adevărat că au scris de multe ori pentru premii şi au câştigat multe premii faţă de alţii, şi au şi tipărit aceste lucrări, dar afară de aceasta nu au scris mult. Cel mai bătrân dintre ei* DANIEL BERNOULLI *a*

scris o **Hidrodinamică** [1]) *în 4°, şi ceva* **Exercitationes mathematicae** [2]). *Cel mai tânăr,* ION BERNOULLI *însă, înafară de lucrările făcute pentru premii, nu a scris cărţi, dar în loc de scrieri a adus folos lumii ştiinţifice prin cursurile sale sârguincioase şi înălţătoare. E adevărat că după* NEWTON şi LEIBNITZ, *matematica nu a luat avânt mai mare prin nimeni decât prin* BERNOULLI, *anume prin tatăl lor* ION BERNOULLI *şi prin fratele acestuia* IACOB *şi prin cei doi fraţi, azi în viaţă,* DANIEL *şi* ION BERNOULLI. *Eu mă simt fericit că am putut avea astfel de profesori de matematică. Voind astfel să profit de această ocazie pentru a învăţa matematica din temelii, am început lecţiile cu aritmetica, în care nu am urmat nici un autor, ci mi-a predat-o* ION BERNOULLI *din cap şi după notiţele sale. Terminând aceasta am început geometria şi am învăţat-o după geometria lui* PARDIES [3]). *Terminând şi pe aceasta, am învăţat trigonometrie după trigonometria lui* TACQUET [4]). *Apoi a predat principiile de algebră după* ERASMUS BARTHOLINUS [5]). *Terminând cu ajutorul lui Dumnezeu şi aceasta, a început să predea pe* WOLFF [6]) *începând cu capitolul III al Elementelor de analiză până la sfârşit la Calculul diferenţial, apoi de asemenea a predat, tot după* WOLFF, *până la capăt, Calculul diferenţial, Calculul diferenţelor finite, Calculul integral, exponenţial şi infinitezimal într'un chip foarte mulţumitor şi edificator. Mărturisesc că nu mi-aşi fi putut închipui ca cineva să posedă o aşa de mare uşurinţă şi promptitudine în matematică, cum o are omul acesta şi ceea ce ştiu din matematică, după Dumnezeu, i-o atribui lui şi-i sunt mulţumitor până la moarte. Terminând în acest fel cursul de matematici spre sfârşitul lui Mai, pentru ca totuşi să mai pot profita din lecţiile acestui mare matematician, am început să învăţ dela el lecţiile tatălui său, pe care le-a predat marchizului de* L'HOSPITAL *şi care sunt tipărite în volumul al treilea al operelor tatălui său* [7]). *Dar nu am putut continua mult timp, fiindcă la*

1) Apărută la Strasbourg în 1738.
2) Apărute în 1724.
3) *Éléments de Géométrie*, Paris 1671.
4) A. TACQUET, *Elementa Euclidea Geometriae planae ac solidae*, 1654.
5) *Principia matheseos universalis*, Leyden, 1651.
6) *Elementa matheseos universae*, Halae, 1713—15, 2 vol.
7) *Opera omnia*, Lausanne, 1742, 4 vol.

sfârșitul lui Iunie a trebuit să întrerup din cauza pregătirii mele pentru călătoria în Olanda. In total am urmat timp de șaptesprezece luni colegiile particulare ale acestui bun profesor, deoarece în luna Februarie anul trecut mergeam la dânsul zilnic câte două ore ca să pot urma mai bine cursul pe care har Domnului l-am și absolvit spre întreaga mea mulțumire.

Pe de altă parte, d-l DANIEL BERNOULLI *nu obișnuia să dea colegii particulare nimănui. Dar vara obișnuia să predea în sala de fizică, odată pe săptămână, pentru public, fizică experimentală, foarte frumos; și la aceste colegii am participat în cele două veri și le-am ascultat cu multă plăcere. Dar după ce la fratele său am făcut mari progrese în matematica superioară și în calcul, am avut dorința să profit ceva și din lecțiile acestui mare matematician de rară învățătură. De aceea, când între altele ocazional în vara aceasta, într'o seară, mă plimbam în piața Sf. Petru cu d-l* DANIEL BERNOULLI *și vorbeam cu el de unele chestiuni de matematică și despre studiile mele i-am spus intenția mea, că aș dori foarte mult să iau la dânsul un colegiu particular de mecanică, fiindcă deja cunosc calculul într'atâta în cât să înțeleg și să învăț mecanica (fiind adevărat că o parte a matematicii nu se poate învăța așa de bine fără calcul, ca prin calcul). La aceste cuvinte imediat mi-a promis toată bunăvoința sa, deoarece acest om admirabil m-a iubit dela început și mi-a arătat multă bunăvoință și încă înainte de aceea am fost adesea la dânsul și dânsul de asemenea a venit la mine și mărturisesc că ori de câte ori eram cu dânsul, din conversațiile lui am profitat foarte mult, și dorea să-mi ajute progresul în matematică; și orice conversație cu dânsul era pentru mine o lecție. De multe ori vara avea obiceiul să iasă seara la plimbare în piața Sf. Petru (locul cel mai plăcut de plimbare în Bâle, fie singur, fie cu fratele său, și întâlnindu-ne acolo ne plimbam împreună până pe la ora 10, uneori chiar până la 11, și cu această ocazie niciodată nu vorbia despre alte lucruri decât conform obiceiului său aducea vorba despre matematici, fizică și vorbea despre acestea cu multă competință și nicicând nu am avut ocazia să ascult un om mai distins în predare și în vorbire. Chiar și lucrurile cele mai dificile le predă într'un mod extrem de ordonat și clar. La 18 Mai 1761 am început să iau la acest om admirabil și savant ore particulare*

pe care le-a ascultat și d-l ALEXA KENDEFFI *împreună cu mine și le-aș fi ascultat și urmat cu multă plăcere până în ziua plecării mele, dar a trebuit să le întrerup împotriva speranțelor și voinței mele, fiindcă dându-i-se o bună ocazie, în după amiaza acelei zile d-l* DANIEL BERNOULLI *a plecat în Elveția în chestiuni particulare, călătorie care spre nenorocirea mea nu a putut-o amâna. In ziua plecării însă dela ora 10 până la 12 încontinuu a vorbit* **de legibus motus et viribus vivis,** *foarte interesant, dorind ca întru cât se poate să completeze ceea ce era silit să neglijeze din cauza călătoriei. Iar la ora 12 ne-am despărțit foarte cordial sărutându-ne și astfel a trebuit să mă despart de bunul meu profesor, pe care veșnic îl voi stima, iubi și căruia îi datorez foarte mult în studiile mele. La despărțire iarăși m-a rugat ca ceea ce voi învăța fiind departe și nu înțeleg să-l întreb prin scrisori.*

... colegiile la cei doi BERNOULLI *le-a ascultat împreună cu mine și d-l* IOSIF KOVÁTS *care a realizat progrese frumoase în matematici, și din partea mea consider ca un mare noroc, că în aceasta am putut servi domniei sale și prin domnia sa, cu voia lui Dumnezeu țării și neamului meu".*

Iată cum descrie despărțirea de ION BERNOULLI (pag. 51). *„Aceasta a avut loc în dimineața zilei de 24 Iulie, la ora 7 și jumătate, ora din Bâle, în ajunul căreia dimineața m'am dus la d-l* ION BERNOULLI *ca să-mi iau rămas bun, dar atunci nu a voit să accepte despărțirea, ci înspre seara aceleiași zile a venit dânsul la mine ca să-și ia adio și sărutându-ne; scumpul meu profesor și-a luat rămas bun dela mine și eu dela dânsul".*

Tot în Bâle face cunoștința fizicianului SOCIN [1]) cu care de asemenea se împrietenește și ale cărui cursuri le ascultă. Despre acestea scrie (pag. 44): *„Aproape trei luni am urmat împreună cu alții un colegiu experimental la d-l doctor* SOCIN".

(Va urma) VICTOR MARIAN.

---

1) A. SOCIN (1729—1808). A fost docent privat la Bâle în anii 1751—1765.

SIMULTANEITATE ŞI ULTERIORITATE

ELEMENTELE AXIOMATICEI TIMPULUI

(Urmare dela pagina 63)

3⁰. **Timpul discontinuu al teoriei cuantelor şi axiomatica noţiunii de anterioritate.** Noţiunile de timp absolut şi relativ presupun scurgerea uniformă a acestui fel de proprietate a realităţii. Insă reacţiunile chimice şi fiziologice, care din cauza atomismului materiei, au loc în mod sacadat, întrerupt în perceperea noţiunii de timp şi însuşi a fenomenului de timp, în prezentarea sa, l-au făcut pe W. K. CLIFFORD [1]) să presupună pentru prima oară existenţa discontinuităţii sale.

Această ideie, din motive de sine de înţeles, a fost dată uitării.

Tot noţiunea de cauzalitate, însă de data aceasta determinismul statistic [2]) al fenomenelor a desgropat-o şi a adus-o la lumina zilei.

In teoria clasică, *starea macroscopică* a unui sistem de particule, adică totalitatea fenomenelor măsurabile, se poate determina cunoscând proprietăţile fiecărei particule aparte, adică *starea microscopică*. O asemenea particulară este definită prin massa, poziţia şi iuţeala sa. Fie m massa, s parametrul care determină poziţia şi v iuţeala particulei. Să considerăm într'un plan un sistem rectangular de axe de coordonate, având în abscisă s şi în ordonată $p = mv$, cantitatea de mişcare a particulei. Orice stare a particulei se va reprezenta în acest plan, numit după GIBBS: *planul extensiunii în fază*. Stării microscopice a sistemului îi va corespunde în reprezentarea aceasta un sistem de puncte A, B, C,... situate în planul de extensiune în fază.

Mărimile macroscopice fiind efectul mediu, efectul statistic al proprietăţilor particulare este evident că unei stări microscopice îi corespunde o singură stare macroscopică. Reciproca nu este adevărată: fiindcă particulele A şi B, de exemplu, fiind identice, pot fi schimbate între ele, fără ca starea macroscopică să se schimbe. Asemenea sisteme echivalente de stări microscopice se numesc *complexiuni*.

1) *Lectures and essays* I, p. 112, 1879.

2) Pentru mecanica statistică se poate urmări expunerea mea anterioară: *Elementele teoriei gazelor electronice,* publicată în *«Ştiinţă şi Progres»* în 1936, T. III, N-rul 3/4, p. 63—75.

In teoria clasică am admis că putem cunoaşte cu procedeele noastre de investigaţie starea iniţială a particulelor şi deduce de aici, prin aplicarea principiilor mecanicii raţionale, configuraţia ulterioară a sistemului. Insă teoria cuantelor ne-a condus la o negare a acestei presupuneri, la principiul lui HEISENBERG [1]).

Să presupunem că în măsurile noastre facem o eroare de ε_s asupra coordonatei s şi o eroare ε_p asupra cantităţii de mişcare p. Mecanica nouă, cercetând teoria complexiunilor, stabileşte că între aceste două mărimi există relaţia

$$\varepsilon_s \times \varepsilon_p \geqq h \tag{4}$$

h fiind constanta lui PLANCK.

Formula aceasta este chiar expresiunea *principiului indeterminării* [2]) al lui HEISENBERG, şi ne spune că este imposibil să putem măsura cu exactitate iuţeala şi să definim în acelaş timp poziţia unei particule: Intr'adevăr, dacă eroarea asupra iuţelei: ε_p este foarte mică, ε_s: eroarea asupra coordonatei de poziţie trebue să fie destul de mare, pentru ca produsul $\varepsilon_s \varepsilon_p$ să rămână superior lui h. Referindu-ne la reprezentarea de mai înainte, principiul acesta ne spune că punctul reprezentativ al particulei se va găsi undeva într'o celulă de arie h a planului de extensiune în fază. Modificând procedeele noastre de investigaţie vom putea schimba numai forma celulei, nedeterminarea se va păstra şi pe mai departe. Pe lângă un ε_s dat, celula are forma unui dreptunghiu limitat prin

$$\left(s' - \frac{\varepsilon_s}{2} \quad , \quad s' + \frac{\varepsilon_s}{2}\right) \text{ pentru abscisă}$$

şi prin $$\left(p' - \frac{h}{2\varepsilon_s} \quad , \quad p' + \frac{h}{2\varepsilon_s}\right) \text{ pentru ordonată,}$$

1) WERNER HEISENBERG: *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik Zeitschrift für Physik*, T. 43, p. 172, 1927.

2) Această expresie este denumită pe nedrept un principiu de incertitudine, deoarece ea ne relevă în mod riguros un singur lucru şi anume faptul că măsurările noastre sunt şi în principiu aproximative. Nu este deci negarea cauzalităţii şi a determinismului, ci tocmai o nouă formulare a lor, în conformitate cu cerinţele actuale ale ştiinţei de introducere a unui determinism statistic în locul celui rigid.

unde s' şi p' sunt valorile cele mai probabile ale mărimilor s şi p.

Aplicând principiul lui HEISENBERG electronului, în sensul teoriei lui DIRAC, fizico-matematicienii sovietici V. AMBARZUMIAN [1]) şi D. IWANENKO [2]) au ajuns, în mod riguros, la noţiunea unui timp discontinuu. Pornind într'adevăr dela faptul că proprietăţile electronului (mărimea; iuţeala, inferioară lui c; etc....) nu pot depăşi o anumită limită maximă ei constată că în realitate Universul fizic constitue o reţea specială spaţio-temporală, analoagă reţelelor cristaline, în care distanţa spaţială minimă este

$$\frac{h}{mc} \cong 2{,}5 \times 10^{-10}\,\text{cm.},$$

iar intervalul de timp „minimum", numit, după A. MARKOFF şi „*chron*",

$$\frac{h}{mc^2} \cong 8{,}3 \times 10^{-21}\,\text{sec.}$$

Şi pentru acest tip de timp şi spaţiu discontinuu trebue să axiomatizăm noţiunile de simultaneitate şi mai ales de ulterioritate. In această axiomatizare ne vom folosi de o lucrare a lui MARKOFF [3]), cu totul abstractă şi clădită mai mult din punct de vedere geometric, decât fizic.

Vom porni bine-înţeles dela aspectul de „*Kontinuum*" al Universului fizic, pe care în conformitate cu teoria lui TH. KALUZA [4])

---

1) AMBARZUMIAN şi IWANENKO: *Zur Frage nach Vermeidung der unendlichen Selbstrückwirkung des Elektrons, Zeitschrift für Physik.* T. 64, p. 563, 1930.

2) IWANENKO: *Die Beobachtbarkeit in der Diracschen Theorie, Zeitschrift für Physik,* T. 72, p, 621, 1931.

3) *Über die Ableitbarkeit der Weltmetrik aus der „Früher als"-Beziehung. Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion,* Martie 1932.

4) *Zur Unitätsproblem der Physik, Berlinner Sitzungsberichte,* 1921, p. 966.

L. de BROGLIE: *L'univers à cinq dimensions et la mécanique ondulatoire, Journal de Physique,* 1927, p. 65.

O. KLEIN: *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie, Zeitschrift für Physik,* T. 37, p. 895.

îl vom considera ca un spaţiu cu cinci dimensiuni, în care metrica [1]) este dată de expresiunea tensorială

$$(5) \qquad d\sigma^2 = \sum_{k=1}^{5} \left[\sum_{i=1}^{5} \gamma_{ik}\, dx^i\, dx^k \right] = \gamma_{ik}\, dx^i\, dx^k$$

cele cinci coordonate contra-variante x^i fiind alese în aşa fel încât varietatea quadri-dimensională

$$x^5 = \text{const.}$$

să corespundă Universului spaţio-temporal al lui EINSTEIN şi MINKOWSKI.

In această varietate, o suprafaţă a spaţiului cu cinci dimensiuni, elementul de linie este dat de formula

$$(6) \qquad ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k \qquad (\text{cu } i,\ k = 1, 2, 3, 4)$$

unde

$$g_{ik} = g_{ki}$$

sunt cele zece potenţiale gravifice ale lui EINSTEIN, cantităţile γ_{ik} fiind alese în aşa fel încât γ_{ik} să se reducă la g_{ik} pentru $x^5 = 0$, iar matricea $\| \gamma_{ik} \|$ să fie şi ea simetrică.

In cazul particular al Universului lui EINSTEIN-MINKOWSKI avem:

$$(7) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\, dt^2$$

şi formula $ds^2 = 0$ corespunde la legea de propagare a luminii.

KALUZA n'a dat nicio semnificaţie specială coordonatei a cincea, a postulat-o matematic, pentru a da o reprezentare geometrică mai convenabilă teoriei relativităţii, în aşa fel încât proprietăţile fizice să fie independente de această introducere, a coordonatei a cincea. In lucrarea mea de teză, ţinând seamă de faptul că nu atât coordonatele, situaţia în spaţiu a unui eveniment, cât mişcarea lui, definită prin proprietăţile impulsului este mai importantă, coordonata

---

1) Metrica unui spaţiu cu trei dimensiuni faţă de axe rectangulare este:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

iar a unei suprafeţe

$$ds^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2.$$

Acest sens trebuie dat cuvântului de *„metrică"* de aici.

a cincea am postulat-o în aşa fel, încât componenta covariantă corespunzătoare a vectorului energie-impuls $\vec{p} = m\vec{v}$ a spaţiului lui KALUZA să fie dată de relaţia

$$p_5 = k\mu \tag{8}$$

unde k este o constantă universală egală cu $1{,}6 \cdot 10^{13}$ unităţi C. G. S., iar μ sarcina electrică a particulei materiale, în mişcare, considerate.

In această metrică continuă, cu un sens bine-determinat fizic, a unui spaţiu cu 5 dimensiuni, generalizând noţiunea de spaţiu şi timp a mecanicei raţionale, trebue să axiomatizăm, în primul rând, prin intermediul simultaneităţii şi ulteriorităţii, noţiunea de timp discontinuă, pretinsă de teoria cuantică.

Să însemnăm prin $E = E(t)$ un eveniment fizic, adică un punct al spaţiului cu cinci dimensiuni.

Să presupunem că un eveniment A este anterior unui eveniment B. In acest caz există totdeauna o curbă a spaţiului lui KALUZA pentru care

$$E(1) = B \quad \text{şi} \quad E(0) = A$$

şi pentru care pe lângă $0 \leqq t \leqq 1$, avem în acelaş timp

$$d\sigma^2 \geqq 0.$$

Invers, fiind dată o asemenea curbă $E = E(t)$ există întotdeauna două evenimente A şi B, pentru care sau A este anterior lui B, sau B este anterior lui A.

Notând

$$A \sqsubset B$$

faptul că evenimentul A este anterior lui B, în relativitatea restrânsă sunt satisfăcute următoarele două cerinţe pentru un anumit sistem de referinţă:

I. *Axioma de simetrie*:

Dacă $A \sqsubset B$, atunci $B \sqsubset A$ este imposibil.

II. *Axioma de transitivitate*:

Dacă $A \sqsubset B$, şi $B \sqsubset C$, atunci şi $A \sqsubset C$.

Fie:

$$A \equiv E_0 \sqsubset E_1 \sqsubset E_2 \ldots \sqsubset E_{n-1} \sqsubset B_n \equiv B \tag{9}$$

un şir de evenimente ale spaţiului lui KALUZA.

Discontinuitatea şi infinitatea timpului le vom introduce prin două cerinţe speciale:

Postulatul I ne spune că între două evenimente oarecare A şi B există un număr finit de termeni ai şirului (9); iar

Postulatul II că pentru două evenimente oarecare A şi B, există întotdeauna alte două I şi S în aşa fel încât să avem:

$$I \subset A,\ I \subset B \quad \text{şi} \quad A \subset S,\ B \subset S.$$

Fie t^* (A, B), o funcţiune numerică întreagă a evenimentelor A şi B, să însemne într'adevăr t^*(A, B) numărul termenilor şirului (9) mărit cu unu.

Funcţiunea t^* este deci pozitivă, dar şi simetrică:

$$t^*(A, B) = t^*(B, A);$$

ba chiar mai mult, în virtutea primului postulat de mai sus, avem întotdeauna

$$t^*(A, B) \geqq 1. \tag{10}$$

(In cazul celui de al doilea postulat de ex. $t^*(I, S) \geqq 2$).

In cele ce urmează vom arăta că funcţiunea discontinuă t^* se poate racorda cu uşurinţă metricii spaţio-temporale [1]) relativiste şi deci „chron"-ul lui MARKOFF, introdus prin şirul (9), are un sens riguros în teoria lui KALUZA.

Noţiunea de anterior o vom alege în aşa fel încât mulţimea evenimentelor E să fie isomorfă mulţimei t^*, în ceea ce priveşte distribuţia metrică, adică să formeze un asamblu numărabil oarecare E, care să satisfacă celor patru cerinţe de mai înainte.

Vom zice, în consecinţă, că un eveniment A$(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5)$ este anterior lui B$(y^1, y^2, y^3, y^4, y^5)$, când următoarele inegalităţi sunt satisfăcute

$$\begin{cases} x^4 < y^4 \\ (y^4 - x^4)^2 - \Sigma_i' (y^i - x^i)^2 \geqq 1 \end{cases} \tag{11}$$

unde Σ_i' înseamnă că însumarea la i trebue să fie făcută pentru

---

1) Pentru importanţa mulţimilor discontinue se recomandă cu insistenţă lucrarea lui JEAN-LOUIS DESTOUCHES: *Le rôle des espaces abstraits en Physique nouvelle, Actes scientifiques*, Hermann, No. 223, 1935.

toate cifrele dela 1 la 5, cu excepţia lui 4; şi unde coordonatele $x^1, x^2, \ldots$ au semnificaţiile deja prevăzute:

$$(12) \qquad x^1 = X \ , \quad x^2 = Y \ , \quad x^3 = Z \ , \quad x^4 = cT,$$

iar x^5 este definit prin impulsul său. (Vezi formula 8).

Axioma I este satisfăcută din cauza asimetriei semnului $<$ de inegalitate.

Axioma II şi postulatul I sunt satisfăcute dacă putem să arătăm că pentru un şir (9) de evenimente, avem:

$$(13) \qquad x^4 < y^4, \text{ şi } (y^4 - x^4)^2 - \Sigma'(y^i - x^i)^2 \geqq n^2.$$

Prima inegalitate rezultă din transitivitatea semnului $<$.

Pentru a doua fie $z_k^1, z_k^2, \ldots, z_k^5$ coordonatele evenimentului E_k. Vom avea succesiv

$$(z_{k+1}^4 - z_k^4)^2 - \Sigma_i'(z_{k+1}^i - z_k^i)^2 \geqq 1 \qquad \text{pentru } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

şi deci

$$z_{k+1}^4 - z_k^4 \geqq \sqrt{1 + \Sigma_i'(z_{k+1}^i - z_k^i)^2}.$$

Ori

$$(y^4 - x^4)^2 = (z_n^4 - z_0^4)^2 = \left[k \sum_0^{n-1} (z_{k+1}^4 - z_k^4)\right]^2 =$$

$$= k, l \sum_0^{n-1} (z_{k+1}^4 - z_k^4)\,(z_{l+1}^4 - z_l^4)$$

şi prin urmare

$$(y^4 - x^4)^2 \geqq \sum_{k,\,l=0}^{n-1} \sqrt{[1 + \Sigma_i'(z_{k+1}^i - z_k^i)^2]\,[1 + \Sigma_i'(z_{l+1}^i - z_l^i)^2]}.$$

Insă în virtutea inegalităţii lui SCHWARZ, relaţia aceasta se mai poate scrie încă

$$(y^4 - x^4)^2 \geqq \sum_{k,\,l=0}^{n-1} [1 + \Sigma_i'(z_{k+1}^i - z_k^i)\,(z_{l+1}^i - z_l^i)]$$

de unde scoatem că

$$(y^4 - x^4)^2 \geqq n^2 + \Sigma_i'\left(\sum_{k,\,l=0}^{n-1} [z_{k+1}^i - z_k^i]\ [z_{l+1}^i - z_l^i]\right) =$$

$$= n^2 + \Sigma_i'\left[\sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1}^i - z_k^i)\right]^2 = n^2 + \Sigma_i'(z_n^i - z_0^i)^2$$

adică tocmai ceea ce era de demonstrat.

Din a doua inegalitate (13) conchidem că

$$n \leqq \sqrt{(y^4 - x^4)^2 - \Sigma_i' (y^i - x^i)^2}$$

de vreme-ce însă, cu privire la (5) avem

$$\sigma(\vec{y}, \vec{x}) = \sqrt{(y^4 - x^4)^2 - \Sigma_i' (y^i - x^i)^2} \equiv \sigma(\mathrm{B}, \mathrm{A})$$

şi

$$t^*(\mathrm{B}, \mathrm{A}) = n$$

urmează deci că

$$t^*(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \leqq \sigma(\mathrm{A}, \mathrm{B})$$

σ fiind măsura metricei în spaţiul lui KALUZA.

De aici rezultă că metrica spaţiului lui KALUZA, şi deci continuitatea din relativitate, poate fi aproximată printr'un spaţiu-timp discontinuu, bazat pe concepţiunile lui MARKOFF şi IWANENKO.

In sfârşit, notând cu

$$\mathrm{I}^1 = x^1 \ , \ \mathrm{I}^2 = x^2 \ , \ \mathrm{I}^3 = x^3 \ , \ \mathrm{I}^4 = x^4 - 1 \ , \ \mathrm{I}^5 = x^5$$

şi

$$\mathrm{S}^1 = y^1 \ , \ \mathrm{S}^2 = y^2 \ , \ \mathrm{S}^3 = y^3 \ , \ \mathrm{S}^4 = y^4 + 1 \ , \ \mathrm{S}^5 = y^5$$

coordonatele a două evenimente I şi S, constatăm că avem:

$$\mathrm{I} \sqsubset \left\{ \begin{matrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \end{matrix} \right. \text{ şi } \left. \begin{matrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \end{matrix} \right\} \sqsubset \mathrm{S}$$

x^i fiind coordonatele evenimentului A, y^i ale lui B, iar $\mathrm{A} \sqsubset \mathrm{B}$.

In acest fel inegalităţile (11) satisfac şi postulatul al doilea de infinitate şi prin urmare noţiunea de „ulterioritatea" a timpului mecanicei clasice este axiomatizată şi pentru timpul discontinuu al teoriei cuantelor.

Observaţie: Lucru remarcabil: inegalităţile (11) sunt invariante, pe lângă anumite condiţii, pentru transformarea lui LORENTZ, definită prin formulele (3), ceea ce încadrează noţiunea de timp discontinuă şi în teoria relativităţii restrânse. Nu insistăm, fiindcă această chestiune priveşte mai mult fizica teoretică, decât axiomatica timpului.

Concluzii: Evoluţia noţiunii de timp trece deci prin o serie de contradicţii. Acest aspect în aparenţă antimonial al realităţii materiale are din punct de vedere filozofic o structură profund dialectică. Ori contradicţiile ne conduc la schimbări, iar schimbările nu pot avea loc în spaţiu. Schimbarea spaţiului ca relaţie

logică nu poate fi decât timpul. Reflectând asupra acestor afirmaţii, ne putem da seama că pentru timp n'avem o coordonată specială; generalizarea matematică a unui spaţiu cu 4 sau 5 dimensiuni, are cu totul alt sens, decât cel de existenţă efectivă în realitate. Pentru timp n'avem un simţ special cum avem pentru cele 3 dimensiuni ale spaţiului în canalele semi-circulare; senzaţia de timp derivă din perceperea schimbărilor. Ori *noţiunile de spaţiu, timp, schimbare şi materie nu pot fi concepute separat;* aceasta explică de ce evoluţia noţiunii de timp a fost determinată mereu de cunoştiinţele noastre asupra proprietăţilor materiei, substratul unic al realităţii.

In privinţa acestor constatări iată în câteva linii schema expunerii anterioare:

Dilema de spaţiu şi timp absolut sau relativ porneşte dela:

Contradicţia I { dintre: *invariabilitatea* duratei evenimentelor cu sistemul de referinţă *(teza variaţiei* unei coordonate: timpul, ca durată, *distanţă în timp, neadmisă)*
şi dintre: *variabilitatea distanţelor în spaţiu* ale evenimentelor cu sistemul de referinţă *(antiteza* variaţiei unei coordonate: spaţiul, ca distanţă, *admisă)*

Contradicţia II { a *măsurării lungimilor şi duratelor* şi
„ „ *iuţelii luminii*

imposibile în acelaş timp fără o ipoteză suplimentară, a relativităţii. Studiate cu ajutorul principiului cauzalităţilor, din care derivă, ne conduc la o *sinteză* nouă a *timpului continuu relativist al lui* EINSTEIN, care la rândul său acţionează asupra principiului cauzalităţii.

Timpul continuu, aspect al realităţii, este contrar percepţiei sale şi existenţei sale, legată de *discontinuitatea* materiei, de unde noţiunea unui *timp discontinuu,* necesitat de reacţiile fiziologice discontinue şi de delimitarea analoagă a lumii exterioare, care prin *metrica* de mai înainte este suficient de „densă" pentru a da aspectul unei continuităţi pretinsă de intuiţia noastră şi de felul nostru de a concepe, în mod continuu, calculele, în care intră, de-obiceiu în mecanică, timpul.

T. VESCAN.

EGALITĂȚILE MULTIGRADE

D-nii A. GLODEN și A. MOESSNER, a căror virtuozitate în deslegarea ecuațiilor diofantiene s'a făcut cunoscută și în coloanele *Gazetei*, se ocupă în special de rezolvarea egalităților *multigrade*, adică de rezolvarea în numere întregi a sistemului de ecuații

$$(1) \qquad x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k = a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k,$$

unde k ia valori întregi în număr mai mic ca n. D-lor au dat exemple remarcabile de astfel de egalități și metode destul de generale pentru a deduce asemenea egalități, unele din altele, fără ca totuși să reușească a găsi formulele care să dea soluția cea mai generală a problemei.

In cele ce urmează, voi da rezolvarea generală a unei părți din această problemă anume, voi rezolva sistemul (1), în numere întregi, pentru $k = 1, 2$, adică voi considera sistemul

$$(2) \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n = A_n, \\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 &= a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = B_n, \end{aligned}$$

în care a_i, x_i sunt numere întregi, necunoscute. Acest sistem, pentru $n = 3$, a făcut obiectul problemei 1619 din R. M. T., propusă de D-l A. MOESSNER și rezolvată parțial la pag. 47 (loc. cit. Vol. XVIII). In aceeași Revistă, am dat ulterior soluția cea mai generală *rațională* a sistemului propus (pag. 64 și 68), schițând și începutul de soluție în numere raționale a sistemului general (2), în care a_i erau presupuși cunoscuți.

Este evident că, aflați în posesiunea soluțiunii celei mai generale în numere întregi a sistemului (2), vom putea trece la rezolvarea sistemului (1) din aproape în aproape, impunând soluției sistemului (2) condiția de a verifica succesiv celelalte ecuații ale sistemului (1).

Având două ecuații cu $2n$ necunoscute, rămân $2n - 2$ necunoscute arbitrare. Cum însă toate trebue să fie întregi, rezultă că una din necunoscutele arbitrare se va determina prin această condițiune, deci vom avea de fapt $2n - 3$ necunoscute arbitrare.

Fie

$$a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, \quad x_1, x_2, \ldots x_{n-2}$$

necunoscutele date nedeterminate rămânând a_n, x_{n-1}, x_n. Să punem

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = s_k \quad , \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_k = \sigma_k ,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 = A_k \quad , \quad a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 = B_k ,$$

sistemul (2) se mai poate scrie

$$(3) \qquad \begin{aligned} x_{n-1} + x_n &= a_n + \sigma_{n-1} - s_{n-2} , \\ x_{n-1}^2 + x_n^2 &= a_n^2 + B_{n-1} - A_{n-2} ; \end{aligned}$$

deducem

$$2x_{n-1}\, x_n = (a_n + \sigma_{n-1} - s_{n-2})^2 - (a_n^2 + B_{n-1} - A_{n-2}),$$

iar x_{n-1} şi x_n, deduşi din (3), vor fi întregi dacă

$$(4) \qquad 2(a_n^2 + B_{n-1} - A_{n-2}) - (a_n + \sigma_{n-1} - s_{n-2})^2 = u^2 ,$$

u fiind un întreg. Această egalitate se mai poate scrie

$$a_n^2 - 2a_n(\sigma_{n-1} - s_{n-2}) + 2(B_{n-1} - A_{n-2}) - (\sigma_{n-1} - s_{n-2})^2 - u^2 = 0$$

şi este satisfăcută pentru o valoare întreagă a lui a_n dacă

$$(5) \qquad 2(\sigma_{n-1} - s_{n-2})^2 - 2(B_{n-1} - A_{n-2}) = v^2 - u^2 ,$$

v fiind un întreg. Cu alte cuvinte, *trebue* ca expresiunea din primul membru al acestei egalităţi să fie o diferenţă de două patrate întregi. Ori pentru aceasta, este necesar şi suficient ca această expresiune să poate fi egală cu un produs de doi factori *de aceeaşi paritate.*

Observăm că (s_{n-2}, A_{n-2}) deoparte şi (σ_{n-1}, B_{n-1}) de alta, sunt de aceeaşi paritate, deci $(\sigma_{n-1} - s_{n-2})$, $(B_{n-1} - A_{n-2})$ sunt de aceeaşi paritate, astfel că dublul diferenţei lor se divide totdeauna cu 4, aşa că expresiunea din primul membru al egalităţii (5) se poate totdeauna descompune într'un produs de doi factori *pari,* (5) fiind astfel satisfăcută. Dacă punem

$$(6) \qquad 2(\sigma_{n-1} - s_{n-2})^2 - 2(B_{n-1} - A_{n-2}) = 4\alpha\beta$$
$$= (\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = v^2 - u^2 ,$$

vom avea:

$$(7) \qquad a_n = \sigma_{n-1} - s_{n-2} \pm v = \sigma_{n-1} - s_{n-2} \pm (\alpha + \beta),$$

$$(8) \qquad x_{n-1}\, ,\, x_n = \sigma_{n-1} - s_{n-2} \pm \frac{u \pm v}{2}$$
$$= \sigma_{n-1} - s_{n-2} + \frac{\varepsilon(\alpha + \beta) \pm (\alpha - \beta)}{2} , \quad \varepsilon^2 = 1.$$

Se vede uşor că $\alpha + \beta$ şi $\alpha - \beta$ sunt de aceeaşi paritate, astfel că vom avea în totdeauna valori *întregi* pentru x_{n-1} şi x_n.

* * *

In rezolvarea precedentă, am ales cele $2n-3$ necunoscute arbitrare, luând $n-1$ dintr'o grupă şi $n-2$ din cealaltă. Se mai putea lua toate cele n necunoscute dintr'o grupă şi $n-3$ din cealaltă. Vom vedea că aceasta nu este totdeauna posibil.

Să însemnăm respectiv cu A_n, B_n valorile membrilor ecuaţiilor sistemului (2); acesta se mai poate scrie

$$x_{n-1} + x_n = A_n - A_{n-3} - x_{n-2}\ ,\ A_k = \sum_1^{i=k} x_i\ ,$$

$$x_{n-1}^2 + x_n^2 = B_n - B_{n-3} - x_{n-2}^2\ ,\ B_k = \sum_1^{i=k} x_i^2;$$

deducem, ca mai sus,

$$2x_{n-1}\,x_n = (A_n - A_{n-3} - x_{n-2})^2 - (B_n - B_{n-3} - x_{n-2}^2),$$

astfel că x_{n-1}, x_n vor fi întregi dacă

$$(9)\quad 2(B_n - B_{n-3} - x_{n-2}^2) - (A_n - A_{n-3} - x_{n-2})^2 = u^2,$$

u fiind întreg. Această egalitate se mai poate scrie

$$3x_{n-2}^2 - 2(A_n - A_{n-3})\,x_{n-2} + (A_n - A_{n-3})^2 - 2(B_n - B_{n-3}) + u^2 = 0,$$

care este satisfăcută de o valoare întreagă a lui x_{n-2} dacă

$$(10)\qquad 2[3(B_n - B_{n-3}) - (A_n - A_{n-3})^2] = v^2 + 3u^2,$$

v fiind întreg. Se vede mai întâiu că trebue să avem

$$(11)\qquad 3(B_n - B_{n-3}) \geqslant (A_n - A_{n-3})^2,$$

egalitate care nu este satisfăcută totdeauna, cum uşor se poate constata luând $n = 4$ şi

$$a_1 = 1\ ,\ a_2 = 2\ ,\ a_3 = 3\ ,\ a_4 = 4\ ,\ x_1 = 5.$$

Deasemeni, nici primul membru din (10) nu poate fi oricând de forma $v^2 + 3u^2$, cu u şi v întregi, după cum se constată uşor cu exemplul

$$n = 4\ ,\ a_1 = 1\ ,\ a_2 = 3\ ,\ a_3 = 5\ ,\ a_4 = 7\ ,\ x_1 = 6.$$

Rezultatele stabilite până aci pot fi rezumate astfel:

Teoremă. — *Sistemul de ecuaţii*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2,$$

este totdeauna solubil în numere întregi, luând pentru $x_1, x_2, \ldots x_{n-2}$, $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ *valori arbitrare, iar celelalte fiind date de*

$$x_{n-1},\ x_n = \sum_1^{n-1} a_i - \sum_1^{n-2} x_i + \frac{\varepsilon(\alpha+\beta) \pm (\alpha-\beta)}{2},$$

$$a_n = \sum_1^{n-1} a_i - \sum_1^{n-2} x_i \pm (\alpha+\beta)\ ,\ \varepsilon^2 = 1,$$

unde

$$4\alpha\beta = 2\left(\sum_1^{n-1} a_i - \sum_1^{n-2} x_i\right)^2 - 2\left(\sum_1^{n-1} a_1^2 - \sum_1^{n-2} x_i^2\right).$$

Numărul soluţiilor depinde de acela al modurilor în care pot fi aleşi factorii α, β.

Dacă se dau însă $a_1, a_2, \ldots a_n, x_1, x_2, \ldots x_{n-3}$, *sistemul nu este solubil decât dacă expresiunea*

$$6\left(\sum_1^n a_i^2 - \sum_1^{n-3} x_i^2\right) - 2\left(\sum_1^n a_i - \sum_1^{n-3} x_i\right)^2$$

este de forma $u^2 + 3v^2$, *u şi v fiind întregi.*

Aplicaţie. Să luăm $n = 4$, iar

$$a_1 = 3\ ,\ a_2 = 22\ ,\ a_3 = 38\ ,\ x_1 = 2\ ,\ x_2 = 27;$$

găsim

$$4\alpha\beta = -96,$$

deci putem lua grupele

α	± 1	± 2	± 3	± 4	± 12	± 24
β	∓ 24	∓ 12	∓ 8	∓ 6	∓ 2	∓ 1

Pentru $\alpha = 24$, $\beta = -1$, $\varepsilon = 1$, obţinem

$$x_3 = 33\ ,\ x_4 = 58\ ,\ a_4 = 57$$

şi regăsim astfel exemplul dat de D-l A. MOESSNER în G. M.,

XLIV, pag. 190, dar odată cu el avem încă un număr destul de mare de egalităţi bigrade, corespunzând la aceeaşi a_1, a_2, a_3, x_1, x_2.

* * *

In legătură cu cele de mai sus se pot pune multe alte probleme interesante. Una este următoarea: *să se rezolve, în întregi, sistemul*

$$2x^k = a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k, \qquad k = 1, 2. \tag{12}$$

Aceasta este un caz particular al sistemului (2). In adevăr, vom lua $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-2} = 0$ în rezultatele anterioare şi vom impune condiţia

$$x_{n-1} = x_n = x.$$

Aceasta este echivalentă cu $u = 0$, adică

$$2\left(a_n^2 + \sum_1^{n-1} a_1^2\right) = \left(a_n + \sum_1^{n-1} a_i\right)^2, \tag{13}$$

care admite rădăcini întregi în a_n dacă

$$2\left(\sum_1^{n-1} a_i\right)^2 - 2\sum_1^{n-1} a_i^2 = 4\sum\sum a_i a_j = 4v^2. \tag{14}$$

Vom avea atunci

$$a_n = \sum_1^{n-1} a_i \pm 2V \quad , \quad x = \sum_1^{n-1} a_i \pm V. \tag{15}$$

Pentru $n = 3$, condiţia (14) se reduce la $a_1 a_2 = v^2$. Este destul să luăm, deci

$$a_1 = \alpha\beta^2 \quad , \quad a_2 = \alpha\gamma^2, \tag{16}$$

unde α, β, γ sunt întregi, pentru a avea $v = \pm\alpha\beta\gamma$ şi

$$a_3 = \alpha(\beta \pm \gamma)^2 \quad , \quad x = \alpha(\beta^2 \pm \beta\gamma + \gamma^2), \tag{17}$$

drept soluţii generale ale sistemului

$$2x^k = a_1^k + a_2^k + a_3^k, \qquad k = 1, 2, \tag{18}$$

pentru care D-l A. MOESSNER a dat soluţii particulare în G. M. XLIV, pag. 579.

Dacă considerăm sistemul

$$2x^k = a^k + b^k + c^k, \qquad k = 1, 2, \tag{19}$$

de care s'a ocupat deasemeni D-l A. MOESSNER (loc. cit.), soluţiile sale se vor obţine din acelea ale sistemului (12), impunând datelor şi rezultatelor condiţia de a fi patrate perfecte. Vom lua deci $\alpha = 1$ în (16) şi (17), iar x va fi patrat dacă se aleg pentru β şi γ două numere ce satisfac egalităţii

$$4x^2 = (2\beta \pm \gamma)^2 + 3\gamma^2, \tag{20}$$

care se rezolvă uşor în întregi. In adevăr, o putem scrie

$$3\gamma^9 = (2x + 2\beta \pm \gamma)\ (2x - 2\beta \mp \gamma)$$

şi se vede uşor că trebue să avem

$$(a) \qquad \begin{aligned} 2x + 2\beta \pm \gamma &= 3AB^2, \\ 2x - 2\beta \mp \gamma &= AC^2, \end{aligned}$$

sau

$$(b) \qquad \begin{aligned} 2x + 2\beta \pm \gamma &= AB^2, \\ 2x - 2\beta \mp \gamma &= 3AC^2, \end{aligned}$$

în ambele cazuri rezultând $\gamma = \pm ABC$. Din (a) deducem

$$4x = A(3B^2 + C^2),\ 4\beta = A(3B^2 \mp 2BC - C^2),\ \gamma = \pm ABC, \tag{21}$$

iar din (b)

$$4x = A(B^2 + 3C^2),\ 4\beta = A(B^2 \mp 2BC - 3C^2),\ \gamma = \pm ABC, \tag{22}$$

A, B, C fiind întregi arbitrari. Acestea se reduc de altfel la una singură căci totul revine la a schimba B cu C şi A cu $-A$, ceea ce nu are nici o influenţă pentru $k = 2, 4$. Inlocuind A cu 4A, obţinem soluţia generală a sistemului (19)

$$\begin{aligned} a &= A(3B^2 \mp 2BC - C^2)\ ,\ b = \pm 4ABC, \\ c &= A(3B^2 \pm 2BC - C^2)\ ,\ x = A(3B^2 + C^2), \end{aligned} \tag{23}$$

regăsind astfel rezultatul D-lui A. MOESSNER. Se vede că condiţia $c = a + b$, pusă de D-sa este *necesară*, iar nu impusă de uşurinţa calculelor.

O ultimă observaţiune. *Dacă punem*

$$\sum_1^n a_i = \sum_1^n x_i = S,$$

atunci a_i, $S - a_i$, x_i, $S - x_i$ *constituesc o soluție a sistemului trigrad*

$$x_1^k + x_2^k + \ldots + x_{2n}^k = a_1^k + a_2^k + \ldots + a_{2n}^k, \quad n > 2, \; k = 1, 2, 3,$$

care, evident, nu este cea mai generală.

* * *

Problema generală se mai poate enunța și astfel:

Care sunt ecuațiile

$$f(x) = x^n - A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} \ldots + (-1)^{n-1} A_{n-1} x + \lambda = 0,$$

care au toate rădăcinile întregi pentru cel puțin două valori ale lui λ *?*

Cu altă ocazie, voi relua chestiunea și sub acest aspect.

M. GHERMĂNESCU.

RAPORT ASUPRA PREMIULUI VASILE CONTA

In conformitate cu prevederile regulamentului fondului «VASILE CONTA», pentru Adunarea generală din August a. c., trebuia să depunem un raport asupra lucrărilor prezentate pentru premiere din venitul acestui fond completat din venitul fondului general de premii al Societății *Gazeta Matematică*.

Societatea neprimind nici o lucrare până la 1 Iulie 1939, potrivit dispozițiunilor regulamentului fondului, se va aștepta până la 1 Iulie 1940, prezentarea unei asemenea lucrări, care se va premia cu unul sau mai multe premii de valoarea minimă dela art. 1, adică de 4.000 lei.

COMISIUNEA
PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „VASILE CONTA"
Prof. O. ONICESCU, Prof. P. SERGESCU,
Cpt. C-dor GR. ZAPAN.

Acest raport s'a citit și s'a aprobat în ședința Adunării generale dela 31 August 1939.

NOTE MATEMATICE

10. *Câteva egalități multigrade.* Vom reprezenta, ca de obicei, sistemul

$$a_1^x + a_2^x + \ldots + \ldots = b_1^x + b_2^x + \ldots + \ldots ; \ (x = 1, \ldots p)$$

prin notația prescurtată

$$a_1 , \ a_2 \ldots \overset{x}{=} b_1 , \ b_2 \ldots , \ (x = 1, \ldots p).$$

Am găsit următoarele egalități multigrade adevărate pentru gradele neperechi indicate la fiecare caz.

A) 15, 15, 16, 19, 27, 38, 40, 41, 48, 50, 61, 62, 64, $69 \overset{x}{=}$
5, 6, 8, 9, 10, 31, 31, 32, 34, 45, 46, 54, 59, 60, 67, 68;
$(x = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13)$

$S_1 = 565 \ ; \ S_3 = 1\ 516\ 735 \ ; \ S_5 = 5\ 282\ 689\ 975 ; \ldots$

B) 8, 9, 10, 15, 20, 35, 36, 37, 41, 42, 49, 51, 63, 68, 70,
$82, 84, 89 \overset{x}{=}$
1, 12, 16, 17, 18, 32, 33, 38, 43, 45, 59, 59, 60, 74, 74, 76, 87, 88
$(x = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15)$
$S_1 = 877 ; \ldots$

C) 13, 15, 20, 27, 29, 30, 42,44, 44, 46, 48, 56, 58, 59, 60, 61,
62, 73, 75, 77, 77, 90, 91, 92, 94, 106, 108, $113 \overset{x}{=}$
2, 5, 9, 14, 16, 21, 36, 38, 38, 40, 45, 50, 50, 52, 52, 54, 64,
67, 67, 69, 69, 81, 83, 83, 86, 98, 98, 100, 111, 112
$(x = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17)$
$S_1 = 1710 ; \ldots$

D) 8, 10, 19, 20, 22, 24, 34, 43, 45, 56, 57, 58, 59, 61, 75, 76, 80,
81, 91, 93, 93, 94, 95, 109, 113, 114, 116, 128, 128, 130, 141, $142 \overset{x}{=}$
4, 9, 13, 14, 16, 18, 25, 37, 49, 50, 51, 51, 53, 64, 65, 66, 83, 84,
85, 86, 87, 88, 99, 101, 103, 110, 120, 121, 122, 124, 136, 138, 143,
$(x = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19)$
$S_1 = 2415 ; \ldots$

E) 4, 6, 15, 16, 23, 24, 26, 28, 30, 38, 39, 52, 63, 65, 71, 72, 76, 77, 85, 89, 97, 98, 109, 110, 112, 113, 124, 132, 137, 138, 145, $146^{x}=$ 5, 8, 9, 10, 13, 17, 21, 22, 29, 33, 45, 46, 47, 55, 68, 69, 70, 81, 82, 83, 88, 92, 103, 106, 107, 114, 116, 125, 128, 139, 140, 142, 147

$(x = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19)$

$S_1 = 2360.$

Tabloul următor indică numărul de termeni de fiecare membru al egalităţilor multigrade precedente, pentru cea mai mare valoare a exponentului.

Exponentul	13	15	17	19
Nr. de termeni în fiecare membru	14, 16	19, 19	28, 30	32, 33

Am dedus egalităţile precedente din nişte egalităţi multigrade, adevărate pentru $x = 14, 16, 18, 20$, publicate în articolul „*On sume of powers*“ de H. GUPTA [1]), întrebuinţând procedeul pe care l-am dat la pag. 141, Vol. XVI *Revista Matematică din Timişoara* în articolul „*Sur une methode de formation des egalités multigrades*“.

Egalităţile precedente permit de a afirma că este o infinitate de numere reprezentabile în 2 feluri prin o sumă de:

17 puteri de exponent 13 ecartul fiind $17 - 13 = 4$

20 „ „ „ 15 „ „ $20 - 15 = 5$

31 „ „ „ 17 „ „ $31 - 17 = 14$

34 „ „ „ 19 „ „ $34 - 19 = 15$

A. GLODEN
(Luxemburg)

[cf. Sur les egalités multigrades, par A. GLODEN, p.p. 88–89, rapports des égalités multigrades avec le problème de WARING I.]

1) Proceedings of the Indian Academy of Sciences, Vol. IV. No. 5 Novembre 1936 p.p. 572—4.

11. *Asupra problemei 4385.*

In nota din G. M., XLIV — 641 relativă la această problemă, D-l Profesor M. GHERMĂNESCU, după ce dă o soluţie extrem de elegantă, propune ca pe aceeaşi cale să se rezolve ecuaţia funcţională:

$$(1) \qquad P^2(x) - P(x-a)\,P(x+a) = P(x)\,Q(x)$$

ceea ce, în urma indicaţiilor D-sale este foarte uşor.

Intr'adevăr, scriind ecuaţia (1) sub forma:

$$P(x)\,[P(x) - Q(x)] = P(x-a)\,P(x+a)$$

rezultă imediat că $P(x)$ divide produsul $P(x-a)\,P(x+a)$ şi că deci la un zero al polinomului $P(x)$ se adaugă un zero mărit sau micşorat cu a, ceea ce arată că zerurile acestui polinom sunt în progresie aritmetică de raţie a. Forma generală a acestui polinom va fi deci:

$$P(x) = A(x-\alpha)(x-\alpha-a)\ldots(x-\alpha-na),$$

iar ecuaţia (1) simplificată este atunci

$$Aa^2(n+1)(x-\alpha-a)\ldots[x-\alpha-(n-1)a] = Q(x)$$

ceea ce arată că polinomul $Q(x)$ este un divizor al lui $P(x)$ şi anume că avem:

$$(2) \qquad A(n+1)a^2\,P(x) = (x-\alpha)(x-\alpha-na)\,Q(x).$$

Cum forma generală a polinomului $P(x)$ nu conţine decât parametrii A, a, α rezultă că la un polinom dat $Q(x)$ relaţia (2) nu poate exista decât, dacă gradul lui $Q(x)$ este cel mult 2 şi deci polinomul $P(x)$ este cel mult de gradul patru.

Determinarea parametrilor A, a şi α după cum $Q(x)$ este de gradul 1 sau 2, nu întâmpină nici o dificultate fiind o chestiune de identificare a coeficienţilor, asupra căreia este inutil de a mai insista, observând totuşi că dacă polinomul $Q(x)$ este o constantă se are cazul problemei 4385.

OVIDIU ENULESCU.

12. *Observaţie la Nota precedentă.* D-l ENULESCU rezolvă problema în cazul când $Q(x)$ dat, este *absolut arbitrar.*

Dacă însă, se caută *toate* polinoamele $Q(x)$ pentru care ecuaţia funcţională (1) admite ca soluţie un polinom, aşa cum de altfel am cerut în Nota la care se referă D-sa, atunci relaţia (2) din Nota D-lui ENULESCU arată că, dacă m este gradul lui $Q(x)$, $n = m + 2$ şi problema admite soluţii când rădăcinile lui $Q(x)$, împreună cu α şi $\alpha + (m + 2)a$ formează o progresie aritmetică, cu raţia a.

Este destul deci ca $Q(x)$ să aibă rădăcinile în progresie aritmetică.

M. G.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITEHNICĂ « REGELE CAROL II » DIN BUCUREŞTI

Examenul de admitere în Ciclul I

(15 Iunie 1939)

ALGEBRA SUPERIOARĂ

I. Se consideră funcţiunile :

(1) $$y = Lu - 2 \operatorname{arc\,tg} u$$

(2) $$y = L(1 + u^2) - Lu$$

unde u este o funcţiune dată de x.

1°. Ce reprezintă pentru fiecare funcţiune valorile lui x pentru care

$$u(x) = 1 ?$$

(Maxime, minime sau puncte de inflexiune).

2°. Funcţiunea u fiind presupusă monotonă, care este numărul maxim de puncte de intersecţie cu axa Ox, pentru fiecare din curbele reprezentate de (1) şi (2) ?

3°. Să se reprezinte grafic aceste curbe în cazul

$$u = Lx.$$

II. Să se rezolve sistemul :

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 7y^2 + 10x - 8y - 4 = 0$$

$$g(x, y) = 3x^2 - 4xy - 5y^2 + 2y + 8 = 0.$$

III. Se dă parabola

$$y^2 = 2x$$

şi punctul A (0, 4) şi se cere să se determine cu trei zecimale exacte coordonatele punctului M de pe parabolă situat la distanţă minimă de A.

GEOMETRIE ANALITICĂ

Se consideră punctele A $(a, 0)$ şi U $(0, 1)$ pe axele rectangulare Ox şi Oy.

C $(\alpha, 1)$ este centrul unuia din cercurile tangente în U la Oy. Prin A se duc tangentele AT, AT' la cerc. Coarda TT' taie dreapta OC în M, se cere:

1°. să se scrie ecuaţia cercurilor,

2°. să se scrie ecuaţia coardei TT',

3°. să se arate că punctul M descrie o conică H, când cercul, respectiv α, variază,

4°. că această conică este tangentă în O la perpendiculara pe AU, iar în U este tangentă la perpendiculara pe Oy,

5°. să se cerceteze natura conicei H când A se deplasează pe Ox (a variază între $-\infty$ şi $+\infty$),

6°. să se figureze conica H pentru:

$$a = \frac{5}{2}.$$

GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ

I. Se dau punctele A (30, 10, 40) , B (30, 20, 60) şi o dreaptă oarecare D (d, d') ale cărei proiecţiuni *nu* sunt paralele între ele. Se cere:

a) prin A să se ducă un plan (P), paralel cu planul bisector al diedrului II.

b) prin B să se ducă o dreaptă E (e, e') paralelă cu planul (P) şi care să întâlnească dreapta D (d, d').

II. Se dă dreapta AB definită de punctele

A (30, 50, 0) , B (70, 0, 40) şi punctul O (0, 0, 0).

Se cere:

a) proiecţiunile triunghiului isoscel OCD, care are vârful în O şi baza CD = l (dată) pe dreapta AB.

b) să se afle distanţele d şi δ ale punctelor C şi D la linia de pământ.

c) să se construiască lungimea x, dată de relaţia:

$$x = \frac{d \cdot \delta^2}{l^2}.$$

III. Se dă punctul A (30, 60, 20) şi se cere:

a) să se ducă prin A un plan (P, P') paralel cu linia de pământ şi care să facă cu planul orizontal de proiecţiune un unghiu de 30°.

b) să se deseneze proiecţiunile sferei, al cărei centru S (s, s') este în planul de profil al punctului A şi care este tangentă planelor de proiecţie H, V şi planului (P, P').

(Sfera se află în primul diedru, dedesubtul planului P).

c) să se deseneze proiecţiunile curbei (C), de intersecţie între sfera S şi planul bisector al diedrului I.

d) să se figureze planele tangente la sfera S paralele cu OX şi trecă prin A, prin urmele lor.

IV. *a)* Un echer la 45° (catetele egale) se roteşte în jurul uneia din catete; se cere să se afle valoarea unghiului solid, astfel născut.

b) Se consideră ecuaţia

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

în care x reprezintă o *lungime*.

Ce fel de mărimi reprezintă coeficienţii p, q, r?

Expresiunea :

$$E \equiv q^3 + rp^3$$

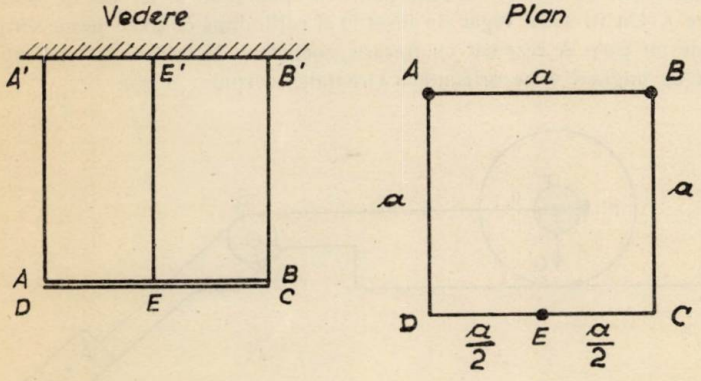
este omogenă ?

(Să se explice răspunsul ce se va da).

MECANICĂ

I. O placă pătrată orizontală ABCD de greutate G este susţinută de trei fire verticale AA', BB' şi EE', E fiind mijlocul lui CD.

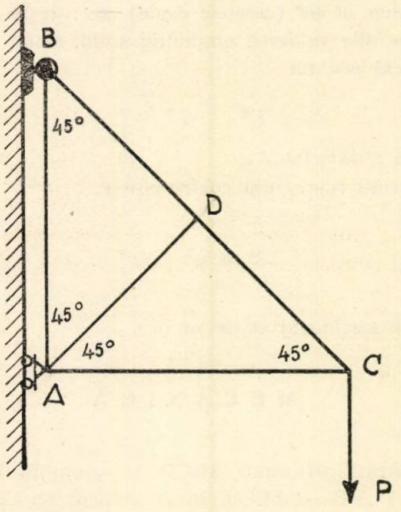
a) Să se determine tensiunile în fire.



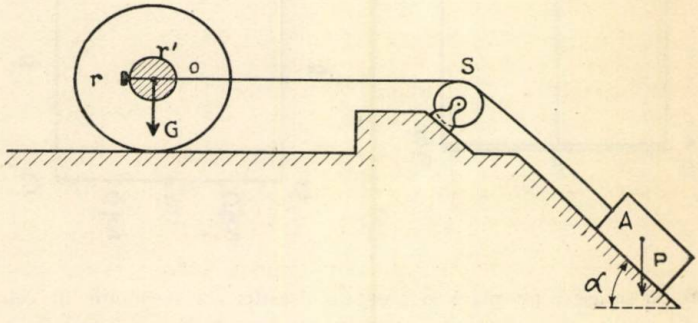
b) Să se aşeze pe placă o greutate P astfel ca tensiunile în cele trei fire să fie egale ; să se determine condiţia pe care trebue s'o îndeplinească P pentru ca realizarea să fie posibilă.

c) Presupunând că aşezăm forţa P în colţul D să determinăm maximul său astfel ca placa să rămână orizontală.

II. Să se studieze echilibrul grinzii cu zăbrele din figură, simplu rezemată în A pe un perete vertical şi articulată în B, supusă forţei verticae P. Se va determina reacţiunile din A şi B şi eforturile în bare. Se va indica natura efortului (compresiune sau tensiune).



III. O roată de greutate G şi rază r este aşezată pe un plan orizontal, coeficientul său de frecare de rostogolire pe plan fiind s, iar cel de frecare de lunecare f. Un fir OSA legat de fusul O al roţii, după ce trece peste scripetele S prinde un corp A rezemat cu frecare, coeficient de frecare f_1, pe un plan înclinat cu unghiul α pe orizontală. Greutatea corpului A este P.



Se cere:

a) condiţia ca roata să se rostogolească fără să alunece,

b) să se determine minimul lui P care rostogoleşte roata,

c) tensiunea în fir şi reacţiunea scripetelui,

d) să se studieze problema şi în cazul când ţinem seama de frecarea de articulaţie a fusului, coeficient de frecare f', raza fusului r'.

Frecarea pe scripete se va neglija.

FIZICĂ GENERALĂ

I. Compunerea vibraţiunilor perpendiculare.
II. Calculul vitezei sunetului în aer şi experienţele lui REGNAULT.
III. Regula lui TORRICELLI (scurgerea lichidelor).
IV. Ciclul lui CARNOT.

CHIMIE GENERALĂ

Să se facă un tablou din care să se vadă metodele de preparare şi întrebuinţările a elementelor ce le obţinem din sulfurile naturale.

(Nu se vor descrie compuşii elementelor).

Toate chestiunile obligatorii.

Timpul acordat de fiecare lucrare: 4 ore.

BIBLIOGRAFIE

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tom. CXXVII. Fascicola VI. Iunie 1939. Buenos-Aires. Asupra funcţiunilor poligene de variabilă complexă şi bicomplexă hiperbolică (continuare) de J. C. VIGNAUX. Asupra punctelor singulare ale funcţiunilor analitice de CARLOS BIGGERI.

Artă şi Tehnică Grafică. Buletinul Imprimeriilor Statului. Director ALEXANDRU D. BUNESCU. Caietul 9. Septemvrie-Decemvrie 1939. Bucureşti.

Boletin Matematico publicat de B. I. BAIDAFF. Anul XII. Nr. 11. August 1939. Buenos-Aires. Emisferul terestru austral şi Boletin Matematico de B. I. BAIDAFF. Congresul Internaţional de Matematici. Comitetul permanent în Congresul Internaţional de Matematici. Asupra unei teze de doctorat în ştiinţele fizice de B. I. BAIDAFF.

Idem. Anul XII. Nr. 12. August 1939. Buenos-Aires.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 45. Nr. 9. Septemvrie 1939. Menasha, Wis., &. New-York.

Journal de Mathématiques élémentaires, publicat de H. VUIBERT. Anul 64. Nr. 1. 1 Octomvrie 1939. Paris.

Pitagora. Revistă de matematici. Anul V. Nr. 2. 10 Noemvrie 1939. Bucureşti. Încadrarea geometriei proiective plane în geometria de contact a ciclelor de D. BARBILIAN. O problemă de înscriere de O. N. ŢINO. Asupra unei generalizări a teoremei lui AUBERT de C. IONESCU-BUJOR.

Revista Ştiinţifică „V. Adamachi". Vol. XXV. Nr. 3. Iulie-Septemvrie 1939. Iaşi.

Publicaciones especiales. Seria 3-a. Conmemoracion de la independencia nacional. Universitatea naţională din La Plata. Nr. 123. Iulie 1939 La Plata. Argentina.

N. N. MIHĂILEANU. *Transformarea prin inversiune.* Biblioteca revistei PITAGORA. Monografia Nr. 2. Preţul lei 25. Bucureşti.

V. ALACI. *Trigonometrie patratică.* Timişoara 1939.

PIERRE HUMBERT. *Maurice d'Ocagne.* (1862—1938). Extras din *Revue des Questions scientifiques.* Ianuarie 1939, Louvain.

P. SERGESCU. *Some important Dates in the Evolution of French Mathematics.* (New-York World's Fair 1939. French Participation. Published by the mathematical departement of the Commission for the French Participation in the New-York World's Fair 1939).

P. SERGESCU. *Les mathématiques à Paris en Moyen Age.* Paris 1938.

P. SERGESCU. *Les mathématiques en Moyen Age.* (Extrait de la Revue «*Le Flambeau*», 15 Avril 1939). Bruxelles 1939.

ING. C. SCHITENESCU-SCHITEANU. *Mecanica o consecinţă a Geometriei.* Bucureşti 1939.

D. RUSU ABRUDEANU. *Aspecte contabile.* Bucureşti 1939.

VICTOR POPESCU. *Retragerea din Invăţământul tecnic superior a D-lui Profesor* ION IONESCU. Trei sărbătoriri: 3 Noemvrie 1938, 19 Noemvrie 1938, 5 Decemvrie 1938. Bucureşti 1939.

CERERI

Răspuns la cererea Nr. 287.

D-l VASILE DESMIREANU a fost conferenţiar de *mecanică* la Universitatea din Cluj în anii 1923—25. *In 1923—24* a predat la studenţii anului I *trigonometria* şi *introducerea în mecanică;* la studenţii anului II *calcul vectorial,* mişcarea relativă, mişcarea vibratorie amortizată, câmp de forţe, potenţial; la studenţii anului III: *statica* solidelor, echilibrul firului, *principiul viteselor virtuale,* sisteme olonome şi neolonome, metoda lui LAGRANGE. *In anul 1924—25,* la studenţii anului II: *Calcul vectorial. Statică* (Punctul material, centre de greutate, echilibrul sistemelor, stabilitate, sisteme supuse la legături, echilibrul firului). Cu studenţii anului III: *Sisteme olonome şi neolonome,* legături, libertăţi. *Teoria potenţialului. Frecarea.*

Anuarul Universităţii Cluj nu citează nici o lucrare ştiinţifică a D-lui V. DESMIREANU, iar în *Buletinul Societăţii de Ştiinţe din Cluj* D-sa nu a tipărit nici o lucrare. Anuarele pe 1923–25 citează 42 de lucrări ale celorlalţi cinci profesori ai secţiunii matematice.

In toamna 1925 D-l V. DESMIREANU a demisionat dela conferinţa din Cluj declarând decanului Facultăţii de Ştiinţe că are un loc la Roma. Căsătorit cu o italiancă, D-sa are familie în Italia.

Conferinţa sa de mecanică a rămas neocupată de atunci de vreun titular, până când a fost suprimată de minister, după 1931, prin budget.

Toţi profesorii numiţi la Cluj după 1924 au trecut prin gradul de conferenţiar şi au reuşit să fie numiţi agregaţi *prin concurs,* după trei ani de funcţionare ca conferenţiari.

PETRE SERGESCU.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

P. ANDRONESCU: Das parallel-und meridianebene Feld nebst Beispielen-Aachen, 1925. Extras.

P. ANDRONESCU: Über den Verlauf des Drehmomentes bei asynchronen Drehfeldmotoren mit Käfiganker, Aachen, 1923. Extras.

BERNSTEIN, SLUTSKY, STEINHAUS: Les fonctions aléatoires. Act. scient. Paris, 1938.

BEDREAG C. G.: Systématique naturelle des éléments. Bucureşti, 1933. Extras.

I. BURUIANĂ: L'activité des entreprises minières et métallurgiques de l'etat en Transylvanie pendant la période 1925–31. Bucureşti, 1933. Extras.

DODD, JORDAN, OBRECHKOFF: La statistique mathématique. Act. scient. Paris, 1938.

TH. DE DONDER: Théorie nouvelle de la mécanique statistique. Paris, 1938.

EINSTEIN-INFELD: L'évolution des idées en physique. Paris, 1938.

E. HALLÉN: Further investigations into the receiving qualities of antennae: the absorbing of transient, unperiodic radiation. Leipzig, 1939.

HOPF, HOSTINSKY, ONICESCU, ROMANOWSKY: La principe ergodique et les probabilités en chaîne. Act. scient. Paris, 1938.

H. LESSHEIM: Atomphysik. S. Göschen. No. 1009. 1929.
Donate de D-l TH. VESCAN (Cluj).

W. J. GREENSTREET. Alcuni teoremi sull'omologia. Cita di Castello. 1901.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

C. ALASIA. Algunas observaciones sobre formules de las superficies. Zaragoza 1908.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

MARCEL BRELOT. *Étude des fonctions sous harmoniques au voisinage d'un point.* Paris 1934.
Donată de D-l P. SERGESCU, Profesor Universitar.

N. CULIANU. Calculu Diferenţialu şi Integralu. Volumele ântëiu. Iaşi 1874.

J. BERTRAND. Traité élémentaire d'algèbre. Paris 1851.

OTTO HESSE. Die Determinanten. Leipzig 1872.

J. DUFAILLY. Algèbre. Ed. IX. Paris 1889.

P. MANSION. Elemente der Theorie der Determinanten. Leipzig 1878.

E. SCHRÖDER. Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. Leipzig 1873.

WILHELM SCHRADER. Beiträge zur Theorie der Determinanten. Halle a. S. 1887.

L. A. SOHNCKE'S. Sammlung von Aufgaben aus des Differentialrechnung. Partea I, II. Halle 1865.

S. F. LACROIX. Traité élémentaire de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral, (574 pag. şi 59 fig.). Paris 1802.

M. SCHAAR. Éléments de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral. Bruxelles 1862.

AXEL HARNACK. Die Elemente der Differential und Integralrec hnung Leipzig 1881.

JULIUS WENCK. Die Grundlehren der Höhren Analysis. Leipzig 1872.
Donate de D-l GENERAL CORNELIU FELIX.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1987 [1]). *Se consideră un triunghiu* ABC *şi cercul său circumscris. Se ia un punct* M *pe arcul* AMC *care măsoară unghiul* B. *Dacă se înseamnă cu* l_a, l_b, l_c *respectiv distanţele lui* M *la cele trei vârfuri* A, B, C; *cu* h_a, h_b, h_c *înălţimile*

1) In enunţul publicat la pag. 462, (XVIII), s'a schimbat în relaţie h_a cu h_c şi reciproc.

triunghiului ABC, *corespunzătoare respectiv vârfurilor* A, B, C; *cu* φ_a, φ_b, φ_c *unghiurile ascuțite pe care dreapta lui* SIMSON, *relativă la punctul* M *și triunghiul* ABC, *le face respectiv cu laturile* BC, CA, AB, *avem relația:*

$$\frac{l_a}{h_c}+\frac{l_c}{h_a}=\frac{l_b}{h_b}\cdot\frac{\cos(\varphi_c+\varphi_b-\varphi_a)}{\cos\varphi_b}, \qquad (I)$$

sau

$$\frac{l_a}{h_c}+\frac{l_c}{h_a}=\frac{l_b}{h_b}\cdot\frac{\cos(\varphi_b+\varphi_a-\varphi_c)}{\cos\varphi_b}. \qquad (II)$$

In fine există un punct M *pe arcul* AMC, *care măsoară unghiul* B, *pentru care această relație devine:*

$$\frac{l_a}{h_c}+\frac{l_c}{h_a}=\frac{l_b}{h_b}\cdot\sin(A-C). \qquad (III)$$

Discuție.

O. ȚINO.

Soluție dată de D-l N. N. MIHĂILEANU (Bacalaureat, Constanța). Să însemnăm cu φ unghiul MOA, care determină poziția punctului M pe arcul AMC ($\varphi < B$) și cu N punctul unde BM taie pe AC. Pe dreapta AC avem relația:

$$\overline{AC}=\overline{AN}+\overline{NC}, \quad \text{sau} \quad b=\overline{AN}+\overline{NC}. \qquad (1)$$

Din triunghiul ABN avem:

$$\frac{\overline{AN}}{\sin\varphi}=\frac{\overline{AB}}{\sin(A+\varphi)}, \text{ dar } \overline{AB}=c=2R\sin C, \qquad (2)$$

deci:

$$\overline{AN}=\frac{2R\sin C\sin\varphi}{\sin(A+\varphi)}.$$

Asemenea din triunghiul NBC, avem:

$$\frac{\overline{NC}}{\sin(B-\varphi)}=\frac{\overline{BC}}{\sin(A+\varphi)}, \text{ dar } \overline{BC}=a=2R\sin A; \qquad (3)$$

deci:

$$\overline{NC}=\frac{2R\sin A\sin(B-\varphi)}{\sin(A+\varphi)}.$$

Introducând (2) şi (3) în (1) şi observând că: $b = 2R\sin B$, avem:

$$\sin B \sin(A+\varphi) = \sin C \sin\varphi + \sin A \sin(B-\varphi). \qquad (4)$$

Ducând diametrul $\overline{MM'}$ al punctului M în cercul ABC obţinem lungimile coardelor $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$, anume:

$$l_a = 2R\sin\varphi \;\; ; \;\; l_b = 2R\sin(C+\varphi) \;\; ; \;\; l_c = 2R\sin(B-\varphi),$$

din care scoatem valorile lui $\sin\varphi$ şi $\sin(B-\varphi)$, deci relaţia (4) devine:

$$\frac{l_a \sin C}{2R} + \frac{l_c \sin A}{2R} = \sin B \sin(A+\varphi)$$

sau încă:

$$\frac{l_a}{2R\sin A \sin B} + \frac{l_c}{2R\sin B \sin C} = \frac{\sin(A+\varphi)}{\sin A \sin C}. \qquad (5)$$

Insă avem de altă parte:

$$h_c = a\sin B = 2R \sin A \sin B \;\; ; \;\; h_a = c\sin B = 2R \sin B \sin C;$$

$$h_b = 2R \sin A \sin C;$$

aşa că relaţia (5) devine:

$$\frac{l_a}{h_c} + \frac{l_c}{h_a} = \frac{2R}{h_b}\sin(A+\varphi) \qquad (6)$$

şi cum $l_b = 2R\sin(C+\varphi)$, rezultă că:

$$\frac{l_a}{h_c} + \frac{l_c}{h_c} = \frac{l_b}{h_b} \cdot \frac{\sin(A+\varphi)}{\sin(C+\varphi)}. \qquad (7)$$

Acum să presupunem că $a > c$ şi să însumăm cu P, Q, S proiecţiile punctului M pe laturile BC, AC, AB, iar cu M_a şi A' punctele unde MP taie cercul ABC şi AM_a taie pe BC.

Avem în acest caz pe de-oparte relaţiile:

$$\varphi_a = C + \varphi_b \;\; ; \;\; A = \varphi_b + \varphi_c \;\; \therefore \;\; \varphi_a + \varphi_c = A + C;$$

pe dealtă parte observând că AM_a este paralelă cu dreapta lui SIMSON, avem:

$$\varphi_a = \frac{\pi}{2} - \varphi; \qquad (8)$$

deci:

$$A + \varphi = \frac{\pi}{2} - (\varphi_a - \varphi_b - \varphi_c) \;\; \text{şi} \;\; C + \varphi = \frac{\pi}{2} - \varphi_b,$$

aşa că relaţia (7) devine:

$$\frac{l_a}{h_c}+\frac{l_c}{h_a}=\frac{l_b}{h_b}\cdot\frac{\cos(\varphi_b+\varphi_c-\varphi_a)}{\cos\varphi_b}. \qquad (I)$$

Dacă $c > a$, atunci se schimbă între ei indicii a şi c şi avem relaţia (II).

Dacă $\varphi=\frac{1}{2}B$, atunci $\varphi_a=\varphi_c$, deci relaţia devine:

$$\frac{l_a}{h_c}+\frac{l_c}{h_a}=\frac{l_b}{h_b}. \qquad (I')$$

Dacă punctul M este diametral opus lui B, avem:

$$\varphi=\frac{\pi}{2}-C;$$

φ_c egal cu A sau suplimentul lui A (după cum A este ascuţit sau obtus), iar $\varphi_a = C$, $\varphi_b = 0$, deci relaţia:

$$\frac{l_a}{h_c}+\frac{l_c}{h_a}=\frac{l_b}{h_b}\cos(A-C) \qquad \left(A<\frac{\pi}{2}\right),$$

sau

$$\frac{l_a}{h_c}+\frac{l_c}{h_a}=\frac{l_b}{h_b}\cos B \qquad \left(A>\frac{\pi}{2}\right).$$

— Pentru ca să avem relaţia (III) urmează ca φ să satisfacă ecuaţia:

$$\frac{\sin(A+\varphi)}{\sin(C+\varphi)}=\sin(A-C), \qquad (9)$$

care transformată conduce la ecuaţia:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A+C}{2}+\varphi\right)=\operatorname{tg}\frac{A-C}{2}\cdot\operatorname{cotg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A-C}{2}\right) \qquad (10)$$

care având al doilea membru pozitiv, dă totdeauna o valoare $\varphi<\frac{B}{2}$. Pentru $\varphi=\frac{B}{2}$, relaţia (III) coincide cu (I') şi avem:

$$A-C=\frac{\pi}{2}.$$

Observare. Domnii ION C. VASILIU, CONSTANTIN I. GEORGESCU şi ŞTEFAN E. OLTEANU au arătat că relaţia aşa cum fusese publicată nu poate exista, însă nu au încercat să găsească relaţia adevărată, cum a făcut D-l N. N. MIHĂILEANU.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 2298. *Să se rezolve în numere întregi ecuația:*

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx + 3.$$

SEB. KAUFMANN.

Soluția I, dată de D-nii: N. P. ARCADIAN, L. M. BRÜL, B. V. GATAIANȚU, PAUL I. IONESCU, I. M. MIU, I. TH. POPOVICI, AL. TAUBER, N. TEODORESCU și L. WEISS.

Ecuația fiind simetrică în x, y, z putem presupune dela început

$$z < y < x. \qquad (1)$$

După înmulțirea cu 2, ecuația din enunț se scrie:

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 6.$$

Numărul 6 nu se poate descompune în o sumă de 3 patrate întregi decât sub forma:

$$6 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2$$

așa că ținând seamă de neegalitățile (1) nu putem avea decât:

$$x - y = 1 \quad ; \quad y - z = 1 \quad ; \quad z - x = 2$$

$$\therefore \qquad x = y + 1 = z + 2.$$

Deci soluțiile problemei sunt orice grup de 3 numere întregi consecutive.

Soluția II, dată de D-nii: M. I. ADAM, B. A. REINHORN și I. C. VASILIU.

Ecuația dată se poate scrie sub forma:

$$(2x - y - z)^2 + 3(y - z)^2 = 12.$$

In ipoteza (1) sumele din membrul I sunt pozitive, iar $2x - y - z$ se divide cu 3 și este cel mult 3 căci în caz contrar membrul I este mai mare ca 12. Deci putem avea:

$$2x - y - z = 0 \quad \text{și} \quad y - z = 2$$

sau

$$2x - y - z = 3 \quad \text{și} \quad y - z = 1.$$

Primul caz conduce la

$$y - x = 1$$

contrar lui (1), iar al doilea caz conduce la

$$x - y = 1$$

cu aceleași concluzii ca la soluția I.

Soluția III, dată de D-nii: A. I. CĂLINESCU și EM. ȘTEFĂNESCU. Ordonând în raport cu z avem ecuația:

$$z^2 - (x+y)\,z + x^2 + y^2 - xy - 3 = 0$$

al cărei realizant

$$\Delta = (x+y)^2 - 4(x^2 + y^2 - xy - 3) = 12 - 3(x-y)^2$$

trebuind să fie patrat perfect nu se poate lua decât:

$$x - y = 1 \quad \text{sau} \quad x - y = 2.$$

Primul caz conduce la rezultatele dela soluțiile precedente. Cazul al doilea dă:

$$z = \frac{x+y}{2}$$

deci:

$$x - y = 2 \quad , \quad z - y = 1$$

care conduce la imposibilitate față de (1).

Notă. 1°. D-l L. M. BRÜL a rezolvat și următoarea ecuație mai generală

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx + n.$$

2°. D-l EM. ȘTEFĂNESCU a dat generalizarea

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx + 3m^2$$

ceva mai restrânsă ca precedenta.

3°. D-nii: M. I. ADAM și B. A. REINHORN au rezolvat și ecuația:

$$\sum_1^n x_i^2 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + \ldots + x_n x_1 + m.$$

4°. D-l L. WEISS a dat generalizarea:

$$x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} = x^n y^n + y^n z^n + z^n x^n + m.$$

5°. Cazul particular:

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$$

formează obiectul problemei 3076, rezolvată la pag. 194, Vol. XXIX.

GH. B.

PROBLEMA 2803. *Să se calculeze integrala*

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 mx}{x^2}\,dx \;,\; m > 0.$$

M. GHERMĂNESCU.

Problema a apărut cu o mică eroare de tipar, anume, lipsea exponentul 2 dela $\sin mx$, ceea ce făcea integrala fără sens. Ea a fost propusă ca aplicaţie a celor cuprinse în articolul „Asupra unor integrale“ (G. M. XXVII, p. 421).

Ulterior propunerei problemei 2803, apărut (G. M. XXX, p. 41—46), articolul D-lui Prof. TH. ANGHELUŢĂ „Calculul unei clase de integrale definite“, în care D-sa calculează integrale de forma

$$\int_0^\infty \frac{\sin^n x}{x^p}\,dx,$$

unde n şi p sunt întregi şi pozitivi, integrale cari cuprind cazul particular $n = p$, propus de TR. LALESCU în problema 1009. Pentru $n = p = 2$ se are

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

Dacă în integrala propusă efectuăm schimbarea de variabilă $mx = u$, găsim uşor

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 mx}{x^2}\,dx = m\int_0^\infty \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du = \frac{m\pi}{2}\,.$$

Evident, la data propunerei problemei 2803, nu aveam cunoştinţă de enunţul problemei 1009.

M. G.

PROBLEMA 2828. *Să se demonstreze dacă $f(x, y)$ este o funcţiune omogenă de gradul întâiu, caracteristicile ecuaţiei cu derivate parţiale*

$$xp + yq = f(x, y) \tag{1}$$

sunt linii asimptotice ale suprafeţii integrale.

M. GHERMĂNESCU.

Ecuaţiile caracteristicelor suprafeţelor integrale, corespunzătoare ecuaţiei cu derivate parţiale date, fiind

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{f}, \tag{2}$$

se deduce imediat, din cauza relației

$$xf'_x + yf'_y = f \tag{3}$$

pe care o satisface funcțiunea f, următoarea relație

$$f'_x\,dx + f'_y\,dy = dz.$$

Pe dealtă parte, din (2) mai deducem

$$\frac{dp\,dx + dq\,dy}{x\,dp + y\,dq} = \frac{dz}{f}. \tag{4}$$

Insă din (1) se deduce

$$xdp + pdx + ydq + qdy = f'_x\,dx + f'_y\,dy = dz$$

și cum

$$dz = pdx + qdy,$$

rezultă

$$x\,dp + y\,dq = 0$$

deci din (4),

$$dpdx + dqdy = 0, \tag{5}$$

care este tocmai ecuația diferențială a liniilor asimptotice ale suprafețelor integrale ale ecuației cu derivate parțiale (1).

Se poate, de altfel, integra ușor ecuația cu derivate parțiale (1). In adevăr, din (2) rezultă următoarele *combinațiuni integrabile*

$$d\,\mathrm{L}x = d\,\mathrm{L}y \quad , \quad dz = df,$$

din care se deduce

$$y = \alpha x \quad , \quad z = f + \beta,$$

unde α și β sunt două constante arbitrare. Stabilind o relațiune arbitrară $\beta = \psi(\alpha)$ între aceste două constante, se obține imediat

$$z = f(x, y) + \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

care reprezintă ecuația suprafețelor integrale ale ecuației cu derivate parțiale (1), ψ fiind o funcțiune arbitrară.

Este interesant de verificat acest rezultat și pe altă cale: din (1) deducem prin derivare

$$xr + p + ys = f'_x,$$
$$xs + q + yt = f'_y;$$

înmulțind prima cu x, pe a doua cu y și adunând, obținem, ținând seama de (1) și (3),

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 0,$$

ecuație cu derivate parțiale de ordinul al doilea a cărei integrală generală este cunoscută

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

unde φ și ψ sunt funcțiuni arbitrare și se vede ușor că $x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ este omogenă și de gradul întâiu.

Notă. La această problemă a trimis o soluție D-l T. A. TĂNĂSESCU, pe când era student al Școalei Politehnice, dar pe care nu o posedăm.

M. G.

PROBLEMA 3509. I *fiind centrul cercului înscris al triunghiului* ABC *și* D *o dreaptă ce trece prin* I *și taie laturile triunghiului în* M, N, P; *simetricile acestor puncte respectiv față de dreptele* AI, BI, CI *se găsesc pe o dreaptă* D′ *tangentă cercului înscris.*

Ducând dreptele D_a, D_b, D_c *respectiv prin centrele* I_a, I_b, I_c, *centrele cercurilor exînscrise triunghiului, și făcând construcții analoage, se obțin dreptele* D'_a, D'_b, D'_c, *ce sunt tangente cercurilor exînscrise* I_a, I_b, I_c.

Să se arate că dacă dreptele D, D_a, D_b, D_c *sunt paralele, dreptele* D, D'_a, D'_b, D'_c *sunt deasemenea paralele.*

GH. MIHOC.

Fie A′, B′, C′ punctele de contact ale cercului înscris I respectiv cu laturile BC, CA, AB; MA_1, NB_1, PC_1 cele de-al doilea tangente duse din punctele M, N, P la cercul I, A_1, B_1, C_1 fiind punctele de contact. Punctele M și M′, fiind simetrice în raport cu diametrul AI al cercului I, tangentei MA′ îi corespunde o tangentă M′T′ simetrică față de AI, iar tangentei MA_1 o tangentă M′S simetrică față de AI, deci cu punctele de contact A_1 și S simetrice față de AI. Coardele A_1S și B′C′, fiind ambele perpendiculare pe AI, sunt paralele, deci:

$$\text{arc } C'A_1 = \text{arc } B'S. \qquad (1)$$

Asemenea, celei de-a doua tangentă NB_1 îi corespunde o tangentă simetrică $N'B_1'$ față cu diametrul BI și dreptele B_1B_1', $A'C'$ sunt drepte paralele fiind ambele perpendiculare pe BI.

De altă parte B_1B' și $A'A_1$ sunt deasemenea paralele, fiind ambele perpendiculare pe dreapta D. Rezultă că unghiurile $C'A'A_1$ și $B'B_1B_1'$ sunt egale, având laturile respectiv paralele și îndreptate în același sens, adică:

$$\sphericalangle C'A'A_1 = \sphericalangle B'B_1B_1', \tag{2}$$

de unde deducem imediat că:

$$\text{arc } C'A_1 = \text{arc } B'B_1'. \tag{3}$$

Comparând însă egalitățile (1) și (3) deducem că arcele $B'B_1'$ și B'S sunt egale, și, cum ele au aceeași origine și sens, punctul B_1' coincide cu S.

In același fel, făcând să corespundă la a doua tangentă PC_1 tangenta simetrică $P'C_1'$ din P' la cercul I, găsim că:

$$\text{arc } A_1C_1' = \text{arc } A_1S,$$

adică punctul de contact C_1' al tangentei $P'C_1'$ coincide cu S.

Așadar, punctele M', N', P' se găsesc pe trei tangente ale cercului I cu același punct de contact S, deci aparțin aceleași drepte D' tangentă cercului I în punctul S.

Construcția dreptei D' este imediată și anume: *Construim punctul* A_1 *simetricul lui* A' *în raport cu dreapta* D, *apoi punctul* S *simetricul lui* A_1 *în raport cu dreapta* AI; *perpendiculara în* S *pe* IS *este tangenta* D'.

Demonstrația de mai sus cu mici modificări se aplică în toate cazurile de figură, ca și în cazurile când cercul I este înlocuit prin unul din cercurile exînscrise I_a, I_b, sau I_c.

2. Insemnând cu M_a, N_a, P_a punctele unde dreapta D_a taie laturile triunghiului ABC; cu $A_{1,a}$ punctul de contact al tangentei a doua dusă din M_a la cercul I_a; cu S_a punctul de contact al tangentei D_a' cu cercul I_a. Observăm în primul rând că tangentele MA_1 și $M_aA_{1,a}$ fac cu BC unghiuri respectiv cât dublele unghiurilor formate de dreptele D și D_a cu BC; deci dacă D_a este paralelă cu D, avem că și dreptele MA_1, $M_aA_{1,a}$ sunt paralele; deci perpendicularele pe ele, IA_1, $I_aA_{1,a}$, sunt deasemenea paralele

şi ca urmare simetricile lor IS, $I_a S_a$ în raport cu dreapta AI sunt paralele. Razele IS şi $I_a S_a$ fiind paralele, tangentele D' şi D'_a sunt deasemenea paralele.

Au dat *soluţiuni foarte bune* problemii Domnii: THEODOR G. COCEA şi S-LT. I. GH. ZAMFIRESCU cu ajutorul teoriei polarelor în raport cu un cerc; N. N. MIHĂILEANU (ca Absolvent liceu, Constanţa) şi *propunătorul problemii* cu ajutorul geometriei analitice; N. N. MIHĂILEANU (fiind student An. II, Bucureşti) arătând că „independent de construcţia în jurul vârfului A, punctul S este isogonalul punctului la infinit al direcţiei perpendiculare pe D, în raport cu triunghiul A'B'C'"; ADRIAN C. GHEORGHIU (ca Absolvent al Lic. „Spiru Haret", Bucureşti) folosind teorema: „Dacă AO, BO, CO sunt paralele, punctul invers O' este pe cercul circumscris triunghiului ABC" [G. PAPELIER. Ex. de Géom. Mod. ed. II, p. 31] şi transformarea prin polare reciproce. D-sa a mai dat (fiind Student An. II. Bucureşti) o a doua soluţie directă folosind sistematizat transformările prin polare reciproce faţă de cercul I.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 3775. *Să se construiască un triunghiu echilateral, având vârfurile pe trei cercuri concentrice date.*

P. TROFIMOV.

Problema este cunoscută şi tratată în diferite culegeri şi tratate de geometrie, după cum s'a arătat la pag. 271, Vol. XLII, la soluţia problemei 4606, a cărei primă parte a enunţului este identică cu enunţul problemei de faţă.

Pe copertele Vol. XXXIV şi XXXV sunt trecuţi următorii rezolvitori ai problemei 3775: GH. P. BOERESCU, I. C. BOIAN, C. HEITMANEK, H. P. IONESCU, C. D. IONESCU-ŢIU, M. MARGULIUS, E. I. MIHALCEA, I. MURĂROIU, GH. M. PĂUN, D. ŞERBAN-ULMENI şi N. N. VELICESCU.

După apariţia Vol. XXXV nu s'au mai primit soluţii la această problemă.

GH. B.

PROBLEMA 4852. *Se dă o elipsă* E *a cărei axă mare este* AB... *Intr'un punct* C *al axei* AB, *cuprins între* A *şi* B, *se ridică o perpendiculară* Δ *pe* AB *care taie elipsa* E *în punctele* M *şi* N. *Prin* A *se duce o secantă mobilă care taie pe* Δ *în* P *şi elipsa în* Q. *Să se găsească locul geometric al punctului* R *de pe dreapta* AQ, *care să satisfacă relaţiunea*

$$\overline{AR}^2 = \overline{AP} \cdot \overline{AQ}.$$

M. NICOLAU.

Soluţie, dată de D-l Locot. M. I. VLAD.

Luăm ca axe de coordonate axa AB şi tangenta în A la elipsă. Fie b semiaxa mică a elipsei E şi c abscisa punctului de intersecţie a lui MN cu AB. Ecuaţiile elipsei E, a dreptei MN şi a dreptei AQ sunt

$$(E) \qquad b^2x^2 - 2ab^2x + a^2y^2 = 0 \qquad (1)$$

$$(MN) \qquad x - c = 0 \qquad (2)$$

$$(AQ) \qquad y - mx = 0. \qquad (3)$$

Rezolvind sistemul (2), (3) şi apoi (1), (3) se găseşte

$$P[c\ ,\ cm]\ ;\quad Q\left[\frac{2ab^2}{b^2 + a^2m^2}\ ,\ \frac{2ab^2m}{b^2 + a^2m^2}\right].$$

Dacă R (X, Y) se găseşte imediat

$$\overline{AR}^2 = X^2 + Y^2.$$

Apoi:

$$\overline{AP} = \pm \sqrt{c^2 + c^2m^2} = \pm c\sqrt{1 + m^2}$$

$$\overline{AQ} = \pm \sqrt{\frac{4a^2b^4}{(b^2 + a^2m^2)^2} + \frac{4a^2b^4m^2}{(b^2 + a^2m^2)^2}} = \pm \frac{2ab^2}{b^2 + a^2m^2}\sqrt{1 + m^2}.$$

Cu acestea relaţia din enunţ devine

$$X^2 + Y^2 = \frac{2ab^2c}{b^2 + a^2m^2}(1 + m^2).$$

Eliminând pe m între această ecuaţie şi (3) se găseşte că locul lui R este compus din dreptele izotrope

$$X^2 + Y^2 = 0$$

şi din elipsa

$$\frac{X^2}{2ac} + \frac{y^2}{\frac{2b^2c}{a}} - 1 = 0$$

cu centrul în A şi cu semiaxele egale cu

$$\sqrt{2ac} \quad \text{şi} \quad b\sqrt{\frac{2c}{a}}.$$

Notă. 1°. Au rezolvat foarte bine problema, luând axele de coordonate chiar axele elipsei, D-şoara GEORGETA ROMAŞCAN (Şc. Centrală Bucureşti) şi D-nii: A. I. CORNĂŢEANU, E. MARCOVICI, D. D. MAVRODIN, V. A. PĂDUREŢ, D. RIPIANU, AD. O. ŞAICHIN, JOE SEGAL şi I. I. ŢIŢEICA.

2°. Dacă se înlocueşte elipsa prin o hiperbolă sau prin o parabolă se găseşte că locul lui R este respectiv hiperbola

$$\frac{X^2}{2ac} - \frac{aY^2}{2b^2c} - 1 = 0$$

sau parabola

$$Y^2 = 2pc\,X$$

şi dreptele

$$X^2 + Y^2 = 0,$$

3°. Se găsesc locuri analoage, dacă se înlocueşte relaţia din enunţ prin relaţia mai generală

$$\overline{AR}^2 = K \cdot AP \cdot AQ$$

k fiind o constantă.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4933. *Să se împartă, numai cu ajutorul compasului, un segment dat* $\overline{AB}$ *în două părţi egale. Generalizare.*

Să se găsească numai cu ajutorul compasului centrul de simetrie al figurei formate de două puncte date A *şi* B.

O. N. ŢINO.

I. *Soluţie* dată de D-l GHEORGHE B. N. IONESCU (Clasa VIII-a, liceul „Sf. Petru şi Pavel", Ploeşti.

Din punctul A socotit centru şi cu raza $\overline{AB}$ descriem cercul (A) pe care îl împărţim cu ajutorul compasului, cum se ştie, în şase arce egale

$$\overset{\frown}{BC},\ \overset{\frown}{CD},\ \overset{\frown}{DE},\ \overset{\frown}{EF},\ \overset{\frown}{FG},\ \overset{\frown}{GB};$$

apoi din E, diametral opus lui B, luat centru şi cu raza cât $\overline{EB}$ descriem al doilea cerc E, tangent deci lui (A) în punctul B. Din punctul B luat centru şi cu raza $\overline{BA}$ descriem cercul (B) care taie cercul (E) în punctele H şi I; iar din H şi I luate drept centre cu raza cât $\overline{AB}$ descriem alte două cercuri (H) şi (I) care se taie a doua oară în M mijlocul lui $\overline{AB}$. In cazul segmentului trasat construcţia astfel are o verificare, punctul M de intersecţie al cercurilor (H) şi I urmând să se afle pe segmentul $\overline{AB}$.

Aceeaşi construcţie pentru cazul când se dă figura formată de punctele A şi B şi se cere centrul ei de simetrie.

Pentru a împărţi segmentul dat în 4, 8,..., 2^n părţi egale numai cu ajutorul compasului, este de ajuns a repeta construcţia de mai sus de $(2^n - 1)$ ori.

Justificarea construcţiei. Triunghiurile isoscele BHM şi BEH au un unghiu dela bază comun ($\sphericalangle$ HBM = $\sphericalangle$ HBE), deci ele sunt asemenea, adică avem şi:

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BE}} = \frac{1}{2}, \text{ deci } \frac{\overline{BM}}{\overline{BA}} = \frac{1}{2},$$

adică punctul M unde cercul (H) taie pe $\overline{AB}$ este mijlocul lui $\overline{AB}$. Asemenea cercul (I) trece prin mijlocul M al segmentului $\overline{AB}$; deci cele două cercuri (H) şi (I) se taie a doua oară în M, mijlocul segmentului $\overline{AB}$.

II. *Soluţie* dată de D-l PROFESOR GH. BASACOV. Din punctul B luat centru şi cu raza $\overline{BA}$ construim cercul (B); apoi construim arcele

$$\overset{\frown}{AP_1},\ \overset{\frown}{P_1Q_1},\ \overset{\frown}{Q_1A'},\ \overset{\frown}{A'Q_2},\ \overset{\frown}{Q_2P_2},\ \overset{\frown}{P_2A}$$

egale între ele. Din punctele A şi B centre descriem cercurile (A) şi (B) cu raza cât $\overline{AA'}$, care determină prin intersecţie punctele C şi C'. Din C luat centru cu raza cât $\overline{AB}$ construim cercul (C), tangent prin urmare cercului (B); iar din A luat centru cu raza cât $\overline{AQ_1}$ construim un nou cerc care taie cercul (C) în Q_1'. Triunghiul $AQ_1'C$ este dreptunghiu, iar centrul cercului $AQ_1'C$ este în punctul I unde cercul (Q_1') de rază $\overline{Q_1'C}$ taie cercul (C). Construind cercul $AQ_1'C$ el taie pe $\overline{AB}$ în M, mijlocul său.

Pentru problema a doua este de ajuns să construim şi cercul $AQ_2'C'$, simetricul lui $AQ_1'C$ faţă de AA'; cele două cercuri $AQ_1'C$ şi $AQ_2'C$ taie a doua oară în M mijlocul segmentului $\overline{AB}$. Generalizarea ca în cazul soluţiei precedente.

Pentru justificarea construcţiei de mai sus este suficient să observăm că CM fiind perpendiculară în triunghiul isoscel BCA pe AB, trece prin mijlocul lui $\overline{AB}$; dealtă parte $AQ_1'C$ este un triunghiu dreptunghiu, pentru că $\overline{AC}$, $\overline{AQ_1'}$, $\overline{CQ_1'}$ sunt respectiv egale cu diametrul, latura triunghiului echilateral înscris, latura exagonului regulat înscris relative la cercul O.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 5062. *Să se construiască un triunghiu* ABC *cunoscând poziţia în plan a laturei* BC *şi a unui cerc pe care se mişcă vârful* A *şi ştiind că una din înălţimi are o lungime dată. Discuţie.* G-L GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-nii: H. M. BODNĂRESCU (Lic. „T. Maiorescu", Bucureşti) şi M. D. POPA (Lic. militar, Iaşi).

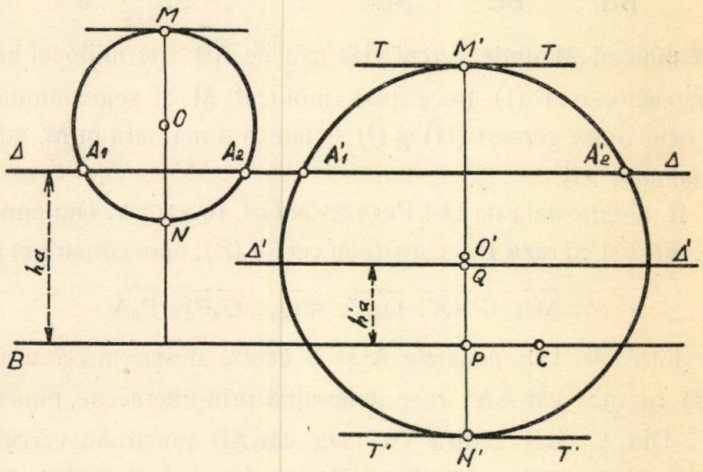


Fig. 1.

Se deosebesc două cazuri, după cum se cunoaşte înălţimea din A sau înălţimea din unul din celelalte vârfuri.

I. *Se cunoaşte înălţimea* h_a. Fie R, O, d raza, centrul şi distanţa la BC a centrului cercului pe care se află A. Pe fig. 1

este desenat cercul O în cazul când $R < d$ şi cercul O' în cazul când $d < R$.

Vârful A se găseşte atât pe cercul O cât şi pe o paralelă Δ la BC, dusă la distanţa h_a. Construcţia este imediată. Se caută intersecţiile A_1, A_2 ale dreptei Δ cu cercul O când $R < d$ sau intersecţiile A_1', A_2' cu cercul O' când $d < R$.

Discuţia cazului I. 1) $R < d$. Fie M şi N intersecţiile lui O cu perpendiculara din O pe BC. Se vede pe figura 1 că problema are soluţii numai dacă

$$d - R \leqslant h_a \leqslant d + R$$

şi anume:

1 soluţie BNC sau BMC după cum

$$h_a = d - R \quad \text{sau} \quad h_a = d + R.$$

2 soluţii dacă $d - R < h_a < d + R$.

2) $d < R$. Fie P proiecţia lui O' pe BC; M'T şi N'T' tangentele paralele la BC; Q simetricul lui M' faţă de P şi Δ' paralela la BC dusă prin Q. Se vede pe figură că:

Problema nu are nici o soluţie dacă

$$PM' = d + R < h_a$$

şi că avem:

1 soluţie când $h_a = PM' = d + R$.

2 soluţii când $R - d < h_a < d + R$.

3 soluţii când $h_a = \overline{PQ} = \overline{PM'} = \pm (R - d)$.

4 soluţii când $R - d < h_a < R + d$.

II. *Se cunoaşte înălţimea* h_b. Piciorul B' al înălţimei din B se află pe cercul cu centrul în B şi cu raza h_b, iar vârful A se va găsi la intersecţiile cercului O cu tangentele Δ, Δ', duse din C la cercul (B).

Discuţia cazului II. Fie (fig. 2) P, M, N, proiecţiunile lui O pe BC, Δ şi Δ'; D şi D' distanţele lui O la Δ şi Δ' şi R raza cercului O.

O primă condiţie de posibilitate a problemei este ca $h_b < BC$. Presupunând această condiţie îndeplinită posibilitatea problemei şi numărul soluţiilor depind de valorile lui R, D şi D'. Fie $D < D'$.

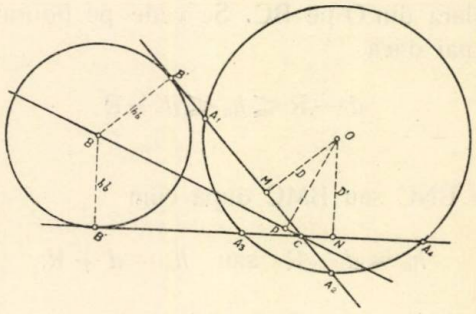


Fig. 2.

Se vede pe figură că vom avea:

zero soluţii dacă $R < D < D'$

1 soluţie dacă $R = D < D'$

2 soluţii dacă $D < R < D'$

3 soluţii dacă $D < R = D'$

4 soluţii dacă $D < D' < R$, cum este cazul figurei 2, care ne dă triunghiurile BA_1C, BA_2C, BA_3C, BA_4C.

Când $D = D'$ punctul O se află pe perpendiculara în C la BC şi problema are 0,2 sau 4 soluţii.

Când se dă înălţimea h_c problema se rezolvă absolut la fel.

Notă. 1°. Au considerat ambele cazuri, dând discuţia necomplectă şi neriguroasă, sau fără a face discuţia D-nii: D. C. VASILIU (Lic. militar, Tg. Mureş), ACHIL V. PETRESCU, AUREL N. POPA, GH. BOGDAN, O. ENULESCU, S. R. TURCU, P. P. DRĂGHICESCU (Lic. militar, laşi), CONST. I. CRISTEA (Lic. militar, Chişinău), R. E. GVIAZDOMORSCHI (Lic. militar, Cernăuţi) şi EFTIMIE D. CRISTEA (Lic. „Gh. Lazăr", Bucureşti).

2°. Soluţie parţială dela D-l OCT. E. GHEORGHIU (Lic. „Carol", Tulcea).

3°. Discuţia cazului II conduce la un bun exerciţiu de algebră dacă se calculează distanţele D, D' la tangentele Δ, Δ' în funcţie de datele problemei. Pentru corespondenţii, care doresc a face acest exerciţiu le dau următoarele indicaţiuni: Distanţele D, D' sunt date de formula

$$D_i = \frac{dh \pm d'\sqrt{a^2 - h^2} - ah}{a}$$

în care h este înălţimea din B sau C, d este distanţa OP dela O la BC şi d' este distanţa PB sau PC, după cum se dă h_b sau h_c.

Pentru discuţia algebrică nu rămâne decât a compara pe D_i cu raza R a cercului dat O.

G-L GH. BUICLIU.

PROBLEMA 5103. *Dintr'un punct* O, *la un moment dat, se asvârl două proectile în acelaşi plan vertical, cu iuţeala* v_0, *făcând cu orizontala unghiuri complimentare. Să se arate că în timpul mişcării dreapta* Δ *care uneşte cele două mobile rămâne paralelă cu o direcţie fixă. Să se studieze mişcarea centrului* G *al dreptei* Δ. *Să se arate că tangentele în extremităţile dreptei* Δ *şi în centrul său* G *duse respectiv la traectoriile proectilelor şi punctului* G *sunt concurente într'un punct* M. *Să se găsească locul geometric al punctului* M. *Mişcarea proectilelor se face în vid.*

ALEXANDRU STOENESCU.

Soluţie şi generalizare dată de DI- LOCOT. I. GH. ZAMFIRESCU:

Voi trata problema generală când iuţelile iniţiale sunt v_1 şi v_2, iar unghiurile de tragere α şi β. Fie x_1, y_1 şi x_2, y_2 coordonatele proectilelor după acelaşi timp t. Avem, după cum se ştie:

$$\begin{cases} x_1 = v_1 t \cos\alpha \\ y_1 = v_1 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = v_2 t \cos\beta \\ y_2 = v_2 t \sin\beta - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

ecuaţiuni parametrice care reprezintă cele două traectorii parabolice.

Ecuaţia dreptei Δ este:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$$

al cărei coeficient unghiular este:

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{v_1 \sin\alpha - v_2 \sin\beta}{v_1 \cos\alpha - v_2 \cos\beta} = \text{constant.}$$

Dreapta Δ *rămâne deci paralelă direcției fixe caracterizate prin acest coeficient.*

Coordonatele mijlocului G al segmentului Δ fiind:

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{și} \quad y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

avem:

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{v_1 \cos\alpha + v_2 \cos\beta}{2} \cdot t \\ y^3 = \dfrac{v_1 \sin\alpha + v_2 \sin\beta}{2} t - \dfrac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

Se observă ușor că ecuațiunile de mai sus reprezintă *mișcarea unui proectil asvârlit din* O *cu iuțeala inițială:*

$$v_3 = \frac{1}{2} \sqrt{(v_1 \cos\alpha + v_2 \cos\beta)^2 + (v_1 \sin\alpha + v_2 \sin\beta)^2}$$

sub unghiul de tragere φ dat de:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_1 \sin\alpha + v_2 \sin\beta}{v_1 \cos\alpha + v_2 \cos\beta}.$$

Relațiunile se deduc imediat din:

$$v_3^2 = \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2_{t=0} + \left(\frac{dy_3}{dt}\right)^2_{t=0} \quad ; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\left(\dfrac{dy_3}{dt}\right)_{t=0}}{\left(\dfrac{dx_3}{dt}\right)_{t=0}}.$$

Tangentele în același timp în punctele unde au ajuns mobilele sunt date de:

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

unde X, Y sunt coordonatele curente iar x şi y coordonate de pe traectorii. Inlocuind :

$$Y_1 - \frac{v_1 \sin\alpha - gt}{v_1 \cos\alpha} \cdot X_1 - \frac{1}{2} gt^2 = 0$$

$$Y_2 - \frac{v_2 \sin\beta - gt}{v_2 \cos\beta} \cdot X_2 - \frac{1}{2} gt^2 = 0$$

$$Y_3 - \frac{v_3 \sin\varphi - gt}{v_3 \cos\varphi} \cdot X_3 - \frac{1}{2} gt^2 = 0$$

drepte ale căror determinant al coeficienţilor este nul având coloanele extreme proporţionale.

Tangentele sunt deci concurente. Se vede uşor dacă fac în oricare ecuaţie $X = 0$ am :

$$Y = \frac{1}{2} gt^2$$

care dă poziţia la momentul t a punctului M.

Deci M descrie axa Oy, urcându-se ca şi când ar cădea, adică *el este imaginea mobilului ce ar cădea, liber din* O, *într'o oglindă orizontală aşezată în* O.

D-l LOCOT. I. GH. ZAMFIRESCU dă aceleeaşi probleme o interesantă soluţie geometrică. Remarcăm din această soluţie interesanta observaţiune pe care D-sa o face asupra iuţelilor iniţiale v_1, v_2 şi v_3:

v_3 este jumătate din suma vectorială a iuţelilor v_1 şi v_2.

$$\vec{v_3} = \frac{1}{2}(\vec{v_1} + \vec{v_2}).$$

Relaţia se putea obţine şi analitic observând că :

$$v_3 \cos\varphi = \frac{1}{2}(v_1 \cos\alpha + v_2 \cos\beta)$$

$$v_3 \sin\varphi = \frac{1}{2}(v_1 \sin\alpha + v_2 \sin\beta).$$

Din multiplele şi frumoasele proprietăţi găsite de D-l LOCOT. I. GH. ZAMFIRESCU cu ocazia rezolvării acestei probleme, nu ne putem reţine de a comunica cititorilor G. M. următoarele două :

1. *Fie un punct fix* O *pe traectoria unui mobil greu aruncat cu o iuțeală oarecare și punctul variabil* M *pe traectorie unde se găsește mobilul în mișcare.*

Tangenta la traectorie în punctul variabil M *taie tangenta în* O *în mijlocul distanței pe care ar fi parcurs-o mobilul plecat din* O, *dacă n'ar fi fost greu.*

2. *Fie familia de traectorii ce se pot descrie aruncând dintr'un punct* O, *mobile grele cu iuțeli și înclinări inițiale oarecari, în același moment.*

Tangentele la traectorii în punctele unde se găsesc proectilele în acelaș timp sunt concurente.

O soluție foarte bună urmată de o generalizare pentru iuțeli inițiale oarecari ale celor două proectile considerate, a fost dată de D-l SUBLT. M. GRUMĂZESCU.

Soluțiuni deasemenea foarte bune s'au mai primit dela D-nii: MARCEL F. AMĂRĂȘTEANU anul II Școala Politehnică București, IONESCU BOERU N. GHEORGHE anul preparator al Școlii Politehnice București, RIPIANU DUMITRU, JAREGHIE V. IOAN și POPA D. MIRCEA ultimii doi, elevi cl. 7 ai Liceului Militar Iași.

AL. S.

PROBLEMA 5148. *Din un punct în spațiu se duc* n *drepte numai deoparte a punctului. Să se arate că nu se poate ca toate unghiurile formate de câte două drepte să fie peste* 120^0.

I. IONESCU.

Fie O un punct în spațiu și D_1, D_2, D_3 trei drepte așa ca:

$$\sphericalangle D_1OD_2 = \sphericalangle D_2OD_3 = \sphericalangle D_3OD_1 = 120^0.$$

$O(D_1, D_2, D_3)$ este un triedru cu fețele de câte 120^0. Suma unghiurilor acestor fețe este deci 360^0. Se știe însă că suma unghiurilor unui unghiu poliedru oarecare este mai mică decât 360^0 (4 drepte). Reese de aci că dreptele OD_1, OD_2, OD_3 sunt coprinse în același plan P.

Să ducem în unul din *semi-spaciile* despărțite de planul P o *semi-dreaptă* OD'_1 care să facă cu D_1 un unghiu de 120^0. Locul geometric al lui D'_1 este semi-suprafața laterală a unui con cu vârful în O, axa lui fiind prelungirea lui D'_1 dincolo de O și unghiul generatoarei cu axa $\frac{1}{2}(180^0 - 120^0) = 30^0$.

Fie D_1'' o poziție a lui D_1' care face cu D_2 un unghiu de 120^0. Triedrul $O(D_1, D_2, D_1'')$ se va reduce ca și primul la un plan P_1. Acest plan și cu planul P au comune semi-dreptele D_1, D_2 concurente în O. Aceste plane se confundă deci și deci D_1'' se confundă cu D_3.

Am demonstrat astfel că nu poate exista o a patra dreaptă în condițiunile cerute. Deci nu există decât trei drepte în condițiunile din enunțul problemei.

Observări. 1. Pentru unghiul $\alpha = \frac{1}{2} 360^0 = 180^0$ problema se reduce la o dreaptă formată de cele două semi-drepte ale ei.

2. Pentru $\alpha = 360^0/n$ $(n > 3)$ s'ar putea crede că am avea n drepte. Se observă însă că la $\alpha = 90^0$ avem 4 drepte în un plan și una perpendiculară pe acel plan deoparte și de alta, deci 6 drepte în total.

Ar fi de studiat o generalizare pentru α având alte valori.

M. S. CHERȚMAN
(Lic. Giurgiu)

EXERCIȚII

7. M fiind un punct al hiperbolei echilatere de centru O și focare F_1, F_2, avem relația

$$MF_1 \cdot MF_2 = OM^2.$$

N. M.

R. OM e mediană în triunghiul F_1MF_2 deci

$$OM^2 = \frac{MF_1^2 + MF_2^2}{2} - \frac{F_1F_2^2}{4} = \frac{(MF_2 - MF_1)^2 + 2MF_1 \cdot MF_2}{2} - 2a^2 = MF_1 \cdot MF_2$$

căci $MF_2 - MF_1 = 2a$ și $F_1F_2 = 2a\sqrt{2}$, $2a$ fiind lungimea axei.

8. Fie M un punct în planul parabolei de axă Ox, vârf O. Perpendiculara din M pe Ox taie polara lui M, în P. Dacă M descrie dreapta OM, P descrie o paralelă la axă.

N. M.

R. Polara taie axa în T și tangenta în vârf în N; MP taie pe Ox în Q. N e polul dreptei OM, deci fix. Apoi OT = OQ („Pitagora", IV, 211) deci

$$PQ = 2 \cdot ON = \text{const.}$$

9. R_1, R_2, R_3 fiind razele cercurilor circumscrise triunghiurilor determinate de antiparalelele TUCKER, iar α lungimea lor, avem

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}=\frac{2p}{\alpha R}\ .$$

EUGEN VIJELIE.

R. Coardele a şi α opunându-se aceluiaşi vârf A, sunt proporţionale cu razele cercurilor circumscrise, deci

$$R_1=\frac{\alpha R}{a}\ ,\ \ldots\ \Sigma\frac{1}{R_1}=\frac{\Sigma a}{\alpha R}=\frac{2p}{\alpha R}\ .$$

PROBLEME PROPUSE

5210. Se cere exemple de calculul :

$$abc\times d=eeef.$$

I. IONESCU.

5211. Să se determine formele generale ale numerelor întregi şi pozitive p şi α, astfel ca expresiunea :

$$E\equiv 13^{3p}+7\,.\,13^{2p}+17\,.\,13^{p}+\alpha$$

să fie divizibilă cu *2244*.

O. N. ŢINO.

5212. Care sunt patratele perfecte care împărţite în două printr'o verticală ne dau două numere, unul multiplu al celuilalt.

G. G. CONSTANTINESCU.

5213. Să se demonstreze că dacă u_n este termenul de rangul n în şirul lui FIBONACCI, atunci suma

$$u_n^2\,x^{n+2}-\left[u_{n+1}^2-u_n^2+2\,(-1)^n\right]x^{n+1}-u_{n+1}^2\,x^n-x^2+2x+1$$

se divide prin $x+1$ oricare ar fi x.

G-L GH. BUICLIU.

5214. Fie α, β, γ un sistem de puncte colineare şi a, b, c picioarele a trei ceviene concurente pe laturile unui triunghiu ABC.

1°. Dreptele αb, αc taie pe AB, AC în C_a, B_a şi dreapta $B_a\,C_a$ taie pe BC în A'. A' şi analoagele sunt colineare.

2°. Dreptele $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ taie pe AB, AC în B_c, C_b şi $B_c\,C_b$ taie pe BC în A_1. A_1 şi analoagele sunt colineare.

N. N. MIHĂILEANU.

5215. Fie, în triunghiul ABC, punctele A_1, B_1, C_1 picioarele înălțimilor lui pe laturi, iar A', B', C' intersecțiile lor cu cercul ABC; $A_b\,A_c$ proiecțiile punctului A' pe celelalte două înălțimi, B_a, B_c și C_a, C_b punctele analoage; $A_2B_2C_2$ triunghiul format de dreptele $A_b\,A_c$, $B_a\,B_c$, $C_a\,C_b$ și $A_3B_3C_3$ triunghiul format de dreptele $A_b\,B_a$, $A_c\,C_a$, $B_c\,C_b$. Să se arate că:

1°. Triunghiurile $A_2B_2C_2$, $A_1B_1C_1$ sunt omotetice egale;

2°. Triunghiurile $A_3B_3C_3$, ABC sunt omotetice;

3°. Triunghiurile $A_2B_c\,C_b$ și cel format de latura BC cu dreptele lui SIMSON ale punctelor B', C' relative la triunghiul ABC, sunt omotetice;

4°. Patrulaterele $A_b\,B_a\,C_a\,C_b$, $A_b\,B_a\,A_1B_1$, $A_b\,A_c\,BC$ și analoagele lor sunt inscriptibile;

5°. Grupa de puncte A', B_3, B_2, C' și analoagele ei sunt grupe de puncte colineare.

I. GH. ZAMFIRESCU.

5216. Fie V vârful unui con circular drept și O centrul bazei. Notăm cu P un punct fix pe cercul de bază și cu (Δ) tangenta dusă la cerc în punctul P. Fie ω mijlocul înălțimii $OV = h$, iar M un punct mobil pe dreapta (Δ). Dreapta ωM intersectează conul într'un punct N. Când punctul M descrie tangenta (Δ), să se studieze variația segmentului de dreaptă ωN.

(Se va nota $\overline{MP} = x$ și $\overline{\omega N} = y$).

Să se determine valoarea lui x, pentru care $\overline{\omega N} = R$, știind că R este raza cercului de bază.

GH. DUMITRESCU.

5217. In afară de valoarea $u = 0$, mai există alte valori ale lui u pentru care expresiunea

$$\frac{x+u}{x-u}+\frac{y+u}{y-u}+\frac{z+u}{z-u}$$

este independentă de x, y, z?

GH. VASILIU.

5218. Să se determine natura seriei cu termeni pozitivi, definiți de relația de recurență:

$$\frac{2}{u_n}=\frac{1}{u_{n+1}}+\frac{1}{u_{n-1}},$$

unde u_n înseamnă termenul general, u_0 și u_1 fiind numere date.

I. I. ȚIȚEICA.

5219. Să se găsească ecuaţia unei drepte cunoscându-i-se direcţia şi ştiind că determină, în iperbola echilateră $x^2 - y^2 = a^2$, o coardă de lungime dată.

Să se găsească locul geometric al mijlocului coardei, când lungimea ei rămâne constantă. GH. D. SIMIONESCU.

5220. Se dau ecuaţiile:

$$A_i x^2 + 2B_i x + C_i = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, 3.$$

Pe o dreaptă (x'_1 , x''_1) , (x'_2 , x''_2) rădăcinile primelor două ecuaţii determină involuţia I, iar (x'_2 , x''_2) , (x'_3 , x''_3) rădăcinile ultimelor două ecuaţii determină involuţia I'.

a) Să se afle condiţia ca punctele duble ale involuţiei I' să se corespundă în involuţia I.

b) In acest caz, cum sunt punctele duble ale involuţiei I', dacă punctele duble ale involuţiei I sunt reale şi distincte ?

C. IONESCU-BUJOR.

5221. Se dau fixe în spaţiu, două cercuri (C) şi (C') şi o dreaptă D, oarecare. Se cere învelitoarea planului radical al sferelor trecând prin cercurile (C) şi (C') şi având centrele într'un plan ce trece prin dreapta D. ADRIAN GHEORGHIU.

5222. Să se integreze ecuaţia diferenţială

$$x^2(y' - 1) = y'^{2m},$$

m fiind întreg. M. GHERMĂNESCU.

5223. Să se integreze ecuaţia diferenţială

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ y' & y'' & y \\ y'' & y & y' \end{vmatrix} = 0.$$

MIHU CERCHEZ.

5224. O placă dreptunghiulară de dimensiuni a şi b este aşezată pe un plan lucios orizontal. Să se determine punctele periferice în care aplicând o percursiune orizontală să obţinem pentru placă o mişcare de rotaţie cu centrul instantaneu situat în unul din vârfurile sale. ALEXANDRU STOENESCU.

ERATĂ. 1°. In enunţul problemei 1735 se va lua

$$Q_i(x) = x^{n_i(p-1)} + x^{n_i(p-2)} + \ldots + 1.$$

2°. La problema 5197 în locul cuvântului *multiplicate* se va citi multiplicat.

3°. La problema 5199, ultimul rând este: se întâlnesc *încă* într'un punct.

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Alexandrescu V. V. (5160, 72, 86, 91); *Alexandru Virgil* (5160, 91); *Arabu I. C.* (5172, 91); *Bârlea-Suhăţeanu V.* (5160, 71, 72); *Bodnărescu M. H.* (5206); *Boiangiu D. D.* (5122, 35); *Cârdeiu D. Gh.* (5160, 72, 86, 91); *Cetăţeanu St.* (5151); *Cherţman S. M.* (4785, 5004, 90, 153, 60, 71, 80, 91); *Chiriţescu M. Matei* (5160); *Cocea Gh. Th.* (P); *Cocea Th. M.* (C); *Crăciunescu I. Mioara* (5159); *Diaconescu D. I.* (5198); *Dovgan V. Gh.* (5160, 72, 86, 91); *Enulescu Ovidiu* (5161); *Friedman I. Barbu* (5187); *Fulgeanu G. Dinu* (5160, 91); *Fulgeanu G. I.* (5172, 86); *Gheorghiu E. Oct.* (5062, 72, 191); *Herescu Const.* (5191); *Herman L.* (5090); *Ianculescu I. A.* (5160, 91); *Ionescu D. Stelian* (5160, 72); *Jipa C. Al.* (5143); *Leibovici Sergiu* (5131, 43, 75, 91); *Măgeanu Nicolae* (5160); *Mihăilescu D. D.* (5160); *Mironescu I. D-tru* (5160); *Mocanu I. Const.* (5159, 60, 91); *Modâlcă S. Emil* (4985, 5171); *Moessner A.* (N); *Moisi G. Iulian* (5160, 91); *Nadolu C. Gh.* (5191); *Niculescu C. Mircea* (5160); *Paicu Mircea* (5191); *Papadopol Demetra Elena* (5194); *Paraipan N. C.* (5150); *Pârvu V. A.* (5172, 91); *Pavlovschi V. Ştefan* (5160, 91); *Pletea Mircea* (5160, 72, 91); *Popescu Gh.* G-l (N); *Popescu Zorica N. Al.* (5191); *Reischer L. Herman* (5039, 56, 120, 22, 36, 42, 43, 50, 52, 59, 60, 71, 72, 87, 91); *Ripianu D-tru* (5026, 161, 207); *Rollea C. Vasile* (5160, 72, 91); *Şaichin O. A.* (5150, 81, 91); *Scurtu I. Ion* (5160, 72, 91); *Şeibulescu A. Const.* (5187); *Stamati I. Ion* (5160, 72); *Ştefănescu D. N.* (P); *Ştefanovici I. Mircea* (5187); *Stoianovici I. S.* (5158); *Ţarălungă Şt.* (5191); *Theodorescu N. Dorin* (5008, 171); *Tilică C. Ştefan* (4664, 881, 935, 5030, 60, 90, 97, 159); *Ţocu G. Petre* (5160, 72, 91); *Tofan Gh. Mircea* (5160, 72); *Topalescu Gh.* (5160, 91); *Trefilov I. Mihail* (5143, 59, 87); *Trofin I. P.* (5102, 205, 06); *Văduva F. Marin* (5001, 90); *Vasilescu-Stabu Al. M.* (N); *Vasiliu C. I.* (P); *Vijelie Gh. Eugen* (5114, 59, 60, 72, 74); *Vlădeanu Mircea* (5160); *Vlădescu Mircea* (5191); *Walter I. P.* (5160, 86); *Zamfirescu Gh. I.* Locot. (C).

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică* Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*
Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 50 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa :

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon : 3-9803).

C. 58.820.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLV

NUMĂRUL 4. — DECEMVRIE 1939

BIBLIOTECA CENTRALA
A UNIVERSITĂȚII
SIBIU

SUMARUL

1. George Ţiţeica (I. Viaţa. Omul) . *Gh. Th. Gheorghiu.*
2. Metoada în matematici . . . . . *Inginer Cristea Niculescu.*
3. Apolaritatea a două forme binare şi a unei forme binare cu o formă cubică . . . . . *N. Abramescu.*
4. Asupra studiului variaţiei unei funcţiuni . . . . . *Gh. Th. Gheorghiu.*
5. Note Matematice: 13 — 15.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 288.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 2017, 2694, 2727, 3588, 4135, 4881, 5044, 5058, 5087, 5104, 5153.
10. Exerciţii 10 — 14.
11. Probleme propuse: 5225 — 5240.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1939

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **D. Stoica,** Inginer; Cpt. Comandor-Inginer **Gr. Zapan**; **Al. D. Bunescu,** Inginer, Secretarul General al Ministerului Lucrărilor Publice şi Comunicaţiilor, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1939 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 5182, 83, 84, 85, 89, 92, 93, 95, 96, 97, 99, 200, 01, 02, 04, 06, 08, 09, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

Avem plăcerea a anunţa că dela 7 Decemvrie a. c. mai fac parte din Societatea noastră şi Domnii: *Claudian Virgil*, licenţiat în matematici; *Crăciunescu C.*, căpitan, inginer; *Dragomirescu-Buzne Ed.*, căpitan de artilerie; *Georgescu-Roegen Otilia*, licenţiată în matematici; *Germani D.*, inginer; *Marian Victor*, doctor în fizico-matematici; *Miclescu Andrei*, căpitan de artilerie; *Mihoc Gh.*, doctor în matematici; *Pavel Dorin*, doctor inginer; *Persu Aurel*, inginer; *Petrescu Gh.*, doctor în matemtici; *Popescu M. Ioan*, căpitan, licenţiat în matematici; *Ţintea M. Ioan*, doctor inginer.

GEORGE ȚIȚEICA

I. Viața. Omul

GEORGE ȚIȚEICA era originar din Turnu-Severin și s'a născut la 17 Octombrie 1873. Părinții lui, RADU și STANCA ȚIȚEICA oameni modești, trăiau din leafa ce avea tatăl său ca mecanic la unul din vapoarele ce navigau pe Dunăre. Până la 10 ani urmează grădina de copii dela școala germană și clasele primare la școala Nr. 1 din localitate. La vârsta de 8 ani pierde pe tatăl său rămânând să lupte singur cu greutățile vieții. Nu-și întrerupe studiile, ci din contră, pleacă la Craiova și urmează liceul Carol I cu ajutorul unei burse luată prin propriile sale puteri și eșind în fiecare an primul din clasă. Bacalaureatul, cum era obiceiul pe atunci, îl dă în București la Universitate și-l obține cu media 7 și 90/104. Tânărul ȚIȚEICA înzestrat dela natură cu o inteligență vie ajutată de o mare putere de muncă începe de aci încolo să înfrunte școlile cele mai grele obținând rezultate din ce în ce mai frumoase. In adevăr, în 1892, imediat după bacalaureat, intră în Școala Normală Superioară din București făcând în același timp și licența la facultate. Aci are ca profesori pe D-nii DAVID EMANUEL, SPIRU HARET, G-RAL IACOB LAHOVARY și CONSTANTIN GOGU. In 1895, absolvent al Școalei Normale Superioare, este numit pentru prima dată în învățământ la 27 Noembrie ca profesor suplinitor la Seminarul Nifon. Un an mai târziu, dă examenul de Capacitate pentru a intra în învățământul secundar, în urma căruia în Septembrie 1896 este numit cu titlul provizoriu la liceul de băieți din Galați, unde n'a funcționat nici o zi. Cu leafa obținută, și din care mai mult de jumătate îi trimetea mamei sale, ȚIȚEICA încurajat de succesele sale de până aci pleacă la Paris chiar în același an. Ajuns în capitala Franței intră intern la Școala Normală Superioară. In anul următor, ȚIȚEICA, în baza certificatelor de *calcul diferențial și integral* (12 Iulie 1897), *mecanică* (20 Iulie 1897) și *astronomie* (26 Iulie 1897) obține licența la Sorbona reușind *întâiul*. Acest rezultat strălucitor îi dă dreptul de a fi scutit de taxele de licență și doctorat. Printre profesorii pe care i-a avut aci, și care au avut o mare influență asupra carierei lui de mai târziu, trebue să amintim pe POINCARÉ, KOENIGS, HERMITE, GOURSAT, PICARD, TANNERY, APPELL și în

special pe decanul facultăţii, DARBOUX. Rămâne în Paris încă 2 ani în care timp îşi lucrează teza de doctorat sub direcţia lui DARBOUX, pe care l-a urmat şi l-a iubit ca pe un părinte. Îşi susţine teza la 30 Iunie 1899 cu remarcabila sa lucrare *Sur les congruences cycliques et sur les systèmes triplement conjugués*, având drept juriu: DARBOUX, KOENIGS, GOURSAT.

Reîntors în ţară, toată lumea îşi îndreaptă privirile asupra lui, formând speranţele de viitor ale începuturilor matematice depe atunci din ţară dela noi, speranţe pe care viitorul le-a adeverit ca fiind cu prisosinţă întemeiate. Cariera universitară a lui GEORGE ŢIŢEICA începe la 1 Noembrie 1899 când este numit suplinitor la catedra de calul integral şi diferenţial dela Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti, în locul titularului Generalul LAHOVARY care era în concediu. ŢIŢEICA pus la lucru impresionează pe colegii săi mai bătrâni prin vastele lui cunoştinţe, aşa încât peste un an, la moartea lui CONSTANTIN GOGU, şi pe când nu împlinise încă 27 ani, în Mai 1900, este numit profesor agregat la catedra de *geometrie analitică şi trigonometrie sferică*. Curând, în 1903 este numit titular al acestei catedre, pe care a ilustrat-o timp de aproape 40 ani.

Pe lângă această catedră ŢIŢEICA este chemat, întâi ca suplinitor în Octombrie 1927, apoi ca titular în Aprilie 1928, la catedra de analiză matematică dela Şcoala Politechnică din Bucureşti, rămasă vacantă prin retragerea la pensie a fostului profesor, DAVID EMANUEL. Iată ce scrie comisia, formată din D-nii I. IONESCU, A. G. IOACHIMESCU şi T. LALESCU în raportul lor prezentat consiliului pentru recomandarea lui ŢIŢEICA:

... „GHEORGHE ŢIŢEICA şi-a câştigat prin munca sa destoinică şi prin rezultatele importante obţinute în geometria superioară unul din locurile de frunte printre marii geometrii actuali ai lumii".

„Chemarea sa ca profesor agreeat la Universitatea din Paris unde a profesat cu strălucire, acum câţiva ani, un curs original asupra geometriei diferenţiale proiective, conferinţele ţinute la Bruxelles, comunicările făcute la congresele internaţionale de matematicieni din Roma, din Cambridge şi la ultimul congres de această natură ţinut în America la Toronto, unde a avut onoare de a fi ales preşedinte al secţiunei de geometrie, sunt atâtea semne exterioare care arată locul pe care-l ocupă GHEORGHE ŢIŢEICA în cercurile matematice"... şi mai departe:

... „Din expunerea de mai sus reiese în deajuns că GHEORGHE ȚIȚEICA nu numai că îndeplinește condițiile cerute de lege, citate mai sus, dar că D-sa va contribui, prin puternica sa personalitate, atunci când va fi în mijlocul nostru, la întărirea prestigiului științific al Școalei Politechnice și la cultura matematică a elevilor noștrii; nu trebue uitat că fala școlilor o face fala profesorilor“ ...

Lecțiunile ținute de el la Facultatea de Științe, în cadrul catedrei sale, ce mai târziu și-a schimbat numele în *geometrie analitică și superioară,* se adresau studenților din anul I în ceea ce privește geometria analitică plană și în spațiu și studenților din ultimul an, în ceea ce privește geometria superioară, în cadrul căreia ȚIȚEICA studia câte un capitol anumit de geometrie și pe care îl schimba în fiecare an. Ba mai mult, de cele mai multe ori chiar cursului de anul I îi schimba forma, și câte odată chiar conținutul. Oricare ar fi fost însă publicul căruia i se adresa, ȚIȚEICA venea pregătit la oră. Cu toate că, atunci când preda nu avea nici un caiet în fața lui, totuși el își pregătea lecția scriindu-și-o acasă. De aceea expunerile lui erau curgătoare, precise și pline de claritate. O mare calitate a lui ȚIȚEICA era faptul că deși om de știință, cu vaste cunoștințe în materia ce o preda, totuși știa să se coboare la nivelul clasei. Lecțiile lui erau făcute după toate regulele pedagogice: începeau cu o introducere reamintind rezultatele stabilite în lecțiile anterioare și se sfârșiau cu o încheiere rezumând conținutul ei; timpul era în așa fel cântărit pentru ca lecția să nu rămână niciodată trunchiată. Reușita lecțiilor sale era asigurată prin cucerirea auditorului de către persoana profesorului. Intr'adevăr ȚIȚEICA om de statură mijlocie avea o figură modestă dar demnă, fața lui era întotdeauna luminată de un zâmbet cuceritor: îți dădea impresia că în fiecare lecție ȚIȚEICA punea ceva din sufletul său! Nu întârzia niciodată dela oră, cu toate că orele lui și le așeza intenționat la 8 dimineața. Aceste calități făceau din ȚIȚEICA unul dintre cei mai stimați și iubiți dintre profesori. De aceea, foștii lui elevi, chiar atunci când ajungeau oameni formați își aduceau aminte cu multă plăcere de lecțiile lui și când aveau posibilitatea, veneau să-l asculte cu aceeași plăcere cu care îl ascultase odinioară. In 1930, fiind chemat la Paris să țină o serie de lecțiuni la Sorbona a fost nevoit să lipsească o lună dela curs. La înapoere, studenții entuziasmați de apariția lui, l'au aplaudat în picioare câteva momente!

ȚIȚEICA surprins, a căutat să oprească această manifestație sinceră, deoarece era ceva ce nu se împăca cu firea lui. Altă dată, când în 1938 ȚIȚEICA se întorcea dela Viena în urma unei operații, un inginer, al cărui băiat era în clasa VIII-a, îmi spunea: „mi-e teamă că băiatul meu n'o să mai aibă norocul de a-l avea pe ȚIȚEICA profesor; de aceea cu prima ocazie îl voiu lua dela școală și-l voiu duce să-l asculte măcar odată, pentru ca mai târziu să poată spune și el că l-a ascultat pe ȚIȚEICA".

Impunătoarea sa personalitate științifică, cinstea și seriozitatea cuvântului său au fost calități prin cari ȚIȚEICA s'a impus păturei intelectuale din țara noastră. Iată dece în 1913 Academia Română îl alege membru activ în locul rămas vacant prin moartea lui SPIRU HARET. Mai târziu în 1929 este ales secretar general, demnitate pe care o păstrează până la moarte. In afară de aceasta, ȚIȚEICA a fost decan al Facultății de Științe din București din Iulie 1919 până în Februarie 1923, președinte în diferite rânduri al Societății Române de Științe, secția matemateci, depe lângă facultate și președinte cultural dela înființare al „Caselor Naționale". In plus, ȚIȚEICA era chemat întotdeauna la posturi de răspundere în care se cerea o judecată dreaptă și imparțială. Unde se ducea, semenii lui îi ascultau sfaturile și le urmau întocmai. Așa se explică că dela 1905, cu mici întreruperi, până în 1938, a fost membru și apoi președinte în forul cel mai înalt al ministerului Educației Naționale, la Consiliul Permanent. In 1920 când s'a organizat Universitatea din Cluj, este membru în comisia de numire a profesorilor, apoi membru în comisia de judecată a profesorilor universitari, președinte al examenului de capacitate pentru profesorii secundari, președinte în diferite rânduri la examenul de bacalaureat, multă vreme vice-președinte al Societății Politechnice ș. a. m. d.

ȚIȚEICA era omul datoriei, sentiment pe care îl avea în cel mai înalt grad. Ii plăcea să muncească la un loc cu cei din jurul său, fără a face nici o deosebire. Iată cum rezuma el această înaltă concepție a datoriei: *N'am fost toată viața mea decât un simplu soldat. Am dorit să rămân în rândul muncitorilor neamului meu.* Aceasta era lozinca lui și pe care fiecare dintre noi ar trebui să ne-o însușim.

Prin lucrările sale științifice, pe care le vom analiza într'un al doilea articol, ȚIȚEICA se făcuse încă de mult cunoscut în

străinătate. De aceea a fost chemat în trei rânduri să ţină conferinţe la Sorbona, dintre care cele din 1926 au fost publicate într'o fascicolă din „Mémorial". Deasemeni în 1934 este ales *Doctor Honoris Causa* al Universităţei din Varşovia. Toate acestea i-au adus o serie de decoraţii pe care el nu le-a râvnit dar pe care le-a meritat cu prisosinţă. Astfel, era *Ofiţer al legiunei de onoare*, deţinea cea mai mare decoraţie poloneză „*Vulturul Alb*", *Steaua României* în gradul de *Mare Ofiţer*, *Coroana României* în gradul de *Mare Cruce*, *Răsplata muncii* clasa I, *Bene Merenti* clasa I, ş. a. m. d.

Din toate cele de mai sus îşi poate da oricine seama cu cât regret a primit opinia publică intelectuală românească ştirea adusă de toate ziarele în dimineaţa zilei de 5 Februarie 1939, că profesorul GEORGE ŢIŢEICA nu mai este. Cei care îl cunoaştem mai de aproape, şi care ştiam că o boală grea îl ţinuse în pat câteva luni, nu puteam să ne obişnuim la gândul că ŢIŢEICA ne va părăsi. Moare astfel în vârstă de 65 ani în plină activitate ştiinţifică lăsând în urma lui un gol imens, iar pentru noi, cei care l'am admirat şi iubit, o veşnică părere de rău.

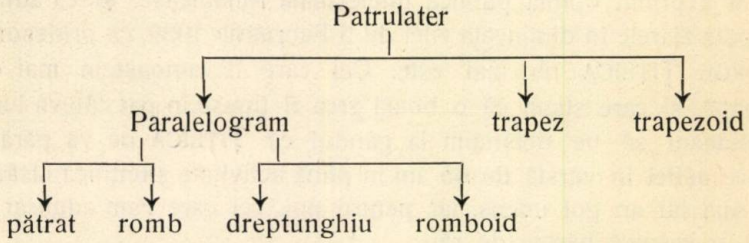
GH. TH. GHEORGHIU.

METOADA IN MATEMATICI

CU PRILEJUL UNEI CĂRŢI NOI DESPRE O DISCUŢIE VECHE

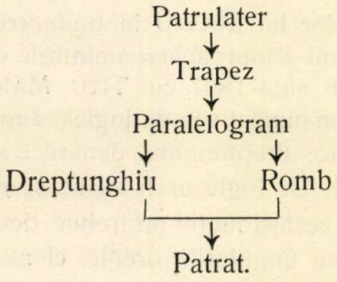
Apariţia Elementelor lui EUCLID în traducerea românească a D-lui VICTOR MARIAN mi-a înprospătat amintirile despre o discuţie, pe care am avut-o prin anul 1897 cu TITU MAIORESCU. Spunea anume MAIORESCU în manualul său de logică, după care învăţasem în liceu, că greşit se zice dreptunghiu, deoarece această denumire ar cuprinde şi pătratele, iar logic ar fi să se spuie oblong în loc de dreptunghiu. Pentru acelaşi motiv nu trebue definit dreptunghiul ca fiind un patrulater cu unghiurile drepte, ci ca având şi laturile neegale. I-am scris atunci o scrisoare, prin care îi atrăgeam atenţia că pentru matematicile de azi pătratul este dreptunghiu. S'a mărginit să anunţe la curs, că a primit o astfel de scrisoare, că îşi închipuia că matematica merge mână în mână cu logica, dar se pare că s'a înşelat.

Nu aşi reveni asupra acestei chestiuni, dacă ea nu ar scoate la iveală o lipsă a logicei, aşa cum se expune de obicei, anume lipsa studiului metoadei în matematici. Entusiasmaţi de efectele clasificării şi diviziunii din ştiinţele naturale şi foarte probabil din pricina lipsei de cunoştinţi mai adânci în ale matematicilor, logicienii nu au văzut decât clasificarea şi diviziunea. Ei nu şi-au dat seama că alături de acestea matematicile folosesc drept metoadă aceea a cazurilor generale şi particulare. Diviziunea presupune genuri (totum divisum) care se împart în specii (partes). Iată cum văd de exemplu logicienii clasificarea patrulaterelor (Logica pentru clasa VII-a liceală de IOAN PETROVICI şi IOAN F. BURICESCU [1]) :



Trapezoidul ar fi patrulaterul care nu este nici paralelogram nici trapez, romboidul ar fi paralelogramul cu laturi neegale şi nedreptunghiu, iar dreptunghiul ar fi paralelogramul cu unghiuri drepte, dar laturi neegale.

In metoada cazurilor particulare schema patrulaterelor este următoarea :

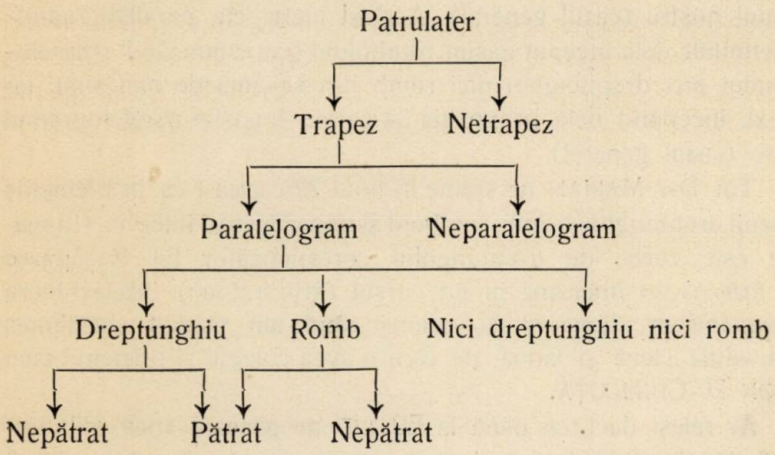


Nu este nevoie să explic pentru cititorii *Gazetei* această schemă. Nu este nevoie să le spun că paralelogramul este un caz

1) Cu D-l BURICESCU pe când eram studenţi, am frământat multe seri chestia pătratului şi dreptunghiului.

particular de trapez, sau că patratul este un caz particular şi de dreptunghiu şi de romb.

Este evident că această schemă nu corespunde cerinţelor diviziunii logice, cerinţe care vor ca un tot să fie împărţit în cel puţin două părţi (dichtomie). Pentru a satisface această cerinţă schema ar trebui să se înfăţişeze în felul următor:



Propriu zis nici această schemă nu satisface regulile diviziunii logice, care nu admite ca o specie să aparţie la două genuri (o plantă de exemplu nu poate fi şi mono şi dicotiledonată) pe când la noi pătratul aparţine şi genului dreptunghiu şi genului romb, după cum îl socotim ca un dreptunghiu cu laturi egale, sau ca un romb cu unghiuri drepte.

Să vedem atunci de ce matematicile nu se încadrează în metoada clasificării şi diviziunii şi au adoptat metoada cazurilor generale şi particulare.

In Elementele lui EUCLID găsim la p-tul 22 al definiţiilor: „Pătrat este acela care este echilater şi dreptunghic; dreptunghiu acela care *este dreptunghic, dar nu este echilater;* romb, acela care este echilater, dar nu este dreptunghic; romboid acela care are atât laturile cât şi unghiurile opuse egale între ele, dar nu este nici echilater, nici dreptunghic; iar patrulaterele în afară de acestea să se numească trapeze". In traducerea sa D-l MARIAN a folosit pentru cuvântul grecesc ἑτερόμηκεσ termenul „dreptunghiu".

Aci s'ar fi aplicat termenul oblong al lui MAIORESCU (luat după textul frances al lui LEGENDRE). Căci EUCLID întrebuinţează pentru ceea ce noi numim dreptunghiu cuvântul ὀρθογώνιον. Acest din urmă cuvânt se găseşte începând cu cartea II-a. Cu alte cuvinte, dacă în definiţiile dela început găsim oblongul lui MAIORESCU (corespunzând dreptunghiului nepătrat din schema de mai sus), în text — atunci când studiază proprietăţile figurilor găsim dreptunghiul nostru (cazul general). Acelaşi lucru cu paralelogramul: în definiţiile dela început găsim romboidul (corespunzând paralelogramului nici dreptunghiu nici romb din schema de mai sus), iar în text, începând dela propoziţia 34 cartea I, găsim paralelogramul nostru (cazul general).

Tot D-l MARIAN ne spune în nota 22 cartea I că în Elemente termenii dreptunghiu, romb, romboid şi trapez nu mai intervin. (In realitate este vorba de dreptunghiul corespunzător lui ἑτερόμηκες căci ὀρθογώνιον intervine în tot cursul cărţii a doua). Acelaşi lucru îl constatasem atunci şi eu, atunci când am studiat chestiunea după ediţia elenă şi latină, pe care o avea colegul şi prietenul meu ANTON D. CHIRICUŢĂ.

Ar reieşi deci, că până la EUCLID ne găseam încă sub imperiul diviziunii din logică şi că el a simţit nevoia să o înlocuiască prin cazurile generale şi particulare, părăsind toate acele noţiuni caracterizate prin ne... *Deci* EUCLID *ar fi părintele metoadei cazurilor generale şi particulare*, căreia matematicile îi datoresc întreaga lor situaţie de azi.

Şi atunci, după trecere de aproape o jumătate de veac, putem spune că, atunci când am avut discuţiunea cu TITU MAIORESCU, nu matematicile nu mergeau mână în mână cu logica, ci aceasta — sau în orice caz acel ce avea pretenţia să o întruchipeze — nu trecuse în ce priveşte cunoştinţele matematice de perioada preeuclidiană. De altfel până azi nu am văzut pomenindu-se în nici un tratat de logică de metoada cazurilor generale şi particulare şi aceasta îndreptăţeşte rândurile de faţă.

INGINER CRISTEA NICULESCU.

APOLARITATEA A DOUĂ FORME BINARE ŞI A UNEI FORME BINARE CU O FORMĂ CUBICĂ

Rezumat. Se găseşte condiţia $a_0b_2 - 2a_1b_1 + a_2b_0 = 0$ de apolaritate a formelor binare

$$F_2 = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2 \quad , \quad \Phi_2 = b_0x^2 + 2b_1xy + b_2y^2,$$

care exprimă că dreptele $\Phi_2 = 0$ separă armonic dreptele $F_2 = 0$. Se găsesc apoi condiţiile

$$a_0c_3 - 2a_1c_2 + a_2c_1 = 0 \quad , \quad a_0c_2 - 2a_1c_1 + a_2c_0 = 0$$

de apolaritate ale formelor

$$F_2 = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2 \quad , \quad F_3 = c_0x^3 + 3c_1x^2y + 3c_2xy^2 + c_3y^3.$$

Se determină F_3 când F_2 este dată şi deasemenea se găseşte F_2 când F_3 este cunoscută.

1. *Apolaritatea formelor binare* $F_2 = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2$, $\Phi_2 = b_0x^2 + 2b_1xy + b_2y^2$. Coeficienţii unghiulari m_1, m_2 ai dreptelor $F_2 = 0$ şi m_3, m_4 ai dreptelor $\Phi_2 = 0$ sunt daţi respectiv de ecuaţiile

$$(1) \quad a_2m^2 + 2a_1m + a_0 = 0 \quad , \quad b_2m^2 + 2b_1m + b_0 = 0.$$

Formele F_2 şi Φ_2 se zic apolare, când dreptele $\Phi_2 = 0$ separă armonic dreptele $F_2 = 0$, adică fascicolul format de dreptele $F_2 = 0$, $\Phi_2 = 0$ este armonic. Deci

$$\frac{m_3 - m_1}{m_3 - m_2} : \frac{m_4 - m_1}{m_4 - m_2} = -1, \quad (m_1 + m_2)(m_3 + m_4) = 2(m_1m_2 + m_3m_4).$$

Inlocuind

$$m_1 + m_2 = -\frac{a_1}{a_2} \quad , \quad m_1m_2 = \frac{a_0}{a_2} \quad , \quad m_3 + m_4 = -\frac{b_1}{b_2} \quad , \quad m_3m_4 = \frac{b_0}{b_2},$$

date de (1), obţinem

$$a_0b_2 - 2a_1b_1 + a_2b_0 = 0,$$

condiţia de apolaritate a formelor

$$a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2 \quad , \quad b_0x^2 + 2b_1xy + b_2y^2.$$

2. *Apolaritatea formelor* $F_2 = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2$, $F_3 = c_0x^3 + 3c_1x^2y + 3c_2xy^2 + c_3y^3$. Fie OM_1, OM_2, OM_3 dreptele $F_3 = 0$, şi OP, OQ dreptele $F_2 = 0$. Să însemnăm cu OM'_1 conjugata armonică a lui OM_1 în raport cu OM_2, OM_3; OM'_2, OM'_3 dreptele analoage. Formele F_2 şi F_3 se zic apolare dacă dreptele OP şi OQ separă armonic perechile (OM_1, OM'_1), (OM_2, OM'_2), (OM_3, OM'_3).

Coeficienţii unghiulari m_1, m_2, m_3 ai dreptelor $F_3 = 0$, şi μ_1, μ_2 ai dreptelor $F_2 = 0$ sunt daţi de

$$c_3m^3 + 3c_2m^2 + 3c_1m + c_0 = 0, \tag{2}$$

$$a_0m^2 + 2a_1m + a_2 = 0. \tag{3}$$

Să însemnăm cu m'_1, m'_2, m'_3 coeficienţii unghiulari ai dreptelor OM'_1, OM'_2, OM'_3 şi să exprimăm că OM_3, OM'_3 separă armonic perechile (OM_1, OM_2) şi (OP, OQ). Obţinem

$$(m_3 + m'_3)(m_1 + m_2) = 2(m_3m'_3 + m_1m_2), \tag{4}$$

$$(m_3 + m'_3)(\mu_1 + \mu_2) = 2(m_3m'_3 + \mu_1\mu_2). \tag{5}$$

Din (2) avem

$$m_1 + m_2 = -\frac{3c_2}{c_3} - m_3 \quad , \quad m_1m_2 = -\frac{c_0}{c_3m_3},$$

şi înlocuind în (4), însemnând $m_3 = m$, $m'_3 = m'$, găsim

$$m' = \frac{-c_3m^3 - 3c_2m^2 + 2c_0}{3c_2m + 3c_3m^2}.$$

Observând (2), devine

$$m' = \frac{c_1m + c_0}{m(c_3m + c_2)}, \tag{6}$$

$$m^2c_3m' + m(c_2m' - c_1) - c_0 = 0. \tag{7}$$

Să eliminăm pe m între ecuaţiile (2) şi (7). Inmulţind ecuaţia (7) cu $-m$ şi pe (2) cu m', şi adunând, avem

$$(2c_2m' + c_1)m^2 + (3c_1m' + c_0)m + c_0m' = 0.$$

Eliminând pe m între această ecuaţie şi (7), obţinem

$$(c_0c_3^2 + 2c_2^3 - 3c_1c_2c_3)m'^3 + 3(c_1c_3^2 - 2c_1^2c_3 + c_0c_2c_3)m'^2 -$$
$$- 3(c_1^2c_2 - 2c_0c_2^2 + c_0c_1c_3)m' - (c_0^2c_3 + 2c_1^3 - 3c_0c_1c_2) = 0,$$

care dă coeficienţii unghiulari ai dreptelor OM'_1, OM'_2, OM'_3.

Dacă ecuaţia dreptelor OM_1, OM_2, OM_3 este $c_0x^3+c_3y^3=0$, aceea a dreptelor OM'_1, OM'_2, OM'_3 este $c_0x^3-c_3y^3=0$.

De asemenea, înlocuind în (5) pe

$$\mu_1+\mu_2=-\frac{2a_1}{a_2}\quad,\quad \mu_1\mu_2=\frac{a_0}{a_2}$$

date de (3), găsim

$$m'=-\frac{a_0+ma_1}{a_1+ma_2}.$$

Egalând această valoare cu (6), avem relaţia

$$a_1c_3m^3+(a_0c_3+a_1c_2+a_2c_1)\,m^2+(a_0c_2+a_1c_1+a_2c_0)\,m+a_1c_0=0,$$

care trebue să fie ecuaţia (2). Deci trebue să avem

$$\frac{a_1c_3}{c_3}=\frac{a_0c_3+a_1c_2+a_2c_1}{3c_2}=\frac{a_0c_2+a_1c_1+a_2c_0}{3c_1}=\frac{a_1c_0}{c_0},$$

de unde urmează relaţiile

$$a_0c_3-2a_1c_2+a_2c_1=0\quad,\quad a_0c_2-2a_1c_1+a_1c_0=0,$$

care sunt condiţiile de apolaritate a formei cubice

$$F_3=c_0x^3+3c_1x^2y+3c_2xy^2+c_3y^3$$

şi a formei binare

$$F_2=a_0x^2+2a_1xy+a_2y^2.$$

3. *Determinarea formei cubice* F_3 *apolară cu forma binară* F_2.

Fie $u_1=y-m_1x=0$, $u_2=y-m_2x=0$

ecuaţiile dreptelor OP, OQ date de $F_2=0$ şi m_1, m_2 coeficienţii lor unghiulari daţi de (3). Să considerăm trei perechi (OA, OA'), (OB, OB'), (OC, OC') separate armonic de OP, OQ. Ecuaţiile lor sunt

$$OA=u_1+l_a\,u_2=0\ ,\ OB=u_1+l_b\,u_2=0\ ,\ OC=u_1+l_c\,u_2=0,$$

$$OA'=u_1-l_a\,u_2=0\ ,\ OB'=u_1-l_b\,u_2=0\ ,\ OC'=u_1-l_c\,u_2=0.$$

Formele F_2 şi F_3 sunt apolare dacă (OA, OA') separă armonic (OB, OC). Două drepte conjugate armonic în raport cu (OB, OC) sunt

$$u_1+l_b\,u_2+\lambda(u_1+l_c\,u_2)=0\ ,\ u_1+l_b\,u_2-\lambda(u_1+l_c\,u_2)=0.$$

Exprimând că sunt OA şi OA', avem

$$1+\lambda=\frac{l_b+\lambda l_c}{l_a}\quad,\quad 1-\lambda=\frac{l_b-\lambda l_c}{-l_a}\,.$$

Egalând valorile lui λ, găsim $l_a^2=l_b\,l_c$. Fie $hl^3+\ldots+k=0$ ecuaţia care dă pe l_a, l_b, l_c. Avem $l_a\,l_b\,l_c=-\frac{k}{h}$ şi înlocuind $l_b\,l_c=-\frac{k}{hl_a}$ în $l_a^2=l_b\,l_c$, găsim $hl_a^3+k=0$. Dar

$$l_a=-\frac{u_1}{u_2}=-\frac{y-m_1x}{y-m_2x}\,,$$

şi deci

$$F=h\,(y-m_1x)^3+k\,(y-m_2x)^3,$$

care este forma cubică apolară cu forma binară F_2; m_1, m_2 fiind daţi de $a_2m^2+a_1m+a_0=0$.

4. *Determinarea formei binare* F_2 *apolară cu forma cubică*

$$F=c_0x^3+3c_1x^2y+3c_2xy^2+c_3y^3.$$

Hessianul formei F este

$$\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix}=36\,[(c_0c_2-c_1^2)\,x^2+(c_0c_3-c_1c_2)\,xy+(c_1c_3-c_2^2)\,y^2],$$

$$F_{xy}=\frac{\partial^2F}{\partial x\,\partial y}\,.$$

Scriind că este proporţional cu $F_2=a_0x^2+2a_1xy+a_2y^2$, avem

$$\frac{c_0c_2-c_1^2}{a_0}=\frac{c_0c_3-c_1c_2}{2a_1}=\frac{c_1c_3-c_2^2}{a_2}\,.$$

Inmulţind termenii rapoartelor respectiv cu c_2, $-c_2$, c_0 şi c_3, $-c_2$, c_1, şi făcând suma termenilor rapoartelor, se obţin rapoarte cu numărătorii egali cu zero, şi deci numitorii trebue să fie egali cu zero,

$$a_0c_3-2a_1c_2+a_2c_1=0\quad,\quad a_0c_2-2a_1c_1+a_2c_0=0,$$

care sunt condiţiile de apolaritate a formei binare F_2 şi cubice F. Deci, *forma binară* F_2 *apolară cu forma cubică* F *este proporţională cu hessianul formei* F.

5. Aceste forme apolare au aplicaţie la *determinarea tangentelor lui* DARBOUX într'un punct al unei suprafeţe.

N. ABRAMESCU.

ASUPRA STUDIULUI VARIAȚIEI UNEI FUNCȚIUNI

1. Articolul de față conține diferite observațiuni relative la studiul și graficul unei funcțiuni definită printr'o ecuație de forma: $y = f(x)$. Deaceea este scris în spiritul unei lecții și se îndreaptă către toți aceia cari învață acest capitol: elevii din clasa VII-a, studenții anului I dela Facultate și dela Școala Politehnică, și elevii din primul an ai Școalelor de Ofițeri. Trebue să mărturisesc că ceiace m'a făcut să-l scriu este faptul că în calitatea mea de profesor sau asistent al acestor categorii de elevi, am constatat că în general le lipsesc tocmai partea cea mai importantă a acestui capitol: găsirea domeniului de existență al funcțiunei de studiat. Probabil că această lipsă se datorește faptului că în liceu nu se dă o atenție specială inegalităților lucru încurajat chiar de fosta programă analitică.

In cele ce urmează vom da mai întâiu un tablou care va indica drumul ce trebueşte urmat în studiul unei funcțiuni, fără a da indicații prea multe asupra chestiunilor fundamentale, ci insistând în special asupra chestiunilor de detaliu, cari se trec de obiceiu cu vederea, în special în ceiace privește găsirea domeniului de existență.

2. Iată un tablou de normele după care trebue să se conducă cineva în studiul și graficul unei funcțiuni:

a) stabilirea intervalului de existență;

b) calculul valorilor funcțiunei la capetele intervalului de existență;

c) calculul derivatei;

d) găsirea valorilor lui x cari anulează derivata:

e) studiul semnului derivatei;

f) găsirea valorilor maxime, minime și de inflexiune ale funcțiunei;

g) puncte de discontinuitate;

h) punctele unde curba taie axele de coordonate.

Evident că uneori putem lăsa anumite puncte din acest tablou deoparte, deoarece ele pot îngreuia studiul ce ne interesează.

De exemplu, găsirea punctelor unde curba taie axa abciselor poate conduce la rezolvarea unei ecuaţii de grad superior, în general greu de efectuat. In asemenea cazuri de multe ori graficul funcţiunei ne conduce la precizarea naturei rădăcinilor acestei ecuaţii.

Alte ori este bine ca tabloul de mai sus să fie complectat. De exemplu, este bine să se calculeze derivata a doua, când calculul nu este prea greoi, deoarece ea ne dă convexitatea curbei. Tot aşa, este bine să se găsească, atunci când ele există, asimptotele curbei cari nu sunt paralele cu axele de coordonate, bine înţeles urmându-se calea cunoscută.

3. A găsi intervalul de existenţă, însemnează a găsi între ce limite trebue să varieze necunoscuta x pentruca funcţiunea y să ia valori reale. Acest calcul este, în unele cazuri dificil, şi cere în general multă atenţie.

Dacă funcţiunea se prezintă sub formă de polinom, fracţie raţională, funcţiuni trigonometrice directe, funcţiunea *arc tgx*, sau o combinare de astfel de funcţiuni, intervalul de existenţă este dela $-\infty$ la $+\infty$. In caz însă că în compunerea funcţiunei intră un radical de ordin cu soţ, funcţiunile trigonometrice inverse *arc sinx* şi *arc cosx*, sau o combinare a acestor funcţiuni între ele sau cu cele dela cazul precedent, intervalul de existenţă nu mai poate fi precizat a priori şi diferă dela caz la caz. Pentru găsirea lui se procedează astfel. In cazul unui radical de ordin par se pune condiţia ca expresia de subt el să fie pozitivă; dacă avem deaface cu funcţiunea *arc sinu* sau *arc cosu* (u fiind funcţie de x) se pune condiţia ca u să rămână cuprins între -1 şi $+1$. Evident că aceste din urmă funcţiuni, compuse între ele, pot aduce o micşorare a intervalului de existenţă sau o lărgire a lui după cum se va vedea pe exemplele ce urmează. In ceiace priveşte funcţiunea *logu* nu se mai obişnuieşte să se pună condiţiunea ca u să fie pozitiv, deoarece în aproape toate cărţile moderne de algebră şi analiză se consideră în locul funcţiunei precedente, funcţiunea $\log |u|$.

In fine, de multe ori pentruca studiul funcţiunei să fie uşurat, intervalul de existenţă poate fi micşorat folosind periodicitatea funcţiunilor ce o compun sau eventuala simetrie a curbei reprezentative faţă de axele de coordonate.

Oprindu-ne aci cu generalităţile vom considera mai jos patru exemple pe cari vom putea exemplifica cele spuse mai sus.

4. Să ne propunem studiul variației funcțiunei

$$(1) \qquad y = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}},$$

și construirea curbei reprezentative, radicalii fiind aritmetici.

Pentru găsirea intervalului de existență vom scrie că expresiile de sub radicali sunt pozitive, adică

$$x+1 \geqslant 0 \quad , \quad x-1 \geqslant 0;$$
$$x \geqslant -1 \quad , \quad x \geqslant 1,$$

și cum aceste două inegalități trebuesc să aibă loc simultan, va trebui să luăm: $x \geqslant 1$, adică intervalul de existență este $(1, +\infty)$.

Să găsim acum intervalul de existență pe altă cale. Făcând, în funcțiune, numitorul rațional avem

$$(2) \qquad y = x + \sqrt{x^2-1},$$

și pentru ca această funcțiune să existe este necesar și suficient ca

$$x^2 - 1 \geqslant 0,$$

adică x trebue să fie situat în afara rădăcinilor trinomului din prima parte; deci intervalul găsit pe această cale se desparte în două, și anume:

$$(-\infty, -1) \; ; \; (1, +\infty).$$

Este natural să ne întrebăm de unde provine dezacordul acestor două rezultate, mai ales că trebue să decidem care este bun! Pentru aceasta este destul a verifica dacă funcțiunea y dată are valori reale atunci când x este cuprins în intervalul $(-\infty, -1)$. Fie: $x = -1 - a$, presupunând $a > 0$. Notând cu i unitatea imaginară, avem succesiv [1]):

$$y = \frac{\sqrt{-a}+\sqrt{-a-2}}{\sqrt{-a}-\sqrt{-a-2}} = \frac{i\sqrt{a}+i\sqrt{a+2}}{i\sqrt{a}-i\sqrt{a+2}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+2}}{\sqrt{a}-\sqrt{a+2}},$$

---

1) In enunțul problemei se precizează că radicalii sunt aritmetici adică sunt luați cu semnul + în față. In cazul când radicalul are o valoare imaginară, vom lua prin convenție, drept generalizare a valoarei aritmetice, prima valoare pe care o întâlnim în cale când rotim axa Ox în sens pozitiv. Evident că dacă am lua cealaltă valoare, am obține o altă ramură pentru curbă.

valoare reală! Deci funcţiunea y, scrisă sub forma (1), este numai în aparenţă imaginară pentru valorile lui x situate în intervalul $(-\infty, -1)$.

Să mergem mai departe considerând funcţiunea scrisă sub forma (2) ca fiind mai comodă. Valorile funcţiunei la capetele intervalului de existenţă se găsesc cu uşurinţă şi sunt trecute in tabloul de variaţie. Pentru valoarea $x = -\infty$ se va scrie funcţiunea sub forma

$$y = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}.$$

Derivata este

$$y' = \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

şi nu se anulează pentru nici o valoare a lui x. In privinţa semnului este negativă în intervalul $(-\infty, -1)$ şi pozitivă în intervalul $(1, +\infty)$. Funcţiunea nu are puncte de discontinuitate. Tabloul de variaţie este

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
y'		$-$				$+$	
y	0	↘	-1		$+1$	↗	$+\infty$

In ceiace priveşte curba, ea se compune din două ramuri. Cea din stânga este asimptotă la axa Ox şi merge în jos până în punctul A unde are tangenta paralelă cu axa Oy. Apoi sare în punctul B şi merge către y-cii pozitivi când x creşte. Să-i găsim asimptota la această ramură. Fie

$$y = mx + n,$$

ecuaţia ei. Atunci

$$m = \lim_{x=+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x=+\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x} = 2,$$

$$n = \lim_{x=+\infty} (y - 2x) = \lim_{x=+\infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} - x\right) = \lim_{x=+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 0$$

Curba este deci asimptotă la dreapta: $y = 2x$.

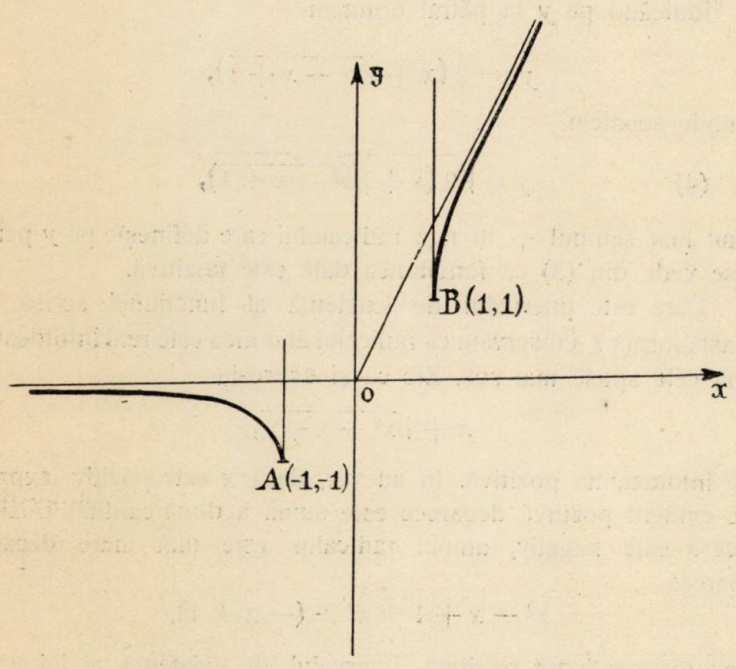
Observare. Curba este o parte dintr'o iperbolă, lucru ce se vede scriind pe (2) sub forma

$$(y - x)^2 = x^2 - 1.$$

5. Să dăm un nou exemplu când forma sub care este scris y iarăşi ne poate induce în eroare în ceeace priveşte găsirea intervalului de existenţă. Fie

(3) $$y = \sqrt{x + \sqrt{x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{x-1}},$$

radicalii având iarăşi sensul aritmetic.



Direct, pentru ca această funcţiune să existe, va trebui ca x să satisfacă simultan inegalităţilor

$$x - 1 \geqslant 0 \quad , \quad x + \sqrt{x-1} \geqslant 0 \quad , \quad x - \sqrt{x-1} \geqslant 0.$$

Prima spune că: $x \geqslant 1$. A doua este evident satisfăcută deoarece prima parte se compune din suma a două cantităţi x şi $\sqrt{x-1}$ ambele pozitive în prima ipoteză. A treia o scriem sub forma

$$x \geqslant \sqrt{x-1}.$$

Pentru a o rezolva ridicăm la pătrat ambele părţi, lucru posibil deoarece inegalitatea este între numere pozitive; găsim

$$x^2 - x + 1 \geqslant 0,$$

inegalitate adevărată pentru orice valoare reală a lui x, deoarece trinomul din prima parte are rădăcinile imaginare şi coeficientul lui x^2 pozitiv.

In rezumat funcţiunea (3) există atunci când x este cuprins în intervalul $(1, +\infty)$. Să arătăm că acest rezultat este greşit.

Ridicând pe y la pătrat obţinem

$$y^2 = 2\,(x + \sqrt{x^2 - x + 1}),$$

de unde scoatem

$$(4) \qquad y = \sqrt{2\,(x + \sqrt{x^2 - x + 1})},$$

şi am luat semnul $+$ în faţa radicalului care defineşte pe y pentru că se vede din (3) că funcţiunea dată este pozitivă.

Care este intervalul de existenţă al funcţiunei scrisă sub această formă? Observăm că radicalul al doilea este real întotdeauna, după cele spuse mai sus. Zic că şi expresia

$$x + \sqrt{x^2 - x + 1},$$

este întotdeauna pozitivă. In adevăr, dacă x este pozitiv, expresia este evident pozitivă deoarece este suma a două cantităţi pozitive. Dacă x este negativ, atunci radicalul este mai mare decât x, deoarece

$$x^2 - x + 1 = x^2 + (-x + 1),$$

şi expresia este tot pozitivă. Intervalul de existenţă al lui y este deci: $(-\infty, +\infty)$.

Care este cauza că prima cale ne-a micşorat intervalul? Cauza este că pentru $x < 1$, într'adevăr fiecare radical din (3) este imaginar, însă suma lor este reală, fiind imaginari conjugaţi!

In concluzie, înainte de a trece la studiul funcţiunei, este bine ca să i se dea o formă definitivă pe care s'au făcut toate calculele.

Să facem studiul complect al funcţiunei. Pentru $x = +\infty$, $y = +\infty$, uşor de constatat. Pentru $x = -\infty$, scriem pe y,

înmulțind și împărțind cu conjugata cantității de sub radical, sub forma

$$y = \sqrt{2}\sqrt{\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}-x}},$$

unde înlocuind pe x prin $-u$ și făcând pe $u = +\infty$, găsim $y = 1$. Derivata este

$$y' = \sqrt{2}\,\frac{2\sqrt{x^2-x+1}+(2x-1)}{2\sqrt{x^2-x+1}\sqrt{x+\sqrt{x^2-x+1}}},$$

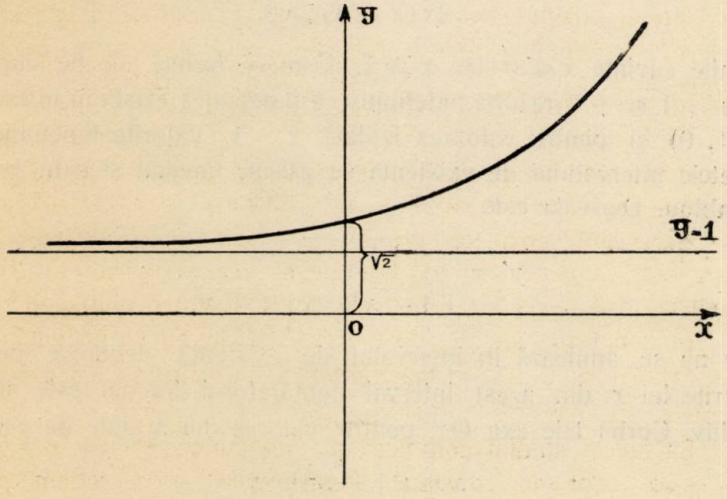
care nu se anulează pentru nici o valoare a lui x. Mai mult y' este pozitiv pentru orice x, deoarece radicalii dela numitori sunt luați cu semnul $+$, iar

$$2\sqrt{x^2-x+1}+(2x-1) = \sqrt{(2x-1)^2+3}+(2x-1) > 0.$$

Tabloul de variație este

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	$+$	$+$	
y	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

și curba are forma din figura alăturată. Spre dreapta curba nu are asimptotă: ramura este parabolică.



6. Să considerăm funcţiunea

$$y = \arcsin\left(x + \sqrt{1 - x^2}\right) \tag{5}$$

luând pentru partea dreaptă *determinarea principală*, cu alte cuvinte valoarea cuprinsă între $-\frac{1}{2}\pi$ şi $+\frac{1}{2}\pi$. Ne ocupăm mai întâiu de intervalul de existenţă.

Pentru ca funcţiunea să existe trebue ca

$$1 - x^2 \geqslant 0 \quad , \quad -1 \leqslant x + \sqrt{1 - x^2} \leqslant 1.$$

Prima ne spune că: $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Dubla inegalitate o desfacem în două inegalităţi:

$$-1 \leqslant x + \sqrt{1 - x^2} \quad , \quad x + \sqrt{1 - x^2} \leqslant 1.$$

Zic că prima este evidentă. In adevăr, scriind-o sub forma

$$-1 - x \leqslant \sqrt{1 - x^2},$$

se vede că prima parte este negativă, în ipoteza că x este cuprins în intervalul $(-1, +1)$, iar partea a doua pozitivă. A doua inegalitate o scriem sub forma

$$\sqrt{1 - x^2} \leqslant 1 - x;$$

având ambele părţi pozitive putem s'o ridicăm la pătrat. Făcând calculele găsim

$$2x(x - 1) \geqslant 0,$$

cu alte cuvinte $x \leqslant 0$ sau $x \geqslant 1$. Cum x trebue să fie cuprins între -1 şi $+1$, rezultă îndefinitiv că funcţiunea există în intervalul $(-1, 0)$ şi pentru valoarea izolată $x = 1$. Valorile funcţiunei la capetele intervalului de existenţă se găsesc imediat şi sunt trecute în tablou. Derivata este

$$y' = \frac{\sqrt{1 - x^2} - x}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{2x\sqrt{1 - x^2}}},$$

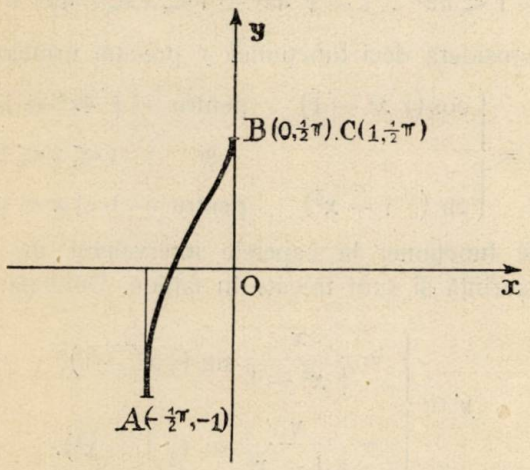
care nu se anulează în intervalul de existenţă, deoarece pentru valorile lui x din acest interval numărătorul fracţiei este mereu pozitiv. Curba taie axa Ox pentru valorile lui x date de ecuaţia

$$x + \sqrt{1 - x^2} = 0.$$

Izolând radicalul şi ridicând la pătrat se găseşte: $x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$, dintre cari numai valoarea cu — anulează funcţiunea dată. Tabloul de variaţie este

x	-1		$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$		0	$+1$
y'		$+$	$+$	$+$		
y	$-\frac{1}{2}\pi$	↗	0	↗	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$

Curba este compusă din ramura AB şi punctul C de coordonate $\left(+1, \frac{1}{2}\pi\right)$. In punctele A şi B curba are tangenta paralelă cu axa Oy, deoarece pentru $x = \pm 1$ derivata este infinită.



7. Ca un ultim exemplu, să studiem variaţia funcţiunei

(6) $$y = \cos\left(\sqrt{x^2 - 1}\right).$$

Am fi tentaţi să spunem că pentru aflarea intervalului de existenţă, trebue să scriem: $x^2 - 1 \geqslant 0$. Această condiţie nu este necesară! Intr'adevăr, să presupunem că: $x^2 - 1 < 0$; atunci în baza formulelor lui EULER,

$$y = \cos\left[\sqrt{-(1 - x^2)}\right] = \cos\left(i\sqrt{1 - x^2}\right) = \frac{e^{\sqrt{1-x^2}} + e^{-\sqrt{1-x^2}}}{2},$$

sau, cu ajutorul funcţiunilor iperbolice,

$$y = \operatorname{ch}(\sqrt{1 - x^2}).$$

Aşa dar, putem scrie

$$y = \begin{cases} \cos(\sqrt{x^2 - 1}) & \text{pentru } x \geqslant 1 \text{ sau } x \leqslant -1 \\ \operatorname{ch}(\sqrt{1 - x^2}) & \text{„ } -1 < x < 1. \end{cases}$$

Intervalul de existenţă este $(-\infty, +\infty)$. Ţinând seamă de periodicitatea funcţiunei cosinus, acest interval se mai poate micşora. Intr'adevăr, pentru prima valoare a lui y este destul a da valori lui x în aşa fel ca

$$0 \leqslant \sqrt{x^2 - 1} \leqslant 2\pi.$$

Prima inegalitate este evident satisfăcută, iar a doua ne dă

$$x^2 - 1 \leqslant 4\pi^2 \ , \quad -\sqrt{4\pi^2 + 1} \leqslant x \leqslant \sqrt{4\pi^2 + 1}.$$

Vom considera deci funcţiunea y precum urmează

$$(7) \quad y = \begin{cases} \cos(\sqrt{x^2 - 1}) & \text{pentru } -\sqrt{4\pi^2 + 1} \leqslant x \leqslant -1 \\ & \text{şi } \quad 1 \leqslant x \leqslant \sqrt{4\pi^2 + 1}; \\ \operatorname{ch}(\sqrt{1 - x^2}) & \text{pentru } -1 < x < 1. \end{cases}$$

Valorile funcţiunei la capetele intervalelor de existenţă se găsesc cu uşurinţă şi sunt trecute în tablou. Derivata este

$$y' = \begin{cases} -\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \sin(\sqrt{x^2 - 1}), \\ -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \operatorname{sh}(\sqrt{1 - x^2}). \end{cases}$$

Să vedem cari sunt valorile care anulează prima sau a doua valoare.

Pentru prima valoare. x nu se anulează în intervalul de existenţă, iar dintre valorile care anulează pe $\sin(\sqrt{x^2 - 1})$ nu sunt bune decât $\pm\sqrt{\pi^2 + 1}$, deoarece pentru $x = \pm 1$ avem:

$$\left[-x \frac{\sin(\sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 - 1}} \right]_{x = \pm 1} = \mp 1.$$

Semnele derivatei se găsesc uşor ţinând seamă că radicalii ce o compun au semnul + în faţă, şi se găsesc în tablou. Funcţiunea în intervalele $(-\sqrt{4\pi^2+1}, -1)$, $(1, \sqrt{4\pi^2+1})$ are două minime egale ambele cu -1.

Pentru a doua valoare observăm că ea nu se anulează pentru $x = 0$. In ceiace priveşte semnul ţinem seamă că

$$\text{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{1} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x},$$

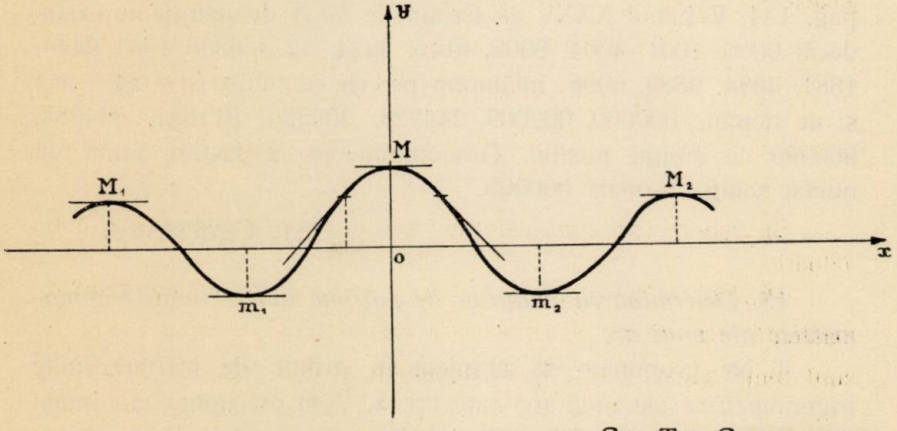
de unde se vede că sinusul iperbolic este pozitiv pentru orice valoare pozitivă atribuită argumentului. Este tocmai cazul nostru deoarece radicalul este luat cu semnul + în faţă. Aşa dar, derivata este pozitivă în intervalul $(-1, 0)$ şi negativă în intervalul $(0, 1)$. Funcţiunea prezintă deci un maximum în origină egal cu

$$\text{ch}\,1 = \frac{e^2+1}{2e}.$$

Tabloul de variaţie este

x	$-\sqrt{4\pi^2+1}$		$-\sqrt{\pi^2+1}$		-1		0		$+1$		$+\sqrt{\pi^2+1}$		$+\sqrt{4\pi^2+1}$
y'	0	—	0	+	1	+	0	—	−1	—	0	+	0
y	1	↘	−1	↗	1	↗	$\frac{e^2+1}{2e}$	↘	1	↘	−1	↗	1

iar curba reprezentativă



GH. TH. GHEORGHIU.

NOTE MATEMATICE

13. *O particularitate a numărului 3.* Numărul 3 satisface următoarea egalitate pentru $n = 1$ şi 2:

$$2 \cdot 3^{\nu n} = 3^{(\nu-1)n} + 3^{(\nu-1)n} + [4 \cdot 3^{\nu-1}]^n .$$

Exemple: pentru $\nu = 1$ avem succesiv

$$2 \cdot 3 = 1 + 1 + 4 = 1^2 + 1^2 + 2^2$$

$$2 \cdot 3^2 = 1^2 + 1^2 + 4^2 = 1^4 + 1^4 + 2^4 .$$

Pentru $\nu = 3$ avem:

$$2 \cdot 3^3 = 3^2 + 3^2 + 6^2$$

$$2 \cdot 3^6 = 3^4 + 3^4 + 6^4 .$$

Avem de asemeni

$$3^2 + 3^2 + 6^2 = 3 \times 3 \times 6.$$

A. MOESSNER.

14. *Asupra problemei 4951.* Acestei probleme i se poate da o soluţie mai simplă, decât cea publicată la pag. 665, Anul XLIII. Se cerea patratul de şase cifre *abbaab* şi s-a stabilit că $(a + b) = \mathcal{M}3$. Dar după nota D-lui T. N. PANAITE din *Gazeta Matematică* pag. 134, Volumul XXXV ca terminaţie *baab* de patrate nu există decât 0000, 1001, 4004, 9009, 6116, 4224, 5225, 6336, 1441, 9449, 1881, 4884, 9889, 6996. Inlăturăm pe cele ce nu dau $(a + b) = \mathcal{M}3$ şi ne rămân: 000000, 009009, 244224, 366336, 811881, 844884, 966996 ca soluţii posibil. Descompunerea în factori primi dă numai soluţia formală 000000.

ST. CETĂŢEANU.

15. *Determinarea relaţiilor de mărime dintre liniile trigonometrice ale unui arc.*

1. Ne propunem să aranjem în ordine de mărime liniile trigonometrice ale unui arc oarecare α. Vom presupune mai întâiu pe α în primul cadran. Pentru rezolvirea chestiunii ce ne preocupă, vom folosi observaţii geometrice şi trigonometrice foarte simple.

Fie un cerc trigonometric O şi pe acesta trasate

$\text{arc}AM = \alpha$, $\sin\alpha = MP$, $\cos\alpha = OP$, $\operatorname{tg}\alpha = AT$, $\operatorname{ctg}\alpha = BQ$,

$$\sec\alpha = OT \ , \ \operatorname{cosec}\alpha = OQ.$$

a) Dacă $0 < \alpha < 45^0$ avem evident:

1) $\sin\alpha$ este cea mai mică linie trigonometrică.

2) $\cos\alpha < \operatorname{ctg}\alpha, \sec\alpha, \operatorname{cosec}\alpha$. Putem avea însă

$$\cos\alpha \lessgtr \operatorname{tg}\alpha$$

şi aceasta după cum avem respectiv:

$$\alpha \lessgtr 38^0 10' 15''.$$

3) $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{ctg}\alpha, \sec\alpha, \operatorname{cosec}\alpha$.

4) $\operatorname{ctg}\alpha < \operatorname{cosec}\alpha$.

Putem avea însă

$$\sec\alpha \lessgtr \operatorname{ctg}\alpha$$

şi aceasta după cum:

$$\alpha \lessgtr 38^0 10' 15''.$$

5) $\sec\alpha < \operatorname{cosec}\alpha$.

Precedentele rezultate le sintetizăm în următoarele două şiruri de relaţii:

Pentru $0 < \alpha \leqslant 38^0 10' 15''$ avem:

(1) $\quad \sin\alpha < \operatorname{tg}\alpha \leqslant \cos\alpha < \sec\alpha \leqslant \operatorname{ctg}\alpha < \operatorname{cosec}\alpha.$

Pentru $38^0 10' 15'' \leqslant \alpha < 45^0$ avem

(2) $\quad \sin\alpha < \cos\alpha \leqslant \operatorname{tg}\alpha < \operatorname{ctg}\alpha \leqslant \sec\alpha < \operatorname{cosec}\alpha.$

b) Dacă $45^0 < \alpha < 90^0$ în baza aceloraşi simple observaţii geometrice şi trigonometrice, vom deduce:

1) $\cos\alpha$ este cel mai scurt segment.

2) $\sin\alpha < \operatorname{tg}\alpha, \sec\alpha, \operatorname{cosec}\alpha$.

Avem însă

$$\sin\alpha \lessgtr \operatorname{ctg}\alpha$$

după cum respectiv:

$$\alpha \lessgtr 51^0 49' 45''.$$

3) $\operatorname{tg}\alpha < \sec\alpha$

$\operatorname{tg}\alpha \lessgtr \operatorname{cosec}\alpha$ după cum $\alpha \lessgtr 51^0 19'45''$.

4) $\sec\alpha$ este cea mai lungă linie trigonometrică.

5) $\operatorname{cosec}\alpha < \sec\alpha$.

Rezultatele dela punctul *b)* sunt cuprinse în următoarele două şiruri de relaţii:

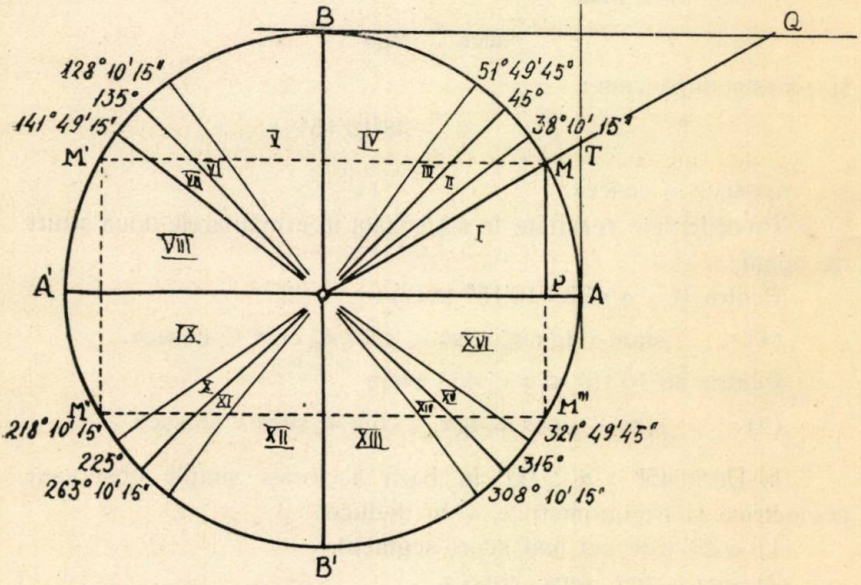
Pentru $45^0 < \alpha \leqslant 51^0 49'45''$ avem:

(3) $\cos\alpha < \sin\alpha \leqslant \operatorname{ctg}\alpha < \operatorname{tg}\alpha \leqslant \operatorname{cosec}\alpha < \sec\alpha$.

Pentru $51^0 49'45'' \leqslant \alpha < 90^0$.

(4) $\cos\alpha < \operatorname{ctg}\alpha \leqslant \sin\alpha < \operatorname{cosec}\alpha \leqslant \operatorname{tg}\alpha < \sec\alpha$.

2. Luând numai valorile absolute ale liniilor trigonometrice ale unui arc oarecare, cele patru şiruri de relaţii stabilite se pot aplica pe tot cercul trigonometric împărţit în 16 regiuni, precum se vede în figura alăturată.



Relaţia (1) este aplicabilă pentru arce α ale căror extremităţi cad în regiunile (I), (VIII), (IX), (XVI).

Relaţia (2), în regiunile (II), (VII), (X), (XV).

Relaţia (3), în regiunile (III), (VI), (XI), (XIV).

Relaţia (4), în regiunile (IV), (V), (XII), (XIII).

In toate cele patru relaţiuni găsite nu sunt cuprinse arcele $\alpha = k \times 180^0 \pm 45^0$ ale căror linii trigonometrice le putem avea imediat; sunt deasemenea excluse în (1), (2), (3), (4) arcele $\alpha = k \times 90^0$ care au unele linii trigonometrice infinite.

3. Am fost conduşi la stabilirea relaţiunilor (1), (2), (3), (4) de unele aplicaţiuni care ne cereau să cunoaştem în prealabil ordinea în care se succedau valorile liniilor trigonometrice ale unui arc. De asemenea o tablă de valori naturale ale liniilor trigonometrice ale arcelor trebueşte să satisfacă cele patru relaţii obţinute. La fel o tablă de logaritmi ai liniilor trigonometrice.

VIRGIL GHIŢESCU.

BIBLIOGRAFIE

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tom. CXXVIII. Fascicola 1. Iulie 1939. Buenos-Aires. Funcţiuni de una sau mai multe variabile complexe de J. C. VIGNAUX. Asupra seriei POISSON-CHARLIER, de C. DIEULEFAIT.

Idem. Tom. CXXVIII. Fascicola II. August 1939. Argentina. Asupra absciselor de convergenţă ale integralelor lui LAPLACE şi seriilor lui DIRICHLET de C. BIGGERI. Contribuţii la studiul câtorva curbe particulare de J. SANGUINETI.

Boletin Matematico, publicat de B. I. BAIDAFF. Anul XII. Nr. 13. Septemvrie 1939. Buenos-Aires. Derivatele funcţiunilor de u/v, de B. I. BAIDAFF. Profesorul doctor PAUL MONTEL $_*{}^*{}_*$, O aplicaţie a unei teoreme a D-lui M. PETROVICH, de M. ST. BOTEZ.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 45. Nr. 10. Octomvrie 1939. Menasha, Wis, & New-York. Generalizare a definiţiunilor de limită de R. P. AGNEW. Asupra formulei de însumare EULER-MACLAURIN, de TOMLINSON FORT.

Journal de Mathématiques élémentaires, publicat de H. VUIBERT. Anul 64. Nr. 2. 15 Octomvrie 1939. Paris.

Idem. Anul 64. Nr. 3. 1 Noemvrie 1939. Paris.

România Aeriană. Anul XIII. Nr. 7—8. Iulie-August 1939. Bucureşti.

Idem. Anul XIII. Nr. 9—10. Septemvrie-Octomvrie 1939. Bucureşti.

Sphinx. Revue mensuelle des questions récréatives. An. IX. Nr. 10-11-12. Octomvrie-Noemvrie-Decemvrie 1939. Bruxelles.

Suplimentul Gazetei Matematice. Anul VI. Nr. 2. 1 Noemvrie 1939 Bucureşti.

ING. ALEX. I. STOENESCU. Probleme de oscilaţii. Enunţuri şi soluţiuni. Bucureşti 1939.

CERERI

288. Având nevoe de revista „*Mathesis*“ dinainte de războiul mondial, precum şi de orice reviste şi uvrage în general, conţinând chestiuni de geometrie, rugăm pe Domnii care au bunăvoinţa să ni le împrumute, sub garanţie materială, a ne comunica aceasta, fie direct, fie prin Gazetă.

TH. GH. COCEA
Str. Aureliu Nr. 35
Loco

Locot. I. GH. ZAMFIRESCU.
Bul. Al. I. Cuza Nr. 32
Apartament 4
Loco.

Asupra Cererii 287. Pe la finele lunii August trecut am primit două Cereri semnate „I. C. POPESCU (Licenţiat în Filosofie al Facultăţii de litere din Cluj)“. Una din acele cereri s'a publicat la pag. 82 sub Nr. 287, la care a dat un răspuns D-l P. SERGESCU, profesor la Facultatea de Ştiinţe din Cluj, răspuns publicat în Nr. trecut al *Gazetei Matematice.*

Ni s'a părut însă curios faptul ca un licenţiat în Filosofie să se ocupe de istoricul Facultăţii de ştiinţe dela aceeaşi Universitate, şi am căutat să ne informăm care este ocupaţiunea actuală a autorului Cererii 287. Profesorii dela Secţiunea Matematică a Facultăţii de Ştiinţe din Cluj nu-l cunosc; lor nu li s'a cerut nici o dată privitoare la istoricul Secţiunii matematice. Am cerut atunci ca „*Societatea Gazeta Matematică*“ să roage Decanatul Facultăţii de Filosofie şi Litere din Cluj ca să ne comunice dacă acea Facultate a avut vreun Licenţiat în Filosofie cu numele I. C. POPESCU. Cu Nr. 705 din anul acesta, Decanatul a binevoit a ne da următorul răspuns:

Onor. Societatea «Gazeta Matematică»,

Bucureşti.

„*Ca răspuns la adresa D-voastră Nr. 112 din 29 Octomvrie 1939, avem onoare a vă aduce la cunoştinţă că Facultatea noastră n'a eliberat nici o diplomă de Licenţă pe numele* I. C. POPESCU“.

D-l Secretar al Facultăţii ne-a mai făcut cunoscut că acea Facultate nu are decât un singur POPESCU ca absolvent şi anume pe D-l ILIE V. POPESCU, actualul asistent la Museul Limbii române.

Este dar demonstrat în mod oficial că semnatarul Cererii 287 este pseudonimul *alt cuiva,* care probabil că urmăreşte *altceva* decât istoricul matematicilor în România! De aceea nu o vom mai publica a doua Cerere. Cum în tradiţia *Gazetei Matematice* este de a nu publica articole semnate cu pseudonime, iniţiale, semne, etc. decât dacă redacţia cunoaşte numele exact al autorului, punem în locul Cererii respinse următoarea:

... Cine este I. C. POPESCU, semnatarul Cererii 287?
Ce a urmărit el prin acea *Cerere?*

I. IONESCU.

DIVERSE

a) Şedinţele Societăţii „Gazeta Matematică".

Comisiunea întrunită Miercuri 22 Noemvrie a. c. pentru acordarea bursei „PROFESOR ION IONESCU" a acordat cu începere dela 15 Octomvrie 1939 două burse din fondul „PROFESOR ION IONESCU": o bursă D-lui LOCOT. C. N. AVRAM şi o bursă D-lui RADU MARTAC, ambii studenţi la Şcoala Politehnică „Regele Carol II", Secţia Construcţii.

b) Sporirea Bibliotecii.

BRIOT & BOUQUET. Leçons de trigonométrie, Ed. IV revăzută şi mărită. Paris, 1862.

A. MANNHEIM. Cours de géométrie descriptive de l'école polytechnique, comprenant les éléments de la géométrie cinématique. Paris, 1880.

A. AMIOT. Éléments de géométrie. Paris, 1881.

E. ROUCHÉ & CH. DE COMBEROUSSE. Traité de géométrie. Géométrie plane. Paris, 1891.

E. ROUCHÉ & CH. DE COMBEROUSSE. Traité de géométrie. Géométrie dans l'expace. Paris, 1883.

S. IORCEANU. Manualul construcţiunei şi întreţinerei drumurilor. Bucureşti, 1869.

J. BERTRAND & H. GARCET. Traité de l'Algèbre. Vol. I. Paris, 1889.

CH. BRIOT & E. LACOUR. Leçons d'Algèbre. Partea II. Ed. VI. Paris, 1893. Donate de D-l N. GHERASI.

A. DE SAINT-GERMAIN. Recueil d'exercices sur la mécanique rationnelle. Ed. II. Paris, 1889.

OSSIAN-BONNET. Astronomie Sphérique. Paris, 1889.

A. FLAMANT. Mécanique générale. Paris, 1888.

M. DUHAMEL. Cours de Mécanique. Partea I. Ed. II. Paris, 1853.

M. DUHAMEL. Cours de Mécanique. Partea II. Ed. II. Paris, 1854.

BRIOT & BOUQUET. Leçons de géométrie analytique. Ed. 8-a. Paris, 1875.

M. C. DUHAMEL. Des méthodes dans les sciences de raisonnement. Tom. 1, 2, 3. Paris, 1865, 1868.

HERMAN HANKEL. Die elemente de Projectivischen Geométrie. Leipzig, 1875.

LT-COLONEL HENNEBERT. L'art militaire et la science. Le matériel de guerre moderne. Paris, 1884.

OTTO HESSE. Vorlesungen aus der analytische Geometrie. Ed. II. Leipzig, 1873; Ed. III. Leipzig, 1876.

THEODOR REYE. Die Geometrie der Lage. Ed. II. Leipzig, 1882.

H. KLEIN. Die Principen der Mechanik. Leipzig, 1872.

G. HELM. De Elemente der Méchanik und mathematischen Physik. Leipzig, 1884.

Donate de D-l GENERAL CORNELIU FELIX.

H. MAYER. Die lichtelektrischen Eigenschaften von Kaliumschichten atomarer Dicke auf Platin. Leipzig, 1937. Extras.

NEYMAN, FINETTI, GLIVENKO. Théorie des probabilités, Conceptions diverses. Paris, 1938.

P. NICOLAU. Contribuţiuni la studiul şi construcţia maşinilor hidraulice în România. Timişoara, 1937.

C. A. PARTENI. Contribution à l'étude expérimentale et théorique de la commutation dans les machines à courant continu. Teză. Paris, 1925.

O. PROTESCU. Zăcămintele de cărbuni plioceni din regiunea de curbură a subcarpaţilor răsăriteni. Bucureşti, 1929.

J. A. SCHOUTEN. Der Ricci-Kalkül (Grundlehren d. Math. Wiss. Bd. X), Berlin, 1924.

VL. ŞCIUREVICI. Legea didactică fundamentală. Iaşi, 1937.

SMIGELSCHI-NICOLAU. Determinarea pierderilor de sarcină într'o vană plană circulară cu patine. Timişoara, 1935. Extras.

K. SZÉLL. Über die Statistik der mehratomigen Gase. Berlin, 1933. Extras.

L. TESAR. Die Mechanik. Leipzig, 1909.

T. VESCAN. Contribuţiuni la teoria cinetică şi relativistă a fluidelor reale. Teză. Cluj, 1939.
Donate de D-l TH. VESCAN, (Cluj).

LUIGI PEROZZO. Ricerche demografiche fondate sul calcolo delle variazioni. Torino, 1908.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

C. ALASIA. Su di alcune notevoli proprietà dei gruppi lineari ed omogeni. Pavia, 1907.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

. . . . . Moş Pătru sau învăţătorul de sat. Convorbiri asupra Mecanici (în biblioteca pentru tinerimea română). Bucureşti 1842.

. . . . . Table de Aritmetică spre întrebuinţarea şcoalelor primare. Ediţiile din 1843 şi 1851. Bucureşti.

SLUGERUL G. POP. Elemente de Aritmetică raţionată, tradusă din franţozeşte. Bucureşti 1850.

D. P. Elemente de trigonometrie drept-liniată şi sferică. Bucureşti 1850 (două exemplare complecte şi unu începând dela pag. III).

ARHITECTUL ALEXANDRU ORESCO. Tratatie asupra Geometriei descriptive. Precedată de o introducţie ce cuprinde teoria Planuluĭ şi a linii drepte privite în spaţiŭ. Traducţie din franţozeşte după LEFEBURE DE FOURCY. Tomul întâiŭ. Bucureşti 1851 (două exemplare).

D. P. Intiile elemente de Algebra a lui SONNET. Traduse din Franţozeşte. Cu un adaos din a le sale lucrări Bucureşti 1852. (două exemplare).

D. P. Aritmeticâ elementarâ lucratâ a doâ oarâ. Bucureşti 1858.

A. TREB. LAURIANU. Elemente de Cosmografiă pentru Clasile primarie. Bucurescĭ, 1860.

. . . . . Elemente de Geometrie după LEGENDRE. Tipârită cu cheltuială din casa Schoalelor nationale pentru scholarii ce urmează acest curs în Colegiul din Sf. Sawa. Bucuresti 1837 (2 exemplare).

Aceste volume au fost donate de D-l S. MARCOVICI, Bucureşti.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2017. *Să se arate că oscilaţia maximă a forţei vii a unei planete, în mişcarea ei de revoluţie împrejurul soarelui, este proporţională cu expresiunea*

$$\frac{pe}{1+e}$$

unde 2p *este parametrul şi* e *excentricitatea orbitei.*

ST. N. MIREA.

Problema aceasta se găseşte propusă şi rezolvată, chiar de propunător, în *Culegere de probleme de Geometrie descriptivă şi Cosmografie* de TR. LALESCU şi ST. N. MIREA, la pag. 63, Nr. 5.

Cap. XII, *Atracţia universală.* Urmărind soluţia dată în culegere se vede că oscilaţia maximă nu este proporţională cu raportul din enunţ ci cu raportul $\boxed{\frac{e}{p}}$.

Iată o soluţie, care dovedeşte aceasta.

Energia cinetică (forţa vie) maximă în mişcarea de revoluţie a unei planete are loc în momentul când planeta se află la *periheliu.* Fie:

$$E_{max} = \frac{1}{2} m v_1^2 .$$

Energia cinetită minimă are loc în momentul când planeta se află la *apheliu.* Fie

$$E_{min} = \frac{1}{2} m v_2^2$$

m fiind masa planetei, iar v_1, v_2 vitezele ei în cele două momente considerate.

Oscilaţia maximă căutată va fi deci

$$\Delta = E_{max} - E_{min} = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_2^2 .$$

Conform principiului energiei cinetice

$$\Delta = \mathcal{T}_{1-2} = \int_{r_2}^{r_1} - F dr = \int_{r_2}^{r_1} - \frac{km}{r^2} dr$$

$$\therefore \qquad \Delta = km \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Dar

$$r = \frac{p}{1 + e \cos\theta} \quad , \quad r_1 = \frac{p}{1+e} \quad , \quad r_2 = \frac{p}{1-e} .$$

Deci

$$\Delta = 2km \frac{e}{p}$$

rezultat analog cu acela care rezultă din indicaţiunile date la locul citat în *Culegere de probleme de Geometrie descriptivă şi Cosmografie,* dar diferit de enunţul problemei.

AL. STOENESCU.

Notă. 1°. După a treia lege a lui KEPLER, factorul k se poate exprima prin formula

$$k = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$$

în funcţie de perioada de revoluţie T şi de semiaxa mare a. Dar

$$a = \frac{p}{1 - e^2}.$$

Rezultă că

$$\Delta = \frac{8\pi^2 mep^2}{T^2 (1 - e^2)^3}$$

formule în care apare factorul $\frac{pe}{1+e}$, dar în care ceilalţi factori de proporţionalitate nu sunt independenţi de e şi p.

2°. Se pot obţine şi alte relaţii interesante. De exemplu

$$\frac{E_{max}}{E_{min}} = \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2$$

$$E_{max} + E_{min} = \frac{km(1+e^2)}{p}$$

$$v_1 = \frac{km(1+e)^2}{2p} \quad ; \quad v_2 = \frac{km(1-e)^2}{2p}.$$

AL. ST.

3°. De notat şi relaţiunea

$$E_{max} \times E_{min} = \frac{k^2 m^4}{16} \cdot \left(\frac{1-e^2}{p^2}\right)^2.$$

G-L GH. B.

PROBLEMA 2694. *Să se calculeze maximul expresiunei*

$$E = \frac{\sqrt{\cos 2x \cos 2y \cos 2z}}{\sin x \sin y \sin z},$$

fiind dată relaţia

$$a \operatorname{cotg} x + b \operatorname{cotg} y + c \operatorname{cotg} z = k,$$

a, b, c, k *fiind constante date.*

M. GHERMĂNESCU.

Expresiunea dată fiind reală, rezultă că pătratul ei este pozitiv, adică

$$E^2 = \frac{\cos 2x \cos 2y \cos 2z}{\sin^2 x \sin^2 y \sin^2 z} > 0$$

sau

$$E^2 = (\cot^2 x - 1)(\operatorname{cotg}^2 y - 1)(\operatorname{cotg}^2 z - 1) > 0,$$

ceea ce arată că una sau toate parantezele trebue să fie pozitive, deci unul sau toate arcele x, y, z au extremităţile în prima jumătate a cadranelor I şi III sau în a doua jumătate a cadranelor II şi IV, iar celelalte în jumătăţile rămase.

Se mai vede că, deoarece $E > 0$, minimul lui E are loc când una din cotangente este egală cu ± 1, deci

$$\text{minim } E = 0,$$

aşa că pentru $E > 0$ problema maximului este aceea care interesează.

Cazul $E < 0$ îl lăsăm la o parte căci atunci maximul este evident egal cu zero.

In aceste condiţiuni, maximul lui E are loc odată cu al pătratului său sau încă, cu al expresiunei

$$F = a^2 b^2 c^2 E^2 = (a^2 \operatorname{cotg}^2 x - a^2)(b^2 \operatorname{cotg}^2 y - b^2)(c^2 \operatorname{cotg}^2 z - c^2).$$

Să punem pentru prescurtare

$$u = a \cot x \ , \ v = b \operatorname{cotg} y \ , \ w = c \operatorname{cotg} z;$$

F devine

$$F = (u^2 - a^2)(v^2 - b^2)(w^2 - c^2),$$

cu

$$u + v + w = k,$$

deci

$$F = (u^2 - a^2)(v^2 - b^2)[(k - u - v)^2 - c^2].$$

Avem deci de studiat maximul unei funcţiuni de două variabile independente u şi v. Anulând derivatele parţiale

$$F'_u = 2u(v^2 - b^2)(w^2 - c^2) - 2w(u^2 - a^2)(v^2 - b^2) = 0,$$

$$F'_v = 2v(u^2 - a^2)(w^2 - c^2) - 2w(u^2 - a^2)(v^2 - b^2) = 0$$

şi lăsând la o parte soluţiile $u = \pm a$, $v = \pm b$, $w = \pm c$ cari dau un minim, deducem pentru valorile cari dau un maxim

$$\frac{u^2 - a^2}{u} = \frac{v^2 - b^2}{v} = \frac{w^2 - c^2}{w} = \lambda$$

sau, revenind la vechile variabile,

$$\frac{a(\cot^2 x - 1)}{\cot x} = \frac{b(\cot^2 y - 1)}{\cot y} = \frac{c(\cot^2 z - 1)}{\cot z} = \lambda,$$

din care deducem

$$\cot x = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 4a^2}}{2a},$$

$$\cot y = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 4b^2}}{2b},$$

$$\cot z = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 4c^2}}{2c}.$$

cât priveşte valoarea lui λ, ea este o rădăcină a ecuaţiei

$$\pm\sqrt{\lambda^2 + 4a^2} \pm \sqrt{\lambda^2 + 4b^2} \pm \sqrt{\lambda^2 + 4c^2} = 2k - 3\lambda,$$

ce rezultă din relaţia de condiţie.

In ceea ce priveşte semnele dinaintea radicalului, ele vor fi astfel alese încât E^2 să fie pozitivă. Ori, se găseşte că

$$8F^2 = \lambda^3 (\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 4a^2})(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 4b^2})(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 4c^2})$$

deci, dacă $\lambda > 0$, luăm unul sau trei semne $+$; dacă $\lambda < 0$, luăm unul sau trei semne $-$. De fapt, oricum am lua semnele, ecuaţia în λ la care ajungem scăpând de radicali este aceeaşi.

Notă. La această problemă s'a primit, pe vremea când a fost propusă, o încercare de soluţie a D-lui I. DRAGOMIR. D-sa a încercat să o rezolve cu ajutorul teoremei maximului unui produs când suma factorilor este constantă.

Aşteptăm o discuţie a ecuaţiei în λ, precum şi a posibilităţii maximului.

M. G.

PROBLEMA 2727. *Se cere locul dreptelor pe care două sfere concentrice determină segmente, văzute din centrul comun al sferelor sub un unghiu constant.*

M. GHERMĂNESCU.

Fie φ unghiul constant, iar M_1, M_2 extremităţile unui astfel de segment, situate respectiv pe sferele de raze R şi r. Din triunghiul OM_1M_2 deducem

$$\overline{M_1M_2}^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi = k^2 .$$

Pe de altă parte, aria triunghiului OM_1M_2 este

$$\tfrac{1}{2} Rr\sin\varphi = \text{const};$$

rezultă că înălţimea triunghiului OM_1M_2, adică distanţa dela centrul O la dreapta M_1M_2 este constantă, adică dreapta M_1M_2 rămâne tangentă unei sfere cu centrul în O şi cu raza

$$d = \frac{Rr\sin\varphi}{k} = \frac{Rr\sin\varphi}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi}} .$$

Locul dreptelor cerute este deci *complexul tangentelor* la sfera d. Pentru ca dreptele complexului să fie reale, adică să întâlnească cele două sfere date, trebue ca raza d să fie mai mică decât cea mai mică rază R şi r, adică

$$R^2r^2\sin^2\varphi \leqslant r^2(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi),$$

care se reduce uşor la

$$r \leqslant R\cos\varphi.$$

M. G.

PROBLEMA 3588. *Ştiind că* n *este un număr întreg pozitiv, să se calculeze suma :*

$$S = 1^4 + \sum_{n=2}^{n} (n + 2^{n-2})^4.$$

Să se generalizeze.

O. N. ŢINO.

Avem în primul rând :

$$(n+2^{n-2})^4 = n^4 + C_4^1 n^3 2^{n-2} + C_4^2 n^2 2^{2(n-2)} + C_4^3 n 2^{3(n-2)} + C_4^4 2^{4(n-2)},$$

deci suma S de calculat devine:

$$S = 1^4 + \sum_{n=2}^{n} n^4 + C_4^1 \sum_{n=2}^{n} n^3 2^{n-2} + C_4^2 \sum_{n=2}^{n} n^2 2^{2(n-2)} + C_4^3 \cdot$$

$$\sum_{n=2}^{n} n \cdot 2^{3(n-2)} + C_4^4 \sum_{n=2}^{n} 2^{4(n-2)};$$

dar:

$$S_4 = \sum_{n=1}^{n} n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n+1)}{30}.$$

Apoi putem scrie succesiv:

$$\sum_{n=2}^{n} n \cdot 2^{3(n-2)} = \sum_{n=2}^{n} n \cdot 8^{n-2} = \frac{1}{8} \sum_{n=2}^{n} n 8^{n-1} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

$$\sum_{n=2}^{n} n 8^{n-1} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \frac{n 8^{n+1} - (n+1)\, 8^n + 1}{49};$$

căci având

$$\sum_{n=1}^{n} x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1},$$

deducem imediat că:

$$\sum_{n=1}^{n} n x^{n-1} = \frac{n x^{n+1} - (n+1)\, x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

Tot astfel, avem:

$$\sum_{n=2}^{n} n^2 2^{2(n-2)} = \sum_{n=2}^{n} n^2 4^{n-2} = \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{n} n^2 4^{n-1} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{n} n^2 \cdot 4^{n-1} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{n^2 4^{n+2} - (2n^2+2n-1)\, 4^{n+1} + (n+1)^2 4^n - 5}{27},$$

căci avem în general:

$$\sum_{n=1}^{n} n^2 x^{n-1} = \frac{n^2 x^{n+2} - (2n^2+2n-1)\, x^{n+1} + (n+1)^2 x^n - x - 1}{(x-1)^3};$$

iar:

$$\sum_{n=2}^{n} n^3 2^{n-2} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{n} n^3 2^{n-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n} n^3 2^{n-1} = -\frac{1}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{n^3 2^{n+3} - (3n^3+3n^2-3n+1)\, 2^{n+2} + (3n^3+6n^2-4)\, 2^{n+1} - (n+1)^3 2^n + 13}{1},$$

căci avem în general:

$$\sum_{n=1}^{n} n^3 x^{n-1} =$$

$$= \frac{n^3x^{n+3} - (3n^3+3n^2-3n+1)\,x^{n+2} + (3n^3+6n^2-4)\,x^{n+1} - (n+1)^3 x^n + x^2 + 4x + 1}{(x-1)^4}.$$

In fine, avem:

$$\sum_{n=2}^{n} 2^{4(n-2)} = \sum_{n=2}^{n} 16^{n-2} = \frac{16^{n-1}-1}{16-1} = \frac{16^{n-1}-1}{15}.$$

Introducând aceste valori ale sumelor calculate în expresiunea sumei S, obţinem valoarea sumei calculate cerută prin enunţ.

O primă generalizare se obţine introducând în suma S propusă pentru a fi calculată, în locul numărului 2 un număr întreg pozitiv a, adică propunându-ne să calculăm suma:

$$S = 1 + \sum_{n=2}^{n} (n + a^{n-2})^4.$$

Calculul ei este identic cu al sumei calculate mai sus cu singura deosebire că în loc de a înlocui pe x prin 2, îl vom înlocui prin a.

Pentru o a doua generalizare ne putem propune să calculăm suma următoare:

$$S_{r,4} = 1^4 + 2^4 + \ldots + (r-1)^4 + \sum_{n=r}^{n} [n + a^{n-r}]^4,$$

pentru care, calculul din cazul propus puţin modificat, conduce la valoarea ei.

Evident o generalizare mai largă a sumei propuse se obţine înlocuind în generalizările precedente exponentul 4 al puterilor asemenea printr'un număr întreg pozitiv p.

In acest ultim caz să punem:

$$S_{r,p} = 1^p + 2^p + \ldots + (r-1)^p + \sum_{n=r}^{n} [n + a^{n-r}]^p.$$

Desvoltând $[n + a^{n-r}]^p$ după formula binomului lui NEWTON şi însumând, calculul lui $S_{r,p}$ revine la calculul sumelor

$$\sum_{1}^{n} n^p;\ \sum_{n=r}^{n} n^{p-1} a^{n-r};\ \sum_{n=r}^{n} n^{p-2} a^{2(n-r)};\ldots;\ \sum_{n=r}^{n} n a^{(p-1)(n-r)};\ \sum_{n=r}^{n} a^{p(n-r)}.$$

Considerând una generală din aceste sume $\sum_{n=r}^{n} n^{p-k} a^{k(n-r)}$ şi punând $a^k = b$, avem de calculat sumele de forma:

$$\frac{1}{b^{r-1}} \sum_{n=r}^{n} n^{p-k} b^{n-1},$$

care pot fi calculate plecând dela calculul progresiei geometrice $\sum_{n=r}^{n} b^n$.

Derivând apoi egalitatea obţinută în raport cu b, obţinem valoarea sumei $\sum_{n=r}^{n} n b^{n-1}$. Inmulţind această nouă egalitate în ambii membri cu b şi derivând din nou în raport cu b obţinem valoarea sumei $\sum_{n=r}^{n} n^2 b^{n-1}$ şi aşa mai departe până la $\sum_{n=r}^{n} n^{p-1} b^{n-1}$.

Inlocuind sumele astfel calculate în desvoltarea lui $S_{r,p}$, obţinem valoarea acestei sume.

Observare. Am restrâns desvoltarea soluţiunii de faţă, deoarece elementele ei esenţiale au fost utilizate într'o problemă propusă mai târziu *No. 3753* de † Tr. Dordea şi reluate după publicarea soluţiei într'o *Notă* de D-l Col. Gh. Buicliu în acelaşi volum (G. M. XXXVI Nota 38).

Au rezolvat problema Domnii: N. N. Aldea şi G. G. Constantinescu (Studenţi Bucureşti).

O. N. Ţ.

PROBLEMA 4135. *Fie* A, B *două puncte ce determină o dreaptă. Considerăm un punct* M *pe dreaptă şi* M' *armonicul său faţă de punctele* A *şi* B. *Se duce cercul de diametru* MM', *iar prin centrul acestui cerc, o dreaptă care taie cercul în* N *şi* N'.

Se cere locul geometric al punctelor N *şi* N' *când* M *se deplasează pe dreapta* AB. *Unghiul dreptei* NN' *cu dreapta* AB *rămâne constant.*

D. Arg. Dumitrescu.

Fie O mijlocul lui AB, C mijlocul lui MM', iar $\widehat{NCM'} = \alpha = ct.$ Cum N (ABMM') = —1, iar MN perpendicular pe NM', razele MN, NM' sunt bisectoarele unghiului $\widehat{ANB}$. Deoarece bisectoarea MN, a unghiului $\widehat{ANB}$, face unghiul $\frac{\alpha}{2} = ct$ cu dreapta AB, rezultă că locul punctului N este o hiperbolă echilateră, de centru O, la care A şi B, sunt extremităţile unui diametru, şi a cărei asimptote sunt paralele cu bisectoarele unghiului $\widehat{ANB}$ [1]).

Soluţia Domnului N. MIHĂILEANU. Prin O se duc paralelele OY, OX dreptelor MN şi M'N; fie Q, P, N_1, proiecţiile ortogonale ale punctului N pe dreapta OY, OX şi AB. Din asemănarea triunghiurilor OPM şi MNM'; OQM' şi NMM', obţinem:

$$OP = OM \cdot \frac{NM'}{MM'} \qquad OQ = OM' \cdot \frac{MN}{MM'}$$

$$OP \cdot OQ = NQ \cdot NP = XY = OM \cdot OM' \cdot \frac{\overline{MN} \cdot \overline{NM'}}{\overline{MM'}^2}.$$

Notând $\frac{AB}{2} = a$, avem $OM \cdot OM' = OA^2 = a^2$, iar din triunghiul dreptunghiu MNM' căpătăm:

$$\frac{NM \cdot NM'}{\overline{MM'}^2} = \frac{NN_1}{\overline{MM'}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{NN_1}{CN} = \frac{1}{2} \sin\alpha$$

încât găsim:

$$X \cdot Y = \frac{1}{2} a^2 \sin\alpha$$

ecuaţia hiperbolei echilatere raportată la asimptotele ei.

Au rezolvat problema analitic următorii: C. IVĂNESCU, M. MARGULIUS, D. MAVRODIN, I. SAGER, I. SAVIN.

D-l MAVRODIN observă că dacă punctele A şi B se confundă se obţine problema Nr. 4125.

P. B.

---

1) Y. LEMAIRE. L'hyperbole équilatère et quelques courbes dérivées.

PROBLEMA 4881. *Să se demonstreze că numerele*

$$5.10^n + p.9_n + 4 \quad \text{şi} \quad 4.10^n - p.9_n + 5$$

sunt unul inversul celuilat pentru toate volorile lui p, *care fac pozitiv pe ultimul din ele. Numărul* 9_n *înseamnă numărul de* n *cifre* $99\ldots99$.

G-L GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-l CR. D. EFTIMIE (Bucureşti).

Notând cu M pe primul şi cu N pe ultimul număr, se vede că pentru a avea

$$N = 4.10^n - p(10^n - 1) + 5 > 0$$

trebue ca:

$$p < \frac{4.10^n + 5}{10^n - 1} = \frac{4(10^n - 1) + 9}{10^n - 1} = 4 + \frac{9}{10^n - 1}$$

$$\therefore \qquad p \leqslant 4. \qquad (1)$$

Acum observăm că

$$M = (5 + p)\,10^n + 4 - p$$

$$N = (4 - p)\,10^n + 5 + p$$

care sunt evident unul inversul altuia căci p fiind definit de (1) numerele $5 + p$ şi $4 - p$ sunt de o singură cifră, iar M şi N sunt de formele

$$a00\ldots00b \quad \text{şi} \quad b00\ldots00a.$$

Problema se poate generaliza pentru o bază oarecare B, în sensul că: *în o bază de numeraţie* B *numerele*

$$(B - k).B^n + p\,(B - 1)_n + k - 1$$

$$(k - 1).B^n - p\,(B - 1)_n + B - k$$

sunt unul inversal celuilalt pentru toate valorile lui p, *care fac pozitiv pe ultimul număr şi pentru* $k < B$.

Notă. 1°. Soluţii analoage, fără generalizare, au dat D-nii: H. P. BODNĂRESCU (Lic. „Titu Maiorescu", Bucureşti); N. N. TĂTARU (Lic. militar, Tg.-Mureş); V. L. FLORESCU, OCT. GH. RĂDULESCU (Lic. militar, Târgovişte); C. PANTELIMON, AL. I. ROHR, H. L. REISCHER (Lic. militar, Iaşi); ST. CETĂŢEANU (Bucureşti) şi T. C. ŞTEFAN (Târnna).

2°. Soluţii mai puţin simple au dat D-nii: AD. O. ŞAICHIN (Lic. „Matei Basarab", Bucureşti); M. D. POPA (Lic. militar, Iaşi); I. D. DIACONESCU, E. S. MODÂLCĂ (Lic. „Traian", T.-Severin); M. AL. VASILESCU-STABU (Bucureşti) şi D. D. BOIANGIU (Lic. „Traian" T.-Severin).

3°. Pentru sistemul zecimal numerele din enunţ pot fi înlocuite mai general prin

$$(10-a)\,.\,10^n + p\,.\,9_n + a - 1 \quad \text{şi} \quad (a-1)\,10^n - p\,.\,9_n + 10 - a$$

unde $a < 10$.

PROBLEMA 5044. *Axa unei străzi are o porţiune rectilinie de 80 m şi alta de 120 m făcând între ele un unghiu de 90°. Părţile rectilinii sunt racordate cu un cadran de 60 m rază. Strada are 12 m lăţime cu trotuare de 1 m.*

Un călător care ar merge pe lângă casele din partea concavă (a caselor) ce drum ar parcurge? Dar pe lângă trotuarul din partea convexă? In aceste cazuri, care ar fi drumul cel mai scurt de parcurs dacă s'ar merge şi peste stradă?

I. IONESCU.

Fie AMNB axa străzii, A'M'N'B' linia caselor din partea concavă, A"M"N"B" linia caselor din partea convexă. Punctele M, M', M", N, N', N" sunt contactele dintre părţile rectilinii şi cea curbă. Arcele M'N' şi M"N" au razele respectiv de 66 şi 54 m, şi deci lungimile

$$\frac{1}{2}\pi\,66 = 33 \times 3{,}14 = 103{,}62 \text{ şi } \frac{1}{2}\pi\,54 = 27 \times 3{,}14 = 84{,}78 \text{ m.}$$

Lungimea părţilor rectilinii este $80 + 120 = 200$ m. Deci lungimea drumului pe partea concavă este 303,62 m şi pe partea convexă 284,78 m. Aceasta este evident mai scurtă. Ea este mai scurtă şi decât orice drum care ar merge şi peste stradă, căci acesta l'ar înconjura.

Drumul de pe partea concavă s'ar putea scurta dacă mergem pe o linie care să lege două puncte P, Q' de pe arcul M'N' aşa ca linia P'Q' să fie tangentă la partea convexă a caselor de pe stradă. Coarda P'Q' lasă în arcul caselor concave o săgeată de

12 m pentru o rază de 66 m, ceea ce revine, la 1 m rază, 12/66 = 0,1818.. m. In o tabelă de lungimele arcelor găsim:

Numărul gradelor	Arcul	Săgeata	Coarda
70°	1,2217	0,1808	1,1472
71°	1,2392	0,1859	1,1614
Diferenţe: 1°	0,0175	0,0051	0,0142

Interpolând faţă de săgeata 0,1818 găsim ca arc corespunzător 1,2251 şi coardă 1,500. Diferenţa acestora este 0,0751, care înmulţită cu 66 ne dă aproximativ 5 m ca diferenţă de drum pe coarda P'Q' în loc de arcul P'Q'.

Observăm că unghiul la centru al coardei P'Q' fiind cuprins între 70° şi 71° e mai mic ca un cadran şi prin urmare coarda P'Q' se poate duce toată pe stradă fără a trece prin casele din partea convexă. Coarda poate avea mai multe poziţiuni pe lungimea arcului cadran M'N'.

I. I.

S'a primit o soluţie exactă a problemei dela D-l M. S. CHERŢMAN. D-sa însă a dat o altă interpretare părţii relativă la mersul peste stradă şi nu a mai calculat diferenţa găsită mai sus de 5 m, arătând că drumul înconjurător M'P'Q'N' e mai mare ca drumul M''N''.

PROBLEMA 5058. *Să se elimine* x *între ecuaţiile*

$$(1)\quad x^6+x^5-(3\alpha-1)x^4-(2\alpha-1)x^3+(3\alpha^2-3\alpha+1)x^2 + (\alpha-1)^2x-(\alpha^3-2\alpha^2+\alpha-1)=0,$$

$$(2)\quad x^4-(2\alpha-1)x^2+x+\alpha^2-2\alpha-y=0.$$

M. GHERMĂNESCU.

Inmulţim a doua ecuaţie cu x^2 şi scadem din (1); se găseşte

$$(3)\quad x^5-\alpha x^4-2\alpha x^3+(2\alpha^2-\alpha+1+y)x^2+(\alpha-1)^2x-(\alpha^3-2\alpha^2+\alpha-1)=0.$$

Scadem această ecuație din (2) înmulțită cu x:

$$(4)\quad \alpha x^4 + x^3 - (2\alpha^2 - \alpha + y)\, x^2 - (1+y)\, x + (\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha - 1) = 0.$$

Inmulțim (2) cu α și scadem din (4):

$$(5)\quad x^3 - yx^2 - (\alpha + 1 + y)\, x + (\alpha y + \alpha - 1) = 0.$$

Inmulțim (5) cu x și scadem din (2):

$$(6)\quad x^3 y + (y - \alpha + 2)\, x^2 - (\alpha y + \alpha - 2)\, x + \alpha^2 - 2\alpha - y = 0.$$

Inmulțim (5) cu y și scadem din (6):

$$(7)\quad (y^2 + 2y - \alpha + 2)(x^2 + x - \alpha) = 0$$

care se desface în

$$x^2 + x - \alpha = 0$$

și

$$y^2 + 2y - \alpha + 2 = 0.$$

Cum rădăcinile primei ecuații nu verifică nici (1), nici (2), rămâne ca rezultat al eliminării

$$y^2 + 2y - \alpha + 2 = 0,$$

ecuație găsită pe altă cale cu ocazia rezolvării problemelor 3503 și 4645 (G. M. XLII, p. 310).

Notă. La această problemă a trimis o bună soluție D-l BODNĂRESCU-HORIA (student).

Eliminarea de mai sus intervine în rezolvarea problemei 1876, cu o mică deosebire în expresiunea coeficienților ecuațiilor date.

M. G.

PROBLEMA 5087. *Să se studieze variația funcțiunei*

$$y = \pm x \sqrt{\frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2x - 1}}.$$

Să se traseze apoi curba reprezentativă.

VIRGIL CLAUDIAN.

Soluție dată de D-l EUGEN VIȘA (profesor secundar).

Vom rezolva problema propusă după normele indicate în articolul „*Asupra studiului variației unei funcțiuni*“ publicat în numărul de față. Este evident că nu vom studia decât valoarea lui y luată cu semnul $+$, deoarece studiul celeilalte valori îl vom deduce din acesta schimbând peste tot semnele, iar în ceeace privește trasarea curbei reprezentative vom lua simetrica celei găsite în raport cu axa Ox.

a) *Intervalele de existență.* Funcțiunea y va avea valori reale atunci când

$$\frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2x - 1} \geqslant 0,$$

inegalitate care are loc odată cu inegalitatea

$$(x^2 - 2x - 1)(x^2 + 2x - 1) \geqslant 0.$$

Cum polinomul din prima parte are rădăcinile (așezate în ordinea mărimei):

$$x_1 = -1 - \sqrt{2}\ ,\quad x_2 = 1 - \sqrt{2}\ ,\quad x_3 = -1 + \sqrt{2}\ ,\quad x_4 = 1 + \sqrt{2},$$

un studiu ușor ne spune că intervalele de existență ale funcțiunei din enunț sunt:

$$(-\infty,\ -1 - \sqrt{2})\ ;\ (1 - \sqrt{2},\ -1 + \sqrt{2})\ ;\ (1 + \sqrt{2},\ +\infty).$$

b) *Valorile funcțiunei la capetele intervalelor de existență.* Pentru o mai mare claritate notăm pe y prin $y(x)$. Cum

$$\lim_{x = \pm\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2x - 1}} = 1,$$

rezultă imediat că

$$y(-\infty) = -\infty\ ,\quad y(+\infty) = +\infty.$$

Tot așa

$$y(1 - \sqrt{2}) = y(1 + \sqrt{2}) = 0.$$

Când x se apropie de $-1 - \sqrt{2}$ prin valori crescătoare, sau de $-1 + \sqrt{2}$ prin valori descrescătoare, radicalul tinde către $+\infty$ (deoarece este considerat cu semnul $+$ în față), așa încât

$$y(-1 - \sqrt{2}) = -\infty\ ,\quad y(-1 + \sqrt{2}) = +\infty.$$

c) *Calculul derivatei.* Folosind regulele cunoscute se găseşte:

$$y' = \frac{x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 2x - 1)\sqrt{(x^2 - 2x - 1)(x^2 + 2x - 1)}}.$$

d) *Valorile lui* x *care anulează derivata,* sunt date de ecuaţia reciprocă

$$x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1 = 0,$$

care se poate rezolva după metoda cunoscută. Este însă uşor de observat că admite rădăcina 1, şi cum trebue să admită şi inversa ei, o admite ca rădăcină dublă. Celelalte două rădăcini sunt: $x = -2 \pm \sqrt{3}$. Rădăcina 1 o lăsăm deoparte neintrând în nici unul din intervalele de existenţă.

e) *Semnul derivatei.* Scriem pe y' sub forma

$$y' = \frac{(x-1)^2 (x^2 + 4x + 1)}{(x^2 + 2x - 1)\sqrt{(x^2 - 2x - 1)(x^2 + 2x - 1}}.$$

Cum numitorul este pozitiv peste tot unde funcţiunea există, semnul lui y' va fi dat de trinomul: $x^2 + 4x + 1$. Deci y este minim pentru valoarea $-2 + \sqrt{3}$ şi maxim pentru valoarea $-2 - \sqrt{3}$.

f) *Valorile maxime şi minime.* Pentru valoarea minimă, cum

$$\frac{(\sqrt{3}-2)^2 - 2(\sqrt{3}-2) - 1}{(\sqrt{3}-2)^2 + 2(\sqrt{3}-2) - 1} = \frac{5 - 3\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$$

$$= \frac{(3\sqrt{3} - 5)(\sqrt{3} + 1)}{2} = 2 - \sqrt{3};$$

$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2},$$

avem

$$y_m = (\sqrt{3} - 2)\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(5 - 3\sqrt{3})}{2}.$$

Valoarea maximă o deducem din aceasta schimbând semnul în faţa radicalilor

$$y_M = \frac{-\sqrt{2}(5 + 3\sqrt{3})}{2}.$$

g) *Punctele de discontinuitate* au fost găsite la b).

h) *Punctele unde curba taie axele de coordonate.* Afară de cele găsite la b) curba mai trece şi prin origină.

i) *Asimptote.* Afară de cele paralele cu axa Ox curba mai are o asimptotă (prin simetrie două). Dacă îi notăm ecuația cu

$$y = mx + n,$$

atunci

$$m = \lim_{x=\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x=\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2x - 1}} = 1,$$

$$n = \lim_{x=\infty} (y - mx) = \lim_{x=\infty} x \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 + 2x - 1}}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}}$$

$$= \lim_{x=\infty} \frac{-4x^2}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}\,(\sqrt{x^2 - 2x - 1} + \sqrt{x^2 + 2x - 1})} = -2,$$

adică asimptota neparalelă cu una din axele de coordonate are drept ecuație

$$y = x - 2.$$

Pentru trasarea cât mai exactă a curbei este bine să vedem dacă această asimptotă taie curba la distanță finită sau nu. Aceasta revine la rezolvarea ecuației

$$x \sqrt{\frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2x - 1}} = x - 2.$$

Prin ridicare la pătrat se găsește ecuația

$$x^2 - 3x + 1 = 0;$$

deci asimptota taie curba în două puncte A și B ale căror coordonate sunt

$$A\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \quad ; \quad B\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right).$$

Tangentele în punctele C, D, O unde curba taie axa Ox se găsesc ușor ținând seama de valoarea lui y', și anume:

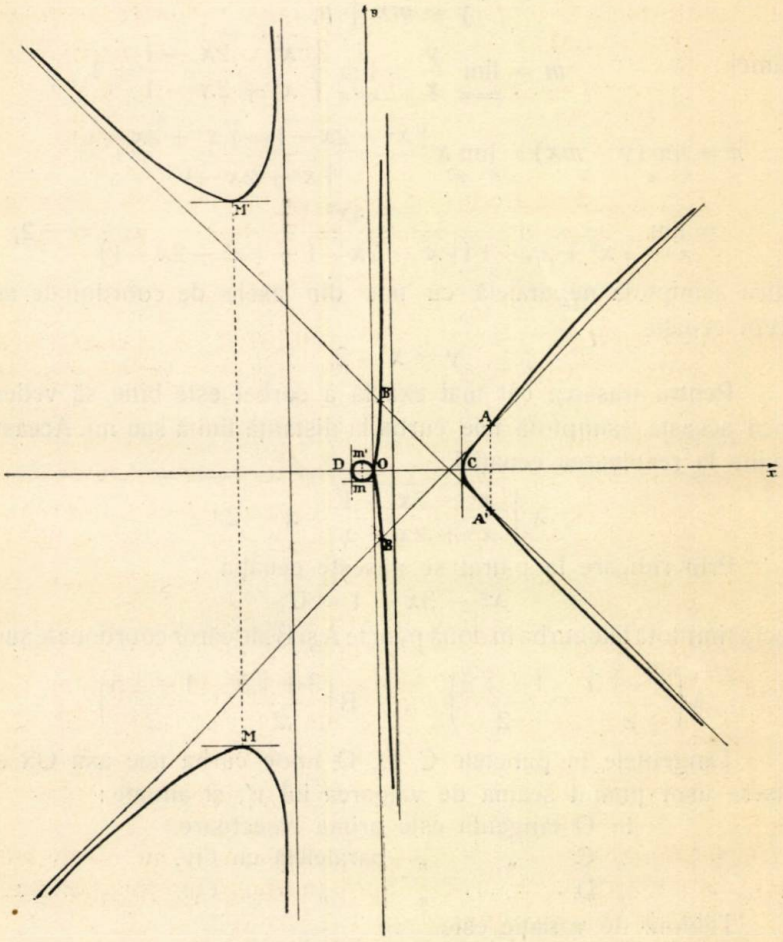
în O tangenta este prima bisectoare,
„ C „ „ „ paralelelă cu Oy,
„ D „ „ „ „ „ Oy.

Tabloul de variație este

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		$-1-\sqrt{2}$		$1-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{3}$		0		$-1+\sqrt{2}$	
y'		$+$	0	$-$				$-$	0	$+$				
y	$-\infty$	↗	y_M	↘	$-\infty$		0	↘	y_m	↗	0	↗	$+\infty$	

x	$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	
y	0	↗	$+\infty$

iar curba reprezentativă este cea din figura alăturată, împreună cu simetrica ei faţă de axa O*x*.



S'a mai primit o soluţie foarte bună dela D-l D. RIPIANU dar foarte neglijent redactată. Il sfătuim cu această ocazie să pună mai multă grije în scrierea şi redactarea problemelor.

Restul soluţiilor, destul de multe, sunt majoritatea necomplecte. Merită să fie menţionate soluţiile D-lor : JAREGHIE V. IOAN şi PETRESCU V. ACHILLE (lic. Militar, Iaşi), MAIOR GHEORGHE (stud. Mat. Cluj), ROLLEA C. VASILE (lic. Naţional, Iaşi), şi ZAHARIA-LUPU I. MIRCEA (lic. Braşov).

GH. TH. GH.

PROBLEMA 5104. *In* **„Ceasoslov"** *de Mitropolitul* NIFON, *tipărit la Bucureşti la 1854, găsim la pagina 297:*

„Februarie 2 *Intâmpinarea Domnului nostru Iisus Hristos. Praznic şi deslegare de peşte, de nu este postul cel mare".*

Se putea ivi această excepţiune în Calendarul Iulian?

I. IONESCU.

Mai nainte de a trece la tratarea problemei, citez un pasagiu cu privire la Paşte, din manualul de *Astronomie* (Clasa VII-a, pag. 122) al D-lui TRAIAN POPP:

„O unire a tutulor creştinilor ca să serbeze Paştele în acelaşi timp era de mult dorită. In acest scop, cum şi pentru a pune capăt ereziilor lui ARIE, *Impăratul* CONSTANTIN CEL MARE *convoacă în anul 325 un Sinod ecumenic la Nicea. Acest Sinod adoptă o regulă fixă pentru a determina în fiecare an data Paştelelor. Regula era bazată pe faptul că se credea că echinoxul de primăvară va cădea în totdeauna la 21 Martie şi deci a hotărît ca toţi creştinii să serbeze Paştele în aceeaşi zi şi anume: în prima Duminică după Luna plină, care cade odată cu echinoxul de primăvară ori imediat după el. Rezultă că dacă Luna plină cade la 21 Martie şi într'o Sâmbătă, a doua zi, Duminică, 22 Martie, este Paştele. Dacă Luna plină cade la 20 Martie, ea nu este pascală şi trebue să aşteptăm Luna plină următoare, peste 29 de zile şi dacă aceasta cade într'o Duminică, Paştele va fi Duminica următoare, 25 Aprilie. Deci intervalul în care poate cădea Paştele e între 22 Martie şi 25 Aprilie".*

Postul cel mare al Paştelui, sau *Păresimile,* ţine 48 de zile. Deci, dacă Paştele cade la 22 Martie, începutul Postului va cădea la 2 Februarie în anii ordinari.

Deci excepţia prevăzută de Mitropolitul NIFON se poate ivi în anii ordinari în care Paştele cade la 22 Martie. Excepţia nu se poate ivi în anii bisecţi.

M. S. CHERŢMAN.

(Liceul „Ion Maiorescu", Giurgiu).

PROBLEMA 5153. *Să se arate că dacă avem:*

$$X + Y + Z = A \quad , \quad XY + YZ + ZX = B \quad , \quad XYZ = C,$$

atunci, dacă A, B, C *sunt numere întregi, numerele* X, Y, Z *nu pot fi fracționare. Se cere o demonstrație aritmetică.*

I. IONESCU.

Voiu studia trei cazuri.

1. $X = a/b$ *cu* a *și* b *coprime,* Y *și* Z *întregi.*

Prima relație din enunț dă în acest caz:

$$a + b(Y + Z) = bA,$$

care cere ca a să fie divizibil prin b, ceea ce este exclus, a și b fiind coprime. De altfel, aceasta se vede direct pe prima egalitate căci dacă Y, Z și A sunt întregi, X este neapărat întreg.

2. $X = a/b$, $Y = a'/b'$ *cu* a *și* b *deoparte și* a' *și* b' *de alta, coprime, și* Z *întreg.*

Inlocuind în prima relație pe X și Y găsim:

$$ab' + a'b + bb'Z = bb'A,$$

care cere $b = kb'$ și $b' = k'b$, adică $k = k' = 1$. In acest caz $X = a/b$, $Y = a'/b$ și a doua relație din enunț ne dă:

$$aa' + ba'Z + baZ = Bb^2,$$

care cere $a' = mb$ și deci $Y = m$, întreg, ceea ce am exclus.

3. $X = a/b$, $Y = a'/b'$, $Z = a''/b''$.

(a, b), (a', b'), (a'', b'') *fiind perechi de numere coprime.*

Prima relație dată ne dă:

$$ab'b'' + a'bb'' + a''bb' = Abb'b'',$$

care cere: $bb' = mb''$. A doua relație ne dă atunci:

$$aa'b'' + aa''b' + a'a''b = Bbb'b'',$$

care cere ca:

$$ab' + a'b = nb''.$$

Ultima relație din enunț ne dă:

$$aa'a'' = Cbb'b'',$$

care cere ca să avem $aa' = kb''$. Din aceste relații scoatem:

$$a' = kb''/a \quad , \quad b' = mb''/b,$$

și înlocuind mai sus, deducem:

$$ma^2 + kb^2 = nab,$$

care cere $m = m'b$ și $k = k'a$. Deci $a' = k'b''$ și $b' = m'b''$, ceea ce nu este posibil căci a' și mb' sunt coprime.

Deci numerele X, Y, Z nu pot fi fracționare. Ele pot fi întregi sau iraționale.

P. DRĂGHICESCU
(Liceul Militar, Iași).

EXERCIȚII

10. Să se arate că, pentru n întreg și pozitiv, expresia:

$$2^{n+6} + 5^{2n+1}$$

se divide cu 23.

M. S.

R. Expresia se mai scrie:

$$2^6 \cdot 2^n + 5 \cdot 5^{2n} = 64 \cdot 2^n + 5 \cdot 25^n = (\mathcal{M}23 + 18)\, 2^n + 5 \cdot (\mathcal{M}23 + 2)^n$$
$$= \mathcal{M}23 + 18 \cdot 2^n + 5 \cdot 2^n = \mathcal{M}23.$$

11. Să se rezolve ecuația:

$$2a(a^2 + 1)\, x^2 + (a^4 - 4a^2 - 1)\, x + 2a(1 - a^2) = 0$$

și să se calculeze rădăcinile pentru:

$$a = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot$$

M. S.

R. $x_1 = \sin\alpha \quad ; \quad x_2 = \operatorname{cotg}\alpha.$

12. Pe catetele triunghiului dreptunghic OAB se iau punctele A' și B astfel ca:

$$OB' = OB \quad \text{și} \quad OA' = OA$$

(O este vârful unghiului drept, B' pe OA, iar A' pe OB).

Se proiectează ortogonal punctele O, A', B' pe ipotenuză în C, D şi E, Să se arate că :

$$OC = CD = CE.$$

M. S.

R. Triunghiurile OAE şi OA'D sunt egale ca având laturile OA şi AE respectiv egale cu OA' şi A'D, iar unghiurile din A şi A' egale. In consecinţă triunghiul OED este dreptunghic şi isoscel.

13. Să se rezolve ecuaţia :

$$4\cos x - \cos 3x = 3.$$

M. S.

R. Desvoltând $\cos 3x$ şi notând $\cos x = z$ se ajunge la ecuaţia :

$$4z^3 - 7z + 3 = 0$$

$$z_1 = 1 \qquad z_2 = \frac{1}{2} \qquad z_3 = -\frac{3}{2}$$

deci :

$$x_1 = 2k_1\pi \qquad x_2 = 2k_2\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

14. Se construeşte un rezervor cilindric cu baza circulară. Un m^2 de fund costă de p ori, iar un m^2 de perete costă de q ori un m^2 de acoperiş. Care sunt proporţiile cele mai economice ale rezervorului de capacitate V?

M. S.

R. x fiind raza bazei şi y înălţimea se ajunge la minimul expresiei :

$$z = (p + 1)\, x^2 + 2qxy$$

x şi y fiind legaţi prin :

$$\pi x^2 y = V.$$

Se găseşte :

$$x = \sqrt[3]{\frac{qV}{(p+1)\pi}} \qquad y = \sqrt[3]{\frac{(p+1)^2 V}{q^2\pi}} \qquad \text{iar} \qquad \frac{y}{x} = \frac{p+1}{q}.$$

PROBLEME PROPUSE

5225. Să se scrie expresiunea generală a numerelor care au un 7 la zecile de mii.

I. IONESCU.

5226. Să se găsească cinci numere întregi consecutive, știind că un număr format cu *două*, din cele cinci numere căutate, scrise unul după altul, este egal cu produsul dintre unul din celelalte *trei* numere și numărul format scriind unul după altul ultimile două numere rămase. Cu alte cuvinte dacă a, b c, d, e, sunt numerele găsite, între ele trebue să existe relația

$$a \times bc = de.$$

Ordinea alfabetică a literelor a, b, c, d, e este absolut independentă de ordinea de mărime a numerelor cerute.

G-L GH. BUICLIU.

5227. Se consideră un triunghiu variabil ABC la care pozițiile centrelor cercurilor exînscrise I_b și I_c sunt fixe, iar latura BC se deplasează paralel cu o direcție dată. Se cere:

1°. Locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului ABC;

2°. Să se construiască triunghiul ABC cunoscând pozițiile punctelor I_b și I_c, direcția de deplasare a lui BC, precum și raza cercului circumscris R.

IULIAN PETRESCU.

5228. In orice nonecagon regulat ABCDEFGHI există relațiile:

$$\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right)^2 = 2\left(\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}\right) + 3\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}\right)^2 \quad ; \quad \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = 2\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right)^2 + 4.$$

CERKEZ MIHU.

5229. In patrulaterul ABCD se înseamnă cu E, F, mijloacele diagonalelor $\overline{AC}$ și $\overline{BD}$. Prin E și F se duce paralelele la BD, AC care taie două laturi opuse ale patrulaterului în G și H. Să se arate că GH este paralelă cu o latură a patrulaterului.

VIRGIL ANDRIESCU.

5230. Intr'un triunghiu ABC ducând trisectoarele unghiurilor interioare ele determină două triunghiuri $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$, având:

$$\sphericalangle C_1AB = \sphericalangle C_1AC_2 = \sphericalangle C_2AC$$

$$\sphericalangle B_1CA = \sphericalangle B_1CB_2 = \sphericalangle B_2CB$$

$$\sphericalangle A_1BC = \sphericalangle A_1BA_2 = \sphericalangle A_2BA.$$

S'a demonstrat că triunghiul $A_1B_1C_1$ este echilateral.

Să se arate că perpendicularele, coborîte din vârfurile A_2, B_2, C_2 ale triunghiului $A_2B_2C_2$ respectiv pe laturile B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 ale triunghiului $A_1B_1C_1$, sunt trei drepte concurente în același punct.

O. N. ȚINO.

5231. Fie O' un punct pe înălțimea din A a triunghiului ABC, înscris în cercul O. Cercul, de centru O' trecând prin A, taie laturile AC, AB în C', B'; dreptele BC, B'C' se taie în U și cercurile ABC, A'B'C' în U'. Să se arate că, invers, AO este perpendiculară pe B'C' și punctele A, U, U' sunt colineare.

Să se observe că această configurație e invariantă într'o inversiune de pol A.

N. N. MIHĂILEANU.

5232. Dacă mai mulți lucrători ar lucra toți împreună, ar termina o lucrare într'un anumit număr de zile. Ei însă lucrează toți împreună numai în prima zi. In ziua a doua pleacă un lucrător, în a treia zi încă unul și plecând astfel în fiecare zi încă unul, când pleacă ultimul lucrător se termină și lucrarea, însă cu *trei* zile mai târziu decât dacă ar fi lucrat toți împreună.

Să se afle câți lucrători au fost și câte zile ar fi lucrat dacă nu pleca nici unul.

EM. MORȚUN.

5233. Să se stabilească relația:

$$(C_m^n)^2 = (C_{m-1}^{n-1})^2 + \frac{m+n}{m-n}(C_{m-2}^{n-1})^2 + \frac{(m+n)(m+n-1)}{(m-n)(m-n-1)}(C_{m-3}^{n-1})^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(m+n)(m+n-1)\ldots(2n+1)}{(m-n)!}(C_{n-1}^{n-1})^2.$$

GH. D. SIMIONESCU.

5234. Fie θ argumentul unei rădăcini imaginare a ecuației

$$x^n + px + q = 0.$$

Să se demonstreze relația

$$\left(\frac{p}{\sin n\theta}\right)^n + \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{-q}{\sin(n-1)\theta}\right)^{n-1} = 0$$

și să se deducă limitele între care variază θ.

Caz particular $n = 3$.

M. GHERMĂNESCU.

5235. a, b, c fiind trei arce oarecare, avem relația

$$\frac{\sin(b-c)}{\sin a} + \frac{\sin(c-a)}{\sin b} + \frac{\sin(a-b)}{\sin c} + \frac{\sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b)}{\sin a \sin b \sin c} = 0.$$

IOAN A. ILIE.

5236. Să se determine legătura ce trebue să existe între arcele a, b, c astfel încât să avem:

$$\cos^3 a \cos(b-c) + \cos^3 b \cos(c-a) + \cos^3 c \cos(a-b) = 3\cos a \cos b \cos c.$$

MIRCEA ADAM.

5237. Două bare identice AB și AC, de lungime l, de greutate G, situate în același plan vertical P sunt articulate între ele în punctul fix A și au capetele B și C prinse cu un fir de lungime a. Presupunând că planul P se rotește cu iuțeala constantă ω în jurul verticalei punctului A, să se determine minimul acestei iuțeli astfel încât firul să fie întins.

In cazul unei iuțeli de rotație superioare celei determinate mai sus, să se calculeze tensiunea în fir, reacțiunea dintre bare și reacțiunea din A.

GABRIELA ȚIȚEICA.

5238. Se consideră exagonul regulat $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ de latură a. Se prelungesc în același sens laturile exagonului cu lungimea a și se obțin astfel punctele:

$$A_{12}\ ,\ A_{23}\ ,\ A_{34}\ ,\ A_{45}\ ,\ A_{56}\ ,\ A_{61}\ .$$

Să presupunem că fiecare din segmentele de dreaptă $A_1A_2A_{12}$, $A_2A_3A_{23}, \ldots, A_6A_1A_{61}$ reprezintă câte o grindă orizontală de greutate G simplu rezemate cu capetele $A_{12}, A_{23}, \ldots, A_{61}$ pe zidărie şi cu celelalte capete $A_1, A_2, \ldots, A_6$ simplu rezemate în mijlocul grinzilor pe care se află situate.

Se aşează o greutate P în mijlocul lui $\overline{A_1A_2}$.

Se cer reacţiunile în cele douăsprezece puncte de rezemare.

ALEXANDRU STOENESCU.

5239. In războiul *Germano-Polon* se spune că formaţiunile de bombardament aerian executau bombardamentul descriind, înainte de a ajunge la obiectiv, un viraj cu o viteză foarte mare, aşa încât după aruncarea bombelor, formaţiunile ocoleau la mare depărtare punctul vizat, pentru a evita puternicile mijloace de apărare antiaeriană. Admiţând că:

— Virajul este descris după un arc de cerc, într'un plan orizontal, raza cercului şi altitudinea fiind date;

— Rezistenţa aerului opusă bombelor este neglijabilă;

Se cere:

1°. Depărtarea, în proecţie pe planul orizontal, dela care trebue aruncate bombele;

2°. Depărtarea, în proecţie pe planul orizontal, dintre obiectiv şi traiectoria virajului;

3°. Inclinarea laterală a avioanelor pe timpul virajului.

Aplicaţie pentru cazul când altitudinea ar fi *4000 m*, raza virajului *2000 m*, şi viteza avioanelor 360 km/oră.

CPT. C-DOR I. LINTEŞ.

5240. Se consideră conicele tangente în origine la axa Oy şi având dreapta $x+y-1=0$ ca asimptotă.

Să se afle a doua asimptotă şi să se arate că trece printr'un punct fix. Să se găsească înfăşurătoarea axelor conicelor considerate.

N. ABRAMESCU.

ERATĂ. La finele enunţului problemei 5153 propusă la pag. 614, Vol. XLIV se adaugă « ***sau cu un multiplu al raportului celor două raze*** ».

Până la sfârșitul lunei precedente, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Abeles I. Florin (5186, 210); *Bădescu F. C.* (5159); *Bârlea Coriolan* (5173); *Bârlea-Suhățeanu G. V.* (5120); *Bârlea Victor* (5171); *Boiangiu D. D.* (4881, 989, 5210, E); *Buznea D.* (5191); *Cetățeanu St.* (P); *Chintescu Matei* (5172, 91); *Cocea Th.* (A); *Cornățeanu I. A.* (5042, 87, 131, 68, 91); *Cristea I. Const.* (5154, 68, 73, 74, 86, 87, 88, 91); *Cruceru G. Const.* (5191); *Diaconescu I. Ion* (5191, 219); *Dimitriu C. I. Călin* (3768, 4251, 5172, 91); *Eftimie D. C.* (5027); *Fila Gh. Eug.* (5191, 98); *Friedman I. Barbu* (5191); *Iancu Isac* (5033, 39, 55, 142, 60, 71, 72. 86, 91); *Ilie Nicolae* (5191); *Ionescu Al. I.* (5191); *Ionescu M. C.* (5191); *Ionescu Stelian* (5186); *Iorgulescu N. Florin* (5160, 91); *Jalbă Iulian* (5191); *Leibovici Sergiu* (5223); *Marteș Gr.* Subloc. (5013, 27, 54, 55, 159, 73); *Mihăilescu D-tru* (5191); *Mihăilescu Gh.* (5191); *Mironescu D-tru* (5191); *Mocanu Const.* (5172); *Moessner A.* (N); *Moldoveanu N. D-tru* (5191); *Murărolu I.* (P): *Musceleanu D.* (C, R); *Negrea A. Mircea* (4947, 5159, 60, 90); *Niculescu C. M.* (5158, 59, 67, 80, 86, 91); *Paicu Mircea* (5203); *Petrescu Iulian* (5138, 55, N, P); *Popescu Ion* (5191); *Ripianu Andrei* (5175); *Ripianu D-tru* (5162, 76, 98, 218, 22); *Șerban Const.* (5160); *Staicu I. Nic.* (5160, 91); *Stamate Ion* (2675, 3677, 5135, 52, 87, 91, 205, 06, N); *Stoianovici I. Șerban* (5157, 91); *Teodorescu Dorin* (4989); *Thébault V.* (N, P); *Todirică V. C.* (5191); *Topalescu Gh.* (5152); *Trefilov I. Mihail* (5008, 21, 36, 51, 81, 108); *Tudoran M. Lydia* (5191); *Vesa R. Virgil* (5191); *Vijelie Gh. Eugen* (5153, 73, 91); *Vlăsceanu I. Vintilă* (5191); *Voicu Gh.* (5191).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus de **geometrie,** *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii și nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeași foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică* Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*
Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 50 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa :

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon : 3-9803).

C. 59.295.

M 2536

Biblioteca „ASTRA"
— SIBIU —

BIBLIOTECA CENTRALĂ
SIBIIU

GAZETA MATEMATICĂ

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLV

NUMĂRUL 5. — IANUARIE 1940

SUMARUL

1. Algebra lui Costandinu Şerbescu-lu . . *I. Ionescu.*
2. Impresiile Contelui Samuil Teleki despre matemateciani străini (urmare) . . . *Victor Marian.*
3. Asupra problemei 4567 . . . . . *Tiberiu Popoviciu.*
4. Raportul Comisiunei pentru acordarea premiului „Nicolae G. Botea" *Comisiunea pentru premii.*
5. Programa analitică hotărîtă pentru concursul „Gazetei Matematice" din anul 1940.
6. Note Matematice: 16 — 18.
7. Bibliografie.
8. Cereri: 289.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 766, 2996, 3665, 4377, 4441, 4809, 5032, 5066, 5107, 5115, 5132, 5210.
11. Exerciţii 15 — 16.
12. Probleme propuse: 5241 — 5255.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1940

74314

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea **„Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **D. Stoica,** Inginer; Cpt. Comandor-Inginer **Gr. Zapan; Al. D. Bunescu,** Inginer, Secretarul General al Ministerului Lucrărilor Publice şi Comunicaţiilor, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice.*

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1939 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 5183, 84, 85, 89, 92, 93, 95, 96, 97, 200, 02, 04, 06, 08, 09, 11, 12, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 24, 25, 26, 28, 30, 31, 33, 34, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale,* Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL XLV. Nr. 5 *SUPLIMENT* IANUARIE 1940

RECREAŢIUNI

1. **Socoteala.** Vreţi să ştiţi de unde vine cuvântul *socoteală?*

Iată ce găsim în „*Incercări de etimologie dem Ave Caesar*, Ediţia II. Bucureşti:

Socoteală. (a calcula cu cifre; figurat: a cere lămuriri pentru vreo nedreptate, familiar).

Latin, din trei părţi: So + co + tela.

So din Sol, is = soare; *co* din calo, are = a numi şi a arăta; în engleză: *to call* = a chema şi a numi; *teală* din tellus, uris, = pământ; primitiv a fost: *horam + solis + calo + telurem:* arăt ora soarelui pe pământ (ceasornic solar; prin extensiune: fac semne pe pământ, sau mai drept, pe nisip ca ARCHIMEDE, DIOGENE şi alţi învăţaţi antici. Aceştia nu aveau hârtie şi-şi făcea socotelile pe nisip.

Evol. fonetică: *horam* s'a pierdut, rămânând:

So(lis) + c(al)o + tellu(rem); aceasta prin căderea lui: *lis al, rem*, a dat pe:

Socotellu; din care silaba *el* s'a prefăcut în *ea*, formând:

Socoteallu; de unde prin îndulcirea lui *u* final, pronunţăm: *Socoteala.*

Rădăcina *cal* (din calo, are), o găsim şi în francezul *calculer.*

Etimologia *franceză* dă pe *calculer* scoborât din *calculus* = pietricică prin mijlocul căreia se număra în vechime.

In cazul acesta *calculer* ar fi o contracţiune din:

Calcu(lus) + (ca)lare = a arăta pietricica: *calculare;* din care metateza lui *e* final a dat: calcul*aer;* de unde prin contracţiunea lui *a* şi *e* s'a făcut *calculer*".

Fără comentarii! I. I.

*

2. **Numeraţie latinească.** Pe lângă numeraţiile germane şi franceze, publicate în volumele anterioare ale *Gazetei Matematice*, adaog şi următoarea numeraţie latinească:

Unus, due, tres, tu es rex
Semel, bis, ter, tu es celer
Singulis, bini, terni, eut quaterni

I. A. RAICU.

*

3. **Logică de copil!** Un copil din clasa II-a primară citeşte că benzina se vinde cu 7 lei litrul.

Intrebat de altul mai mare de ce scrie litru şi nu kilogram, răspunde simplu de tot: *nu ştiu.*

— Cum nu ştii? n'ai învăţat că cu kilogramul se măsoară greutăţile şi cu litrul... ce?

Băieţelul gândeşte puţin şi răspunde iluminat:

Cu litru se măsoară *uşurimile!*

N. ST. MIHĂILESCU.

*

4. **Numere reprezentative.** In articolul „*Teoria compatriotului* P. S. COCULESCU", din „*Curentul*" cu data de 3 Septemvrie 1930, D-l CESAR PETRESCU citează:

„*La nuit était déliciuse | Embaumé de la senteur des pins | Le génie des airs secouait sa chevélure bleue | Et l'on respirait la faible odeur, d'ambre | Ou exhalait les crocodiles couchés sous les tamarins du fleuve*".

Şi apoi adaogă:

„Această frază dă cu numere reprezentative:

2 6
3 2 3 4 2
3 4 2
5 5
3 4 5 3 2

„*unde este foarte uşor de recunoscut pseudominarea elementelor în totdeauna aceleaşi; din această* **identitate** *în varietate, naşte armonia...*".

Apoi mai departe spune: „*Adesea constrângere* **aritmetică** *a versului...*".

Pentru matematicieni, matematica poeţilor şi a scriitorilor este, după cum se vede, o *constrângere* de neînţeles...

VIRGIL C. POPESCU.

*

5. **Adunarea gradelor.** Intr'un atelier trebuie să se încălzească un anume oţel pentru călire la temperatura de 1020°—1040°.

Inginerul este plictisit că nu are cuptoare pentru astfel de temperatură şi că trebuie să trimeată oţelul la o călitorie concurentă.

Intervine atunci D-l Inspector Technic, cu leafă mare şi cu practica din... auzite, şi observă pe inginer cu butada:

„Da de ce să trimiţi la concurent atunci când ai cele două cuptoare a câte 825° temperatură nominală, ceea ce-ţi dă 1650°. Nu sunteţi practic de loc...".

Autentic. Numai că inginerul, tot la concurent s'a dus!

GH. B.

6. **Problemă ciobănească.** Un cioban cunoscător al aritmeticii, este întrebat de un domnişor turist câte oi are. Ciobanul ridicându-şi cojocul peste umăr se sprijineşte în bâtă şi spune vorbind foarte repede:

— *Nu am o sută, îmi mai lipsesc până la o sută atâtea câte aşi avea peste o sută dacă aşi avea de nouă ori câte am.*

Acuma socoteşte şi d-ta domnişorule, şi află câte oi ţi-am spus că am.

Domnişorul, care a stat totdeauna pe picior de beligerant cu profesorii lui de matematici, a crezut că ciobanul e nebun şi de frică... nu i-a mai răspuns nimic! GH. B.

*

7. **Soluția problemei 4927!** La această problemă ceream numerele mai mici ca 100 care se pot scri cu aceleași cifre în două sisteme de numerație.

Un coresponent, bacalaureat, găsește 72 soluții grupate în tabloul următor:

	B=2								
B'= 2	0	B=3							
B'= 3	12 ; 21	0	B=4						
B'= 4	13 ; 31	23 ; 32	0	B=5					
B'= 5	14 ; 41	24 ; 42	34 ; 43	0	B=6				
B'= 6	15 ; 51	25 ; 52	35 ; 53	45 ; 54	0	B=7			
B'= 7	16 ; 61	26 ; 62	36 ; 63	46 ; 64	56 ; 65	0	B=8		
B'= 8	17 ; 71	27 ; 72	37 ; 73	47 ; 74	57 ; 75	67 ; 76	0	B=9	
B'= 9	18 ; 81	28 ; 82	38 ; 83	48 ; 84	58 ; 85	68 ; 86	78 ; 87	0	B=10
B'=10	19 ; 91	29 ; 92	39 ; 93	49 ; 94	59 ; 95	69 ; 96	79 ; 97	89 ; 98	0

Aici este un record de soluții eronate! Nici una din cele date în tablou nu este bună. Greșeala este elementară, căci în orice sistem de numerație cifrele ce se întrebuințează sunt inferioare bazei, ca valoare a lor. Aici toate numerele au cifrele egale cu baza sau mai mari ca ele!!!

I. I.

*

8. **± în Botanică.** In *Botanica* de MARIN DEMETRESCU găsesc:

„... și se zice că rădăcinile sunt înzestrate cu geotropism pozitiv, iar tulpinele cu unul negativ".

M. N. UNGHEANU.

*

9. **Patrate magice cu numere iraționale.** Iată un astfel de patrat magic:

$\sqrt{8}$	$\sqrt{98}$	$\sqrt{72}$
$\sqrt{162}$	$\sqrt{50}$	$\sqrt{2}$
$\sqrt{32}$	$\sqrt{18}$	$\sqrt{128}$

Elementele fiecărei linii orizontale, sau ale fiecărei linii verticale au ca sumă comună $15\sqrt{2}$, care este și suma elementelor diagonalelor. In plus pentru liniile I și III, pentru un x oarecare, elementele sunt legate prin relațiunea:

$(\sqrt{8}+x)^2+(\sqrt{98}+x)^2+(\sqrt{2}+x)=(\sqrt{32}+x)^2+(\sqrt{18}+x)^2+(\sqrt{128}+x)^2$,

după cum și elementele coloanelor I și III satisfac relațiunea:

$(\sqrt{8}+x)^2+(\sqrt{162}+x)^2+(\sqrt{32}+x)^2=(\sqrt{72}+x)^2+(\sqrt{2}+x)^2+(\sqrt{128}+x)^2$,

oricare ar fi x.

A. MOESSNER.

*

10. **Formula de serviciu!** Formula elevului de serviciu pe bucătărie la Mânăstirea Dealu este:

$$C + C + C = DC!$$

care înseamnă: *Cinste, Corectitudine, Curăţenie sunt egale cu Datorie Complectă.*

EUG. VIJELIE.
L. M. M. F.

*

11. **Perpendiculara pe un punct!** D-l AL. O. TEODOREANU în nuvela sa „*O inspecţie*" dă următoarea geometrie poetică:

„... O cărare a cărei linie prelungită ar fi căzut perpendicular pe vârful de navă al nasului".

I. MURĂROIU.

*

12. **In ora de desemn.** Elevul. — Domnule Profesor, figura este prea mică faţă de mărimea cadrului.

Profesorul. — Ia şi D-ta o linie cu *milimetri* mai mari.

M. A. CERNEŞ.

*

13. **De pe la concursuri.** La concursul pentru admiterea în „*Politecnica*" din Bucureşti se ceruse să se arate dacă produsul a două numere consecutive poate fi un patrat perfect. Răspunsul unui candidat a fost cam ăsta:

„*Un patrat este un număr pereche. Dar* $n(n+1)$ *nu este pereche. Deci el nu poate fi patrat*".

O fi reuşit la concurs cum a reuşit să iasă din liceu?

I. I.

*

14. **Iarăşi teorema celor trei perpendiculare!**

— Care este teorema celor trei perpendiculare?

— Dacă o dreaptă e perpendiculară pe două drepte dintr'un plan, e perpendiculară şi pe o a treia.

ADOLF O. ŞAICHIN.

*

15. **Soluţie originală.** La problema: «*Să se rezolve în numere întregi ecuaţia* $x + y^3 = y + x^3$» ce am propus în *Suplimentul Gazetei Matematice*, am primit din partea unui corespondent, soluţia următoare:

Scriem:

$$1 = (x^3 + y) / (x + y^3) = (x \,.\, x \,.\, x + y) / (x + y \,.\, y \,.\, y).$$

Simplificând un x şi un y dela numărător şi numitor, avem:

$$x^2/y^2 = 1 \quad , \quad x/y = 1 \quad , \quad x = y.$$

Intr'adevăr, $x = y$ constitue o soluţie parţială a ecuaţii propuse. *Errore ad veritatem!*

V. GH.

ALGEBRA LUI COSTANDINU ȘERBESCU-LU.

In anul 1876 s'a tipărit la București un „*Tratatu* | *de* | **Algebra elementara** | *elaborata pentru usu-lu scole-loru secundare* | *și a-lu aspiranti-loru la Bacalaureatu* | *de* | COSTANDINU ȘERBESCU-LU | *studinte a-lu Facultati-i de dreptu* | *Bucuresci* | *Tipografia* ROMANULUI, *Carol Göbl* | *14, Strada Domnei 14* | *1876*".

Cartea poartă dedicația:

„*Stimabili-loru mei fosti profesori*

Domni-loru { EL. ANGELESCU *și*
A. F. ROBESCU

Ca semnu de stima și recunoscinta dedicu acesta prima encerçare".

Cartea nu are o prefață în care autorul să ne fi spus ce a îndemnat pe acest student în drept să scrie o algebră elementară! Fapt este că pe acea vreme cam lipseau cărți de algebră pentru învățământul secundar.

Cap. I este intitulat: „*Operațiuni-le algebrice*". Aci autorul dă mai întâiu definiția algebrei:

„**Algebr'a** *(de là arabescu-lu* **al-ḏjaber,** *sciința'a călculului) este ua rámura a matemátice-loru care consídera númere-le en raporturi-le lor generale, pentru a simplificà și facilità cestiuni-le deslegate prin mijloace aritmetice*".

Iar mai departe:

„... *algebr'a nu e de câtu aritmetica generalizata*".

Se arată că algebra operează cu *cantități*, iar nu cu numere și se explică ce se înțelege prin *monomu, binomu, trinomu, polinomu, coeficiente-le, termeni asemeni.* Introducerea cantităților negative, care constituie dificultatea cea mai mare la începutul învățământului algebrei, este tratată numai în două rânduri.

„*Un monomu se ḑice positivu candu are ennainte-a se sèmnu-lu* +, *negativu candu are* —".

De altfel, și azi cărțile didactice nu prea dau toată atențiunea cuvenită introducerii cantităților negative. Dela elevii Liceului din Blaj am primit de curând o cerere prin care mă ruga să stărui ca

Societatea Gazeta Matematică să tipărească o algebră elementară în care să se explice mai pe larg bazele algebrei, iar nu stenografic cum se vede din exemplul dat mai sus. Chestiunea am dat-o în studiul D-lor Profesori de Matematici din *Societatea Gazeta Matematică.*

Tot în Cap. I găsim operaţiunile: *„Adiţiune-a şi sustracţiune-a“. „Multiplicaţiune-a“. „Divisiune-a“. „Radicarea la patratu şi estragere-a radecini-i patrate“.* La ele întâlnim cuvintele *enmulţire, factoru, produsu, putere, esponinte, divisoru, dividendu, câtu-lu, restu-lu, fracţiune,* etc.

Cap. II se ocupă de *„Operaţiuni cu radicale şi cu cantitaţi afectate de esponinţi fracţionari sau negativi“.* Se vorbeşte aci de *indice-le radicalu-lui,* şi se dau *teoreme şi corolare.*

Cap. III tratează despre *„Ecaţiuni de gradu-lu antaiu“.* Se defineşte *identitate-a, egalitate-a, ecaţiune-a,* şi se arată cum se găsesc *radecini* după ce se demonstrează unele teoreme şi corolare. *Sistemele* de ecuaţii le desleagă prin *substituţiune* şi *eliminaţiune* şi prin aducerea unei necunoscute la acelaşi *confactoru.*

Cap. IV se ocupă de *„ecaţiuni de gradu-lu al doilea cu ua necunoscuta“.* Se începe cu rezolvere-a *„ecaţiuni-loru de forma incompleta“* şi apoi de *forma completa, discuţia* ecuaţiilor, şi se vorbeşte de *valorile imaginare.* Se studiază *relaţiuni-le coeficienţiloru.* Capitolul se închee cu demonstrarea teoremei că o ecuaţie de gradul II nu poate avea mai mult ca două rădăcini.

Cap. V tratează despre *inegalitaţi* şi *ecaţiuni irraţionale.* Chestiunea este foarte sumar tratată; discuţia admisibilităţii soluţiilor nu este de loc atinsă.

Cap. VI se ocupă cu *ecaţiuni de gradu-lu a-lu treilea* şi *a-lu patrulea,* studiind mai de aproape ecuaţiile *bipatrate.*

Cap. VII arată cum se rezolvă ecuaţiile de gradul al doilea, reductibile la gradul al doilea cu o necunoscută.

Cap. VIII dă *„Probleme relative la rezolvere-a ecaţiuni-loru“.* Aci autorul dovedeşte că nu a făcut matematicile la Facultatea de ştiinţe căci face erori de exprimare la chestiuni de geometria analitică. Astfel ne spune că: *„Ua dreapta enclinata ensa nu poate fi de câtu positiva“ !* Aci găsim cuvinte de geometrie ca *terimu* (teren), *dreptanghiu, dreptanghiularu, ennalţime, cub, suprafeţa, triunghiu* şi *trianghiu, catete, ipotenusa, basa, puntu.* De abia în acest Capitol autorul ne spune :

„... *deca cantitate-a positiva ensemneza ua avere, unu capital, cè negativa va ensemnà ua datoria, ua suma ce amu avè a plăti; candu e vorb'a de timpu en génere cantităţi-le positive ensemnà timpu viitoru, ièr cele negative timpu trecutu; deca e vorb'a de lungimi, de distanţe, ua cantitate positiva areta ua distanţa mesurata de là stang'a spre drept'a, iar un'a negativa ua distanţa mesurata de la drept'a la stang'a*".

Cap. IX se ocupă „*despre masima şi minima*". Aci se vorbeşte de *cantitate variabila*, de *constanta;* apoi sunt date probleme algebrice şi geometrice.

Cap. X tratează despre *progresiuni aritmetice* şi *geometrice* sau *prin diferinţă* şi *prin cătu.* Ele pot fi *crescêtoare* şi *descrescêtoare* după *raţiunea* lor. Vorbeşte de *termeni estremi, ecidistanţi, medii aritmetici* şi *geometrici, sum'a termeni-loru.*

Cap. XI conţine *teoria Logaritmilor.* Acolo ne spune că ei „*au fostu inventaţi pe la enceputulu secului XVII de côtră scoţiènu-lu* IONU NEPER, *care luase dreptu basa numeru-lu incomensurabilu E = 2,71828... şi care se numesc logaritmi-i* **neperieni** *sau* **iperbolici,** *notandu-se pe scurtu prin litera* L. *Mai tarţiu englesu-lu* ENRICU BRIGGS *calcula logaritmi-i, ce portà numele lui, pe bas'a 10; aceşti-a suntu cei mai entrebuinţaţi, fiindu calculaţi pe acè-a-şi basa cu numeraţiune-a, cè-a ce a făcutu sa se numeasca şi logaritmi* **vulgari,** *ensemnandu-se pe scurtu prin silaba* **log.**" Se explică ce e *caracteristica, mantisa, sisteme de logaritmi;* se dau teoreme privitoare la logaritmi şi se descriu *tablele* cu care face diferite aplicaţiuni.

Cap. XII dă *aplicaţiuni-le logaritmi-loru,* ca *ecaţiuni esponenţiale, interes'a compusa, anuitaţi.*

Cap. XIII tratează despre *arangiari, permutari,* şi *combinari,* stabilind formulele lor.

Cap. XIV dă *Desvoltare-a puteri-loru unui binomu şi unui polinomu,* dând binomul lui NEWTON şi generalizarea lui, puterile unui polinom şi ale unei expresiuni imaginare.

Cap. XV este intitulat: „*Numere-le figurate şi aplicaţiuni-le loru*". Se studiază *triunghiul lui* PASCAL, *sumarea ghiulele-loru pentr'ua pila triangulară*", *patranghiulara* şi *dreptanghiulara* şi încheie cu *aflare-a numeru-lui termeni-loru d'en desvoltare-a unui polinomu la ua putere ore-care.*

Cap. XVI se ocupă de *„Serii"*. Se arată ce e o serie *converginte* sau *diverginte*, dă *teoreme de convergență* pentru serii cu termeni positivi sau alternativi, arată cum se calculează numărul E(*e*) și arată că el este *limite-a desvoltari-i lui* $[1 + (1/m)]^m$ *candu m cresce en infinitu"*.

Cap. XVII dă *„Noțiuni de derivate"*. Aci se explică ce este *variabil'a independinte, funcțiune, variabil'a dependinte, acrescêmentu-lu datu variabile-i* și *acrescêmentu-lu corespondinte a-lu funcțiuni-i*. Se deosibesc funcțiuni *esplicita* și *implicita* seu *transcendinte*, care *„este ace-a, a carei valoare se află en urma unoru operațiuni mai complicate, ca estrageri de radecini, aflare de logaritmi*, etc." Cum se vede studintele autor s'a cam încurcat în definițiuni și noțiuni. Asta nu-l împiedică ca după ce arată cum se găsește derivata la o funcțiune, să arate cum se află derivata unui *produsu, câtu, puteri, radecini* și chiar a unei *funcțiuni de funcțiuni*, dând regula:

„derivat'a unei funcțiuni de funcțiune este egala cu produsu-lu derivate-loru celor doue funcțiuni simple, cari ua compunu".

Cu aceasta se termină tratatul de algebră. El are 200 pagini de 180 × 100 (partea tipărită).

Din citatele făcute se vede că autorul are o ortografie specială; așa desparte cu o liniuță articolul la finele substantivelor. Chiar numele său îl articulează cu LU despărțit cu o liniuță de SERBESCU. Cartea aceasta a fost cumpărată de *Gazeta Matematică* dela un colecționar de cărți vechi și care, când mi-a propus să o cumpăr, mi-a spus că are de vânzare Algebra lui LU! Se accentuiază apoi vocalele pe care cade accentul tonic, de pune *en* în loc de *în* ca la *enmulțire, ennainte, envederat, endoitu, entru, entroducere, ensemna*, etc.

Expunerea este scurtă și clară; rigoarea matematică este însă deseori sacrificată.

După fiecare Capitol e un mic număr de *„eserciție"*; în total la cele 17 capitole sunt 97 de exerciții, a căror alegere lasă de dorit. E destul a spune că la derivate sunt numai trei eserciții din care cel din urmă este următorul:

Sa se gaseasca enca derivat'a espresiuni-i

$$y = \sqrt[4]{\left[a - \frac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(c^2 - x^2)^2}\right]^3}$$

căreia îi dă rezultatul:

$$R. \quad \frac{3\sqrt[3]{c^2-x^2}-8x^2\sqrt{bx}}{8x\sqrt{bx}\sqrt[3]{c^2-x^2}\sqrt[4]{a-\frac{1}{\sqrt{bx}}+\sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}}}.$$

Autorul dovedește că îi plăceau matematicile dar că nu le cunoștea bine, el neavând cunoștințe solide de matematicile superioare. El a văzut că lipsesc Algebre elementare și s'a apucat să facă una care să umple golul constatat. Din acest punct de vedere el își are meritul său, căci dacă specialiștii nu se ocupau de tipărirea cărților didactice, tot este bine că amatorii de matematici și-au luat ei această grijă.

I. IONESCU.

IMPRESIILE CONTELUI SAMUIL TELEKI DESPRE MATEMATICIANI STRĂINI

(Cu ocazia bicentenarului nașterii lui TELEKI)

(Urmare de la pag. 117)

II. Studii în Olanda

La 11 August 1761 TELEKI sosește la Utrecht, unde notează următoarele (pag. 74): *„Eu am plecat din Bâle cu intenția să-mi continuu studiile la Leyda, dar studenții noștri nu prea laudă Leyda, căci în afară de* MÜSSENBROECK [1]) *nu este acum acolo niciun om celebru care să predea științe, cari să mă intereseze. Pentru* MÜSSENBROECK *m-așĭ duce cu cea mai mare bucurie, dar nu cutez, fiindcă e foarte bătrân și extenuat, așa că se poate că o zi predă, iar a doua zi, sau se îmbolnăvește, sau moare, după cum îi descriu slăbiciunea și eu atunci plătesc în zadar ani întregi pentru locuință și altele. Aici însă... profesorul* HAHN [2]) *propune Fizică, și în aceasta e considerat ca un om foarte vestit în*

1) PIETER VAN MÜSSENBROECK (1692—1761) a fost profesor de matematici și fizică la Universitatea din Duisburg, apoi Utrecht și în sfârșit la Leyda.

2) IOHANN DAVID HAHN (1729—1784), dela 1759 profesor la Universitatea din Utrecht, iar dela 1775 la Leyda.

Olanda şi al doilea după MÜSSENBROECK. *Cred însă că nu va fi chiar aşa de mare matematician ca* BERNOULLI.

Presimţirea lui TELEKI faţă de MÜSSENBROECK s'a adeverit. Intr'adevăr la 21 August mergând la Leyda scrie următoarele: „... *m'am dus la D-l* MÜSSENBROECK *să-i fac cunoştinţa dar n'am avut noroc, deoarece acum fiind vacanţă nu se află în oraş*". Iar la 23 August (pag. 79): „... *iarăşi m'am dus la* MÜSSENBROECK *crezând că fiind Duminecă poate va fi venit în oraş, dar nici acum nu am avut norocul să văd pe acest om mare, ceea ce regret foarte mult*". In 20 Septemvrie însă notează următoarele (pag. 83): „*In zorii zilei de azi a murit în Leyda vestitul* MÜSSENBROECK, *abia a zăcut bolnav o săptămână*". Iar ziua următoare are următoarele rânduri: „*La 21 des de dimineaţă a trimis la mine fiul lui* MÜSSENBROECK, *care e comerciant în Utrecht, şi mi-a comunicat trista moarte a tatălui său. Imi pare totdeauna rău că nu am putut vedea niciodată pe acest mare fizician* MÜSSENBROECK, *deşi în timpul cât am stat la Leyda l-am căutat de câteva ori*".

In ceea ce priveşte relaţiile lui TELEKI cu matematicienii din Utrecht, extrag următoarele (pag. 80): „*La 25 August... după masă am căutat pe D-l profesor* HAHN, *dar încă nu s'a înapoiat din Heidelberg, patria lui. De asemenea am fost la D-l profesor de matematici* CASTELLIONIUS [1]) *numai să-i fac cunoştinţa, dar nu era acasă, acum seara însă a fost dânsul câtva timp la mine; s'a întreţinut cu mine asupra secţiunilor conice şi a calculului, dar mărturisesc că dacă e permis să judec după prima impresie mi-am făcut o părere rea despre el, fiindcă: 1) se laudă că e mare matematician, ceea ce chiar dacă ar fi adevărat nu se cade; 2) caută scăderi şi greşeli în ştiinţa şi felul de predare al celor doi* BERNOULLI *zicând că toate le demonstrează şi rezolvă în mod analitic, şi nu ştiu să le rezolve prin demonstraţii geometrice aşa cum ar trebui, chiar şi acele probleme a căror rezolvare ar fi mai uşoară şi mai clară prin metoda sintetică decât prin cea analitică. Dar tocmai prin aceea că micşorează astfel de oameni*

1) GIOVAN FRANCESCO CASTILLON (1708—1791); dela 1751 profesor de matematici, fizică şi astronomie la Universitatea din Utrecht; la 1763 trece la Şcoala de artilerie din Berlin.

(distinşi în matematică în faţa lumii) nu-l pot considera ca om de treabă. Nu se ruşinează să spună despre ingeniosul şi filozoful de mare merit în lumea ştiinţifică DANIEL BERNOULLI, *că ştie descoperi, dar ceea ce descopere nu ştie compune şi descrie cum trebue. Eu însă nu am ascultat nici odată un om care să predea mai bine şi mai clar ca* DANIEL BERNOULLI, *şi niciodată nu am constatat în gândirea cuiva o ordonare mai bună şi mai clară decât la el. De altfel, la dreptul vorbind, în matematici ar fi greu să te aştepţi la invenţii noi dela unul care ceea ce ştie deja nu e în stare să descrie în mod ordonat şi logic, fiindcă în matematică trebue să scoţi un lucru din altul, să-l înţelegi, să-l deduci prin metodă matematică şi să-l demonstrezi. In sfârşit voiu vedea de aci înainte ce plăteşte D-l* CASTELLIONIUS *şi dacă poate fi profesorul unui* BERNOULLI *în matematică*".

Cu atât mai simpatic îi este profesorul de fizică HAHN, cu care se împrietineşte repede şi despre care în ziua de 20 August, când îi face cunoştinţa, are următoarea apreciere (pag. 81): „*D-l* HAHN *este încă tânăr, dar pare a fi foarte învăţat*". Iar la 17 Septemvrie (pag. 83): „*... la ora 10 m'am dus la fizică la D-l* HAHN. *Acolo de asemenea erau mulţi... D-l* HAHN *a început să predea deja în mod solid după compendiul de fizică al D-lui* MÜSSENBROECK". Relaţiile între TELEKI şi HAHN devin tot atât de cordiale ca şi cu cei doi BERNOULLI; astfel o lună mai târziu putem ceti (pag. 84): „*La 22 Octomvrie a venit la mine D-l profesor* HAHN *şi a adus cu sine cursurile sale scrise la fizica lui* MÜSSENBROECK, *de unde am notat ce era mai important pe hârtie albă legată în carte. Apreciez mult această prietenie a sa, fiindcă nu a procedat cu nimeni în acest fel. D-l* HAHN *ţine şi cursuri publice în fiecare Miercuri şi face şi experienţe frumoase, la cari au obiceiul să vină şi dintre profesori, şi mulţi chiar dintre orăşeni*".

La 12 Noemvrie 1762, TELEKI pleacă la Haga, unde rămâne o săptămână.

(Va urma) VICTOR MARIAN.

ASUPRA PROBLEMEI 4567

1. In această problemă se cerea să se arate că dacă a_{p-1}, a_p, a_{p+1} sunt laturile poligoanelor regulate de $p-1, p, p+1$ laturi înscrise în același cerc, avem:

(1) $$a_{p-1} < a_p + a_{p+1}.$$

D-l MIRCEA ADAM a precizat această inegalitate, arătând că avem

$$a_{p-1} < a_p + a_{p(p-1)}\ ^{1}).$$

Interesanta inegalitate a D-lui ADAM e o precizare foarte bună a inegalității (1) în acest sens că, pentru p foarte mare, $a_{p-1} - a_p$, și $a_{p(p-1)}$ sunt *asimptotic egale*, adică

$$\frac{a_{p-1} - a_p}{a_{p(p-1)}} \to 1, \text{ pentru } p \to \infty.$$

In acest articol vreau să reiau, dintr'un alt punct de vedere, inegalitățile dintre laturile poligoanelor regulate înscrise și circumscrise unui aceluiași cerc.

2. Să considerăm șirul de numere pozitive

(2) $$u_1, u_2, \ldots, u_m, \ldots$$

Acest șir se zice că este *descrescător*, sau *monoton descrescător*, dacă

$$u_1 > u_2 > \ldots > u_m > \ldots$$

Fie $\Delta u_k = u_k - u_{k+1}$. Șirul (2) este monoton descrescător dacă *diferențele* Δu_k sunt pozitive, $k = 1, 2, \ldots$

Pentru a preciza regularitatea cu care descrește șirul (2), se introduc *diferențele de ordin superior* ale termenilor șirului. Fie

$$\Delta^2 u_k = \Delta u_k - \Delta u_{k+1}, \quad \Delta^3 u_k = \Delta^2 u_k - \Delta^2 u_{k+1}, \ldots$$

diferențele de ordinul 2, 3,... ale numerelor (2). Se știe că diferența de ordinul n, $\Delta^n u_k$ se obține prin formula

$$\Delta^n u_k = u_k - \binom{n}{1} u_{k+1} + \binom{n}{2} u_{k+2} - \ldots + (-1)^n u_{k+n},$$

unde $\binom{n}{i}$ sunt coeficienții binomiali.

1) Vezi: G. M., Vol. XLIII, p. 86.

Reamintim acum următoarele definiții :

Definiția I. *Se zice că șirul* (2) *este de* n *ori monoton* (în sensul strict [1])) *dacă diferențele* $\Delta^i u_k$ *sunt pozitive pentru*

$$i = 1, 2, \ldots, n, \; k = 1, 2, \ldots$$

Definiția II. *Se zice că șirul* (2) *este total monoton* (în sensul strict) *dacă toate diferențele* $\Delta^i u_k$, $i = 1, 2, \ldots, k = 1, 2, \ldots$ *sunt pozitive.*

Evident că un șir de n ori monoton este à fortiori de $n-1$ ori monoton, iar un șir total monoton este de n ori monoton oricare ar fi n.

Fie $F(x)$ o funcție indefinit derivabilă pentru $x \geqq c$, c fiind un număr dat. Fie r un număr natural $\geqq c$. Avem atunci următoarele proprietăți :

Lema I. *Dacă* $(-1)^i F^{(i)}(x) > 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$, *pentru* $x \geqq r$, *șirul de numere pozitive*

$$F(r), F(r+1), \ldots, F(m), \ldots$$

este de n *ori monoton.*

Lema II. *Dacă* $(-1)^i F^{(i)}(x) > 0$, $i = 0, 1, \ldots,$ *pentru* $x \geqq r$, *șirul de numere pozitive*

$$F(r), F(r+1), \ldots, F(m), \ldots$$

este total monoton.

3. Să revenim la problema noastră. Fie a_m, $m = 2, 3, \ldots,$ latura poligonului regulat de m laturi înscris într'un cerc dat. Șirul

$$a_2, a_3, \ldots, a_m, \ldots$$

este monoton descrescător. Vreau să demonstrez că:

Teorema I. *Fiind dat un număr natural* n, *putem face să-i corespundă un alt număr natural* p (care depinde de n) *astfel ca șirul*

$$a_p, a_{p+1}, \ldots, a_m, \ldots$$

să fie de n *ori monoton.*

---

1) De obiceiu se zice că șirul e de n ori monoton dacă

$$\Delta^i u_k \geq 0, \; i = 1, 2, \ldots, n, \; k = 1, 2, \ldots$$

Dacă egalitatea nu e nici odată posibilă zicem că șirul e de n ori monoton în sensul strict. La fel pentru montonia totală. In lucrarea de față intervin numai șiruri de n ori monotone și total monotone în sensul strict.

Pentru demonstrare putem lua diametrul cercului egal cu 1, avem atunci

$$a_m = \sin\frac{\pi}{m}, \qquad m = 2, 3, \ldots$$

Dacă luăm funcţia $F(x) = \sin\frac{\pi}{x}$, va fi destul să arătăm că putem găsi un număr natural p_i astfel ca, pentru $x \geqq p_i$, să avem $(-1)^i F^{(i)}(x) > 0$. Luând atunci $p = \max(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ teorema I e demonstrată.

Să punem $f(x) = \sin x\pi$, deci $F(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. Avem formula

$$(3) \qquad F^{(i)}(x) = \frac{d^i f\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^i} = \frac{(-1)^i (i-1)!}{x^{2i}} \sum_{k=1}^{i} \left(\frac{i}{k}\right) \frac{x^{i-k} f^{(k)}}{(k-1)!},$$

unde $f^{(k)}$ însemnează derivata de ordinul k a lui $f\left(\frac{1}{x}\right)$ în raport cu $\frac{1}{x}$.

In cazul nostru $f^{(k)} = \pi^k \sin\left(\frac{\pi}{x} + k\frac{\pi}{2}\right)$, deci $|f^{(k)}| \leqq \pi^k$. Pentru x destul de mare semnul lui $F^{(i)}(x)$ va fi deci dat de primul termen al sumei din ultimul membru al formulei (3). Avem deci, pentru x destul de mare

$$\operatorname{sg} F^{(i)}(x) = \operatorname{sg}(-1)^i f'.$$

Dar, $f' = \pi \cos\frac{\pi}{x} > 0$ pentru $x > 2$, deci $(-1)^i F^{(i)}(x) > 0$ pentru x destul de mare. Proprietatea enunţată rezultă uşor.

4. Numărul p din teorema I depinde în general de n. Ne putem propune problema de a determina *cea mai mică valoare a lui p*, pentru un n dat, care satisface teorema I. Să notăm acum cu p_n cea mai mică valoare a lui p pentru n dat.

Avem evident $p_n \geqq 2$.

Să examinăm întâi problema pentru primele valori ale lui n,

Fie $n = 2$. E suficient să determinăm pe x astfel ca $F''(x) > 0$.

Avem $$F''(x) = \frac{\pi}{x^4}\left[2x\cos\frac{\pi}{x} - \pi\sin\frac{\pi}{x}\right]$$

şi se vede că $F''(x) > 0$ pentru $x \geqq 3$. Avem deci $p_2 \leqq 3$. Insă

$$a_2 - 2a_3 + a_4 = 1 - \sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} < 0,$$

ceea ce arată că $p_2 = 3$. Putem dar enunţa:

Consecinţa I. *Dacă* a_p, a_{p+1}, a_{p+2} *sunt laturile poligoanelor regulate de* p, $p+1$, $p+2$ *laturi înscrise într'un acelaş cerc, avem*

$$a_p - 2a_{p+1} + a_{p+2} > 0, \quad p \geqq 3.$$

Fie $n = 3$. E suficient atunci să determinăm pe x astfel ca să avem $F''(x) > 0$, $F'''(x) < 0$. Avem însă

$$F'''(x) = -\frac{\pi}{x^6}\left[(6x^2 - \pi^2)\cos\frac{\pi}{x} - 6x\pi\sin\frac{\pi}{x}\right]$$

şi se verifică uşor că $F'''(x) < 0$ pentru $x \geqq 4$. Avem prin urmare $p_3 \leqq 4$. Insă

$$(4)\quad \begin{cases} a_2 - 3a_3 + 3a_4 - a_5 = 1 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \sin\dfrac{\pi}{5} < 0 \\ a_3 - 3a_4 + 3a_5 - a_6 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3\sqrt{2}}{2} + 3\sin\dfrac{\pi}{5} - \dfrac{1}{2} > 0. \end{cases}$$

Rezultă că avem şi aici $p_3 = 3$. Putem dar enunţa:

Consecinţa II. *Dacă* a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, a_{p+3} *sunt laturile poligoanelor regulate de* p, $p+1$, $p+2$, $p+3$ *laturi înscrise într'un acelaş cerc, avem*

$$a_p - 3a_{p+1} + 3a_{p+2} - a_{p+3} > 0, \quad p \geqq 3.$$

Să mai considerăm şi cazul $n = 4$. E suficient atunci să determinăm pe x astfel ca $F''(x) > 0$, $F'''(x) < 0$, $F^{IV}(x) > 0$. Avem acum şi

$$F^{IV}(x) = \frac{\pi}{x^8}\left[12x(2x^2 - \pi^2)\cos\frac{\pi}{x} - \pi(36x^2 - \pi^2)\sin\frac{\pi}{x}\right]$$

şi se verifică uşor că $F^{IV}(x) > 0$ pentru $x \geqq 5$. Avem deci $p_4 \leqq 5$. Insă

$$(5)\quad \begin{cases} a_2 - 4a_3 + 6a_4 - 4a_5 + a_6 < 0, \\ a_3 - 4a_4 + 6a_5 - 4a_6 + a_7 < 0, \\ a_4 - 4a_5 + 6a_6 - 4a_7 + a_8 > 0, \end{cases}$$

de unde rezultă că $p_4 = 4$. Putem dar enunţa:

Consecința III. *Dacă* a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, a_{p+3}, a_{p+4} *sunt laturile poligoanelor regulate de* p, $p+1$, $p+2$, $p+3$, $p+4$ *laturi înscrise într'un acelaș cerc, avem*

$$a_p - 4a_{p+1} + 6a_{p+2} - 4a_{p+3} + a_{p+4} > 0, \quad p \geqq 4.$$

Pentru verificarea formulelor (4), (5) niște table de logaritmi cu 5 zecimale sunt suficiente.

5. In cazul general valoarea lui p_n pare a fi legată de n într'un fel mai complicat. Vom arăta că se poate obține o limită superioară pentru p_n, prin o metodă care poate fi considerată și ca o a doua demonstrație a teoremei I. Avem formula

$$F(x) = \sin\frac{\pi}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{(2k+1)!\, x^{2k+1}}$$

valabilă pentru $x \neq 0$. Grupând convenabil termenii, putem scrie

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi^{4k+1} \left[\frac{1}{(4k+1)!\, x^{4k+1}} - \frac{\pi^2}{(4k+3)!\, x^{4k+3}}\right].$$

Această serie e absolut și uniform convergentă pentru $x \geqq 2$ și e indefinit derivabilă termen cu termen. Avem, derivând de i ori termen cu termen,

$$F^{(i)}(x) = (-1)^i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k+i)!\, \pi^{4k+1}}{(4k)!(4k+1)!\, x^{k+i+3}} \left[x^2 - \frac{(4k+i+1)(4k+i+2)\pi^2}{(4k+1)(4k+2)^2(4k+3)}\right].$$

Pentru ca $(-1)^i F^{(i)}(x) > 0$ e suficient să avem

$$(6) \qquad x^2 - \frac{(4k+i+1)(4k+i+2)\pi^2}{(4k+1)(4k+2)^2(4k+3)} \geqq 0, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Aceste inegalități sunt satisfăcute dacă

$$x^2 - \frac{(i+1)(i+2)}{12}\pi^2 \geqq 0,$$

căci raportul $\dfrac{(4k+i+1)(4k+i+2)}{(4k+1)(4k+2)^2(4k+3)}$ descrește când k crește.

Inegalitățile (6) sunt deci sigur satisfăcute dacă $x \geqq \pi\sqrt{\dfrac{(i+1)(i+2)}{12}}$. Observând că aici membrul al doilea crește când i crește, avem următoarea limitație superioară a lui p_n,

$$(7) \qquad p_n \geqq \left[\pi\sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{12}}\right] + 1$$

însemnând cu $[\alpha]$ cel mai mare întreg cuprins în α.

Putem deduce limitări mai simple pentru p_n. Observând că $\pi^2 < 10$, deducem uşor că $\pi \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{12}} < n+1$, pentru $n \geqq 4$. Rezultatele dela Nr. 4 ne arată că avem $p_n \leqq n+1$ oricare ar fi $n \geqq 2$. Avem deci:

Consecinţa IV. *Dacă* $a_p, a_{p+1}, \ldots, a_{p+n}$ *sunt laturile poligoanelor regulate de* $p, p+1, \ldots, p+n$, *laturi înscrise într'un acelaşi cerc, avem*

$$a_p - \binom{n}{1} a_{p+1} + \binom{n}{2} a_{p+2} - \ldots + (-1)^n a_{p+n} > 0, \quad p \geqq n+1.$$

Am demonstrat mai sus că relaţia $p_n \leqq n$ e adevărată pentru $n = 3, 4$. Formula (7) ne arată că această inegalitate e adevărată pentru $n \geqq 15$. E foarte probabil că inegalitatea $p_n \leqq n$ e adevărată pentru orice $n \geqq 3$. Pentru aceasta ar mai trebui verificată pentru $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$. Nu trebue să se creadă că avem $p_n = n$ pentru orice n căci pentru $n \geqq 26$ cu siguranţă $p_n \leqq n-1$. De altfel, oricare ar fi numărul natural α, pentru n destul de mare avem $p_n \leqq n - \alpha$.

6. Să examinăm acum aceeaşi problemă pentru laturile poligoanelor regulate circumscrise aceluiaşi cerc. Vom vedea că rezultatele sunt mult mai simple şi elegante în acest caz.

Fie b_m, $m = 3, 4, \ldots$ latura poligonului regulat de m laturi circumscris unui cerc dat. Avem atunci

Teorema II. Şirul

$$b_3, b_4, \ldots, b_m, \ldots$$

este total monoton. Cu alte cuvinte, dacă $b_p, b_{p+1}, \ldots, b_{p+n}$ *sunt laturile poligoanelor regulate de* $p, p+1, \ldots, p+n$ *laturi circumscrise unui aceluiaşi cerc, avem*

$$b_p - \binom{n}{1} b_{p+1} + \binom{n}{2} b_{p+2} - \ldots + (-1)^n b_{p+2} > 0$$

oricare ar fi $p \geqq 3$ *şi* $n \geqq 1$.

Pentru demonstrare putem presupune că diametrul cercului este egal cu 1, avem atunci

$$b_m = \operatorname{tg} \frac{\pi}{m}, \quad m = 3, 4, \ldots$$

Punem $F(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(x) = \operatorname{tg} x\pi$ şi aplicăm formula (3). Vedem că în cazul acesta

$$f'(x) = \pi\,[1 + f^2(x)]$$

şi formula de recurenţă

$$f^{(k)}(x) = \pi \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-1}{r} f^{(r)}(x)\, f^{(k-r-1)}(x)$$

ne arată că toate derivatele $f^{(k)}(x)$ sunt pozitive pentru $x \geqq 3$. Rezultă că $(-1)^i F^{(i)}(x) > 0$ pentru $i = 0, 1, \ldots$ şi teorema rezultă din lema II.

TIBERIU POPOVICIU.

RAPORTUL COMISIUNEI
PENTRU ACORDAREA PREMIULUI „NICOLAE G. BOTEA"

Pentru acordarea premiului „NICOLAE G. BOTEA" celei mai bune lucrări (articol, notă, problemă rezolvată) de geometria triunghiului sau a tetraedrului, dintre cele publicate în volumul XLIV, al *Gazetei Matematice* şi având autorul elev de liceu, Şcoală Militară, Politechnică sau student de Facultate din ţară, propunem pe D-l VICTOR L. FLORESCU, absolvent al Liceului Militar „Nicolae Filipescu", pentru articolul „*Asupra punctelor lui* FEUERBACH".

In acest articol, D-l V. L. FLORESCU cercetează elementar şi direct condiţiile ce trebuesc îndeplinite de un triunghiu pentruca unul din cele patru puncte ale lui FEUERBACH să fie situat pe o bisectoare.

Parţial, pentru punctul φ, această problemă a fost pusă de D-l V. THÉBAULT şi soluţionată în *Gazeta Matematică*, Vol. XL, pag. 278, utilizându-se coordonatele normale ale punctului φ; reciproc, în articolul „Asupra unui triunghiu special", D-l I. I. ŢIŢEICA considerând un triunghiu cu un unghiu $A = 60^0$ printre alte proprietăţi, găseşte situarea punctului φ al lui FEUERBACH pe bisectoarea vârfului A.

Deci contribuţia originală a D-lui V. L. FLORESCU o formează mai întâiu extinderea problemei D-lui V. THÉBAULT la toate punctele lui FEUERBACH, de altă parte, tratarea elementară a problemei, elemente pe care le socotim suficiente pentru a justifica premierea D-lui VICTOR L. FLORESCU.

Se acordă ca premii:

R. GARNIER: Léçons d'Algèbre et de Géométrie, Vol. I şi II;

E. LAINÉ: Précis d'Analyse Mathématique, Vol. I.

COMISIUNEA PENTRU ACORDAREA PREMIULUI „NICOLAE G. BOTEA"

E. G. BOTEA, C. IONESCU-BUJOR, Ing. D. STOICA

Acest raport s'a citit şi s'a aprobat în Adunarea Generală din 31/VIII/1939.

PROGRAMA ANALITICĂ

HOTĂRÎTĂ PENTRU CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE" DIN ANUL 1940

Clasa IV-a. Toată materia prevăzută de programa analitică.

Clasa V-a. Grupa I. **Algebra.** Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus:

1. La împărţirea cu $(x+a)$ se va face rezolvarea ecuaţiilor cu rădăcini întregi şi fracţionare.

2. La radicale se va face raţionalizarea numitorilor care conţin radicale patrate şi de indici superiori.

3. La sistemele de ecuaţii de gradul I se vor cere metode particulare de rezolvare şi sisteme reductibile la gradul I.

4. La discuţia semnului trinomului se va face generalizare în legătură cu punctul I.

5. Transformarea expresiunilor de forma: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.

6. Progresiuni aritmetice şi geometrice.

Grupa II-a. **Geometria plană.** Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus:

1. Fascicole de drepte paralele şi de drepte concurente (teoreme directe şi reciproce).

2. Omotetia (La cercuri: centre de asemănare directe şi inverse).

3. Teorema lui MENELAUS şi CEVA şi reciprocele lor.

4. Teoremele lui PTOLOMEU pentru patrulaterele inscriptibile. Teorema lui MIQUEL. Patrulater circumscris unui cerc. Cercuri ortogonale. Cercul celor nouă puncte.

5. Puterea unui punct faţă de un cerc. Ax şi centru radical.

6. Raportul ariilor a două polinoame asemenea.

7. Reciproca teormei lui PITAGORA. Relaţia metrică a lui STEWART. Aplicaţie la mediane, etc.

8. Poligoane regulate circumscrise.

Clasa VI-a. Grupa I. **Geometria în spaţiu.** Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus:

1. Unghiuri diedre. Măsura lor. Unghiuri triedre şi poliedre, proprietăţile lor.

2. Aria şi volumul trunchiului de piramidă. Extindere la con.

3. Volumul produs de un sector poligonal plan care se roteşte în jurul unei axe. Volumul zonei, calotei, sferei.

Grupa II-a. **Trigonometria.** Toată materia prevăzută în progresie analitică până la „Aplicaţiile trigonometriei la agrimensură şi statică". In plus:

1. Aria unui triunghiu în raport cu elementele date.

2. Raza cercului circumscris în funcţiune de laturile triunghiului. Razele cercurilor înscrise şi exînscrise triunghiului. Relaţiuni.

3. Identităţi trigonometrice.

4. Cazuri particulare de rezolvare la triunghiuri dreptunghice şi oarecare.

5. Determinarea distanţelor între puncte inaccesibile.

6. Problema hărţii.

Clasa VII-a. Grupa I. **Algebra.** Toată materia prevăzută de programa analitică, fără „Aplicaţii la cinematică", la care se adaugă: Serii, criterii de convergenţă, seria lui *e*, definiţia logaritimilor neperieni.

Grupa II-a. **Geometria descriptivă.** Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus:

1. Diviziuni armonice, fascicole armonice. Pol şi polară în raport cu un unghiu şi în raport cu un cerc.

Teoremele lui PASCAL şi BRIANCHON. Patrulatere complete.

2. Transformări: inversiune, polare reciproce.

Clasa VIII-a. Grupa I. **Algebra.** Materia prevăzută de programa analitică.

Grupa II-a. **Geometria analitică.** Materia prevăzută de programa analitică. In plus:

1. Schimbarea de axe.
2. Pol şi polară.
3. Clasificarea conicelor.

Grupa III-a. **Mecanica.** Materia prevăzută de programa analitică. In plus Cinematica.

*

Orice candidat trebue să cunoască materia respectivă a clasei precedente cu adăugirile prevăzute în prezenta programă.

* * *

Anul I al Şcolii Politechnice din Bucureşti.

Candidaţii vor fi examinaţi din materia predată până la vacanţa Paştelui la două din materiile: Algebra, Analiza matematică, Geometria analitică şi Mecanica.

NOTE MATEMATICE

16. *Acum o sută de ani în lumea matematică.* (Date culese în Biblioteca Seminarului Matematic din Iaşi din publicaţiile timpului).

In anul 1839 patrimoniul ştiinţelor matematice s'a îmbogăţit cu un şir de lucrări fundamentale datorite lui GUSTAV PETRU LEJEUNE DIRICHLET, celebru matematician german care, din vremea adolescenţei, „îşi recitea cărţile de matematici, — cumpărate de el din banii de buzunar ce şi-i primea, — până ce înţelegea pe deplin conţinutul lor". Era la acea epocă în vârstă de 34 ani, de opt ani profesor la Universitatea din Berlin şi membru al Academiei din Prusia.

Aceste lucrări au apărut într'o succesiune de memorii întitulate: „*Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres*" în *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (CRELLE'S J.) v. 19 (1839), pp. 324—369, v. 21 (1840), pp. 1—12 şi 134—155 şi tratează despre serii de forma

$$(1) \qquad f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a e^{-\lambda_n s},$$

unde (λ_n) e un şir de numere reale crescătoare având ca punct limită $+\infty$ şi $s = \sigma + it$ e o variabilă complexă cu partea reală σ şi partea imaginară t. Astfel de serii se chiamă astăzi, în amintirea descoperitorului lor, serii lui DIRICHLET de *tipul* λ_n. Dacă $\lambda_n = n$, $f(s)$ e o serie de puteri în e^{-s}. Dacă $\lambda_n = \log n$, atunci $f(s) = \Sigma a_n n^{-s}$ e o serie DIRICHLET *ordinară*. Un caz particular al acestor serii îl constituie celebra funcţie $\zeta(s)$ a lui RIEMANN, ce intervine în problema determinării numărului numerelor prime inferioare unui număr dat.

Introduse de DIRICHLET în vederea aplicaţiilor la teoria numerelor, DIRICHLET ca şi, mai târziu, DEDECKIND, a considerat numai valori reale ale rariabilei s. Primele teoreme pentru s complex se datoresc lui JENSEN (1884), care determină domeniul de convergenţă a seriei generale (1). O primă schiţare sistematică a teoriei funcţiunilor $f(s)$ era făcută de CHAEN (1894).

Astăzi, pe lângă aplicaţiile fundamentale ale acestor serii în teoria numerelor, multe din proprietăţile lor au servit ca punct de plecare la studiul într'un continuu al funcţiunilor analoage funcţiunilor $f(s)$, numite *transformatele lui* LAPLACE a căror teorie e cristalizată în frumoasa monografie a D-lui G. DOETSCH: „*Theorie und Anwendung der* LAPLACE *Transformation*", Berlin, Springer, 1937.

In acelaşi an DIRICHLET publică şi o altă serie de lucrări asupra unei metode nouă pentru calculul integralelor multiple, bazată pe introducerea a ceea ce se numeşte un factor discontinuu, aplicând-o, între altele, la problema atracţiei a doi elipsoizi omogeni (v., de ex., „*Sur une nouvelle méthode pour la détermination des intégrales multiples*", *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, v. VIII (1839), pp. 156—160).

Cităm din prefaţa primului memoriu citat mai sus asupra seriilor lui DIRICHLET:

„Propunându-mi acum doi ani, să demonstrez riguros că orice progresie aritmetică infinită a cărei termeni nu admit cu toţii unul şi acelaşi divizor comun, conţine o infinitate de numere prime, am fost condus să scot la iveală un mare număr de chestiuni relative la teoria numerelor, prezentându-le sub un punct de vedere cu totul nou, care le leagă de diferite principii din analiză infinitezimală şi de proprietăţi remarcabile ale unei clase de serii

şi de produse infinite... Intr'o notă din vol. al 18-lea al revistei D-lui CRELLE (p. 259), am indicat mai multe chestiuni la care s'ar putea aplica această analiză. Imi propun acum să expun, într'un şir de memorii, cu toate desvoltările necesare, cercetările mele asupra acestei materii... Indrăznesc să nădăjduiesc că, independent de noile rezultate aici coprinse, lucrarea mea va putea contribui la progresul ştiinţei şi pe altă cale. E calea stabilirii unei apropieri pe baze nouă între elementele multor teorii frumoase şi importante, care au fost accesibile până azi numai unui număr restrâns de geometri capabili de a nu pierde firul ideilor într'un lung şir de calcule şi de raţionamente foarte complicate... „(Aici DIRICHLET face aluzie la opera lui GAUSS „*Disquisitiones arithmeticae*“, al cărei conţinut, el unul dintre primii, l-a pătruns şi l-a înţeles)“.

D. M.
(Seminarul Matematic, Iaşi).

17. *Raporturile trigonometrice.* Pentru *calculele trigonometrice* sunt necesare unele *funcţiuni trigonometrice: sin, cos, tg, cotg,* şi altele mai puţin întrebuinţate; unele chiar s'au învechit şi au dispărut; funcţiunile *sec* şi *cosec* au cam eşit din matematicile pure rămânând numai în matematicile aplicate.

Cum noţiunea de *funcţiune* se capătă mai greu, mai încet şi mai târziu, funcţiunile trigonometrice se studiază la început după liniile lor reprezentative în *cercul trigonometric* cu raza 1, zicându-li-se *linii trigonometrice,* numire cu totul improprie şi care fac pe începători să piarză noţiunea exactă a funcţiunilor trigonometrice, şi faptul că ele sunt *numere,* iar nu *linii.*

In *Regulamentul pentru facerea şi executarea hotărniciilor* din 28 Februarie 1868 modificat în 10 Iunie 1897 s'a alăturat *Programele* examenului cerut candidaţilor la *Ingineria hotarnică* (Broşura Ministerului Justiţiei din 1922) unde în loc de *linii* sau *funcţiuni* trigonometrice găsim o denumire mai raţională de „*raporturi trigonometrice*“. Atrag atenţiunea matematicienilor şi profesorilor de trigonometrie asupra acestei denumiri exacte, care ar putea înlocui denumirea *funcţiunii* pentru începătorii învăţământului trigonometric.

I. IONESCU.

18. *Soluțiile problemei 4579.* Enunțul cere ca cu cifrele 1, 2, 3,... 9, luate câte o singură dată, să se formeze numere de câte 3 cifre în progresie aritmetică.

D-l Prof. M. GHERMĂNESCU observă în nota dela pag. 81, Vol. XLII, că în soluția ce am dat acestei probleme la pag. 639, Vol. XLI, am omis examinarea unor cazuri și deci unele soluțiuni. D-l Prof. M. GHERMĂNESCU termină nota cu recomandația de a se da soluția complectă a problemei. D-l A. CĂLINESCU, în nota dela pag. 300, Vol. XLII, dă un nou șir de soluții fără a le da pe toate.

Examinând toate cele 9 cazuri puse de D-l Prof. M. GHERMĂNESCU am găsit, pe lângă soluțiile dela pag. 639, Vol. XLI, și dela pag. 300, Vol. XLII, încă următoarele 260 soluțiuni, scrise în ordinea crescândă a primului termen:

÷ 123.495.867 ,	÷ 175.432.689 ,	÷ 215.489.763 ,	÷ 251.369.487
÷ 125.387.649 ,	÷ 176.534.892 ,	÷ 217.453.689 ,	÷ 253.471.689
÷ 127.495.863 ,	÷ 178.435.692 ,	÷ 217.543.869 ,	÷ 253.486.719
÷ 129.387.645 ,	÷ 179.432.685 ,	÷ 218.396.574 ,	÷ 257.369.481
÷ 132.459.786 ,	÷ 182.459.736 ,	÷ 218.576.934 ,	÷ 257.438.619
÷ 135.462.789 ,	÷ 185.327.469 ,	÷ 219.453.687 ,	÷ 259.471.683
÷ 136.297.458 ,	÷ 185.432.679 ,	÷ 219.486.753 ,	÷ 259.486.713
÷ 136.459.782 ,	÷ 185.462.739 ,	÷ 219.543.867 ,	÷ 261.378.495
÷ 138,297.456 ,	÷ 186.459.732 ,	÷ 231.459.687 ,	÷ 261.498.735
÷ 139.462.785 ,	÷ 187.423.659 ,	÷ 231.498.765 ,	÷ 261.549.837
÷ 145 387.629 ,	÷ 189.327.465 ,	÷ 231.549.867 ,	÷ 263.489.715
÷ 146.372.598 ,	÷ 189.423.657 ,	÷ 234.516.798 ,	÷ 264.531.798
÷ 148.372.596 ,	÷ 189.432.675 ,	÷ 234.576.918 ,	÷ 265.378.491
÷ 149.387.625 ,	÷ 189.462.735 ,	÷ 235.498.761 ,	÷ 265.381.497
÷ 156.297.438 ,	÷ 192.378.564 ,	÷ 236.417.598 ,	÷ 265.489.713
÷ 156.327.498 ,	÷ 192.435.678 ,	÷ 237.459.681 ,	÷ 265.498.731
÷ 157.423.689 ,	÷ 192.534.876 ,	÷ 237.549.861 ,	÷ 267.381.495
÷ 158.297.436 ,	÷ 194.378.562 ,	÷ 238.417.596 ,	÷ 267.543.819
÷ 158.327.496 ,	÷ 196.327.458 ,	÷ 238.516.794 ,	÷ 267.549.831
÷ 159.423.687 ,	÷ 196.372.548 ,	÷ 238.576.914 ,	÷ 268.531.794
÷ 162.378.594 ,	÷ 196.534.872 ,	÷ 241.567.893 ,	÷ 269.543.817
÷ 163.495.827 ,	÷ 198.327.456 ,	÷ 243.516.789 ,	÷ 273.561.849
÷ 164.378.592 ,	÷ 198.372.546 ,	÷ 243.561.879 ,	÷ 274.396.518
÷ 165.327.489 ,	÷ 198.435.672 ,	÷ 243.567.891 ,	÷ 278.396.514
÷ 167.495.823 ,	÷ 213.486.759 ,	÷ 243.615.987 ,	÷ 279.561.843
÷ 169.327.485 ,	÷ 213.489.765 ,	÷ 247.615.983 ,	÷ 281.369.457
÷ 172.435.698 ,	÷ 214.396.578 ,	÷ 249.516.783 ,	÷ 281.459.637
÷ 172.534.896 ,	÷ 214.576.938 ,	÷ 249.561.873 ,	÷ 283.516.749

÷ 283.615.947 , ÷ 327.594.861 , ÷ 421.657.893 , ÷ 514.738.962
÷ 287.369.451 , ÷ 328.561.794 , ÷ 423.651.879 , ÷ 516.732.948
÷ 287.453.619 , ÷ 328.651.974 , ÷ 423.657.891 , ÷ 518.732.946
÷ 287.459.631 , ÷ 342.579.816 , ÷ 425.681.937 , ÷ 532.714.896
÷ 287.615.943 , ÷ 345.612.879 , ÷ 427.639.851 , ÷ 536.714.892
÷ 289.453.617 , ÷ 345.621.897 , ÷ 427.681.935 , ÷ 546.732.918
÷ 289.471.653 , ÷ 346.579.812 , ÷ 429.651.873 , ÷ 548.732.916
÷ 289.516.743 , ÷ 347.621.895 , ÷ 432.615.798 , ÷ 562.738.914
÷ 291.378.465 , ÷ 349.612.875 , ÷ 432.675.918 , ÷ 564.738.912
÷ 291.567.843 , ÷ 351.489.627 , ÷ 435.612.789 , ÷ 572.693.814
÷ 293.567.841 , ÷ 357.489.621 , ÷ 435.681.927 , ÷ 574.693.812
÷ 294.516.738 , ÷ 357.624.891 , ÷ 437.681.925 , ÷ 592.714.836
÷ 294.531.768 , ÷ 361.594.827 , ÷ 438.615.792 , ÷ 596.714.832
÷ 295.378.461 , ÷ 367.594.821 , ÷ 438.675.912 , ÷ 612.783.954
÷ 295.381.467 , ÷ 371.498.625 , ÷ 439.612.785 , ÷ 613.729.845
÷ 296.417.538 , ÷ 371.648.925 , ÷ 451.639.827 , ÷ 614.783.952
÷ 297.381.465 , ÷ 372.495.618 , ÷ 453.621.789 , ÷ 615.729.843
÷ 298.417.536 , ÷ 372.594.816 , ÷ 457.639.821 , ÷ 615.732.849
÷ 298.516.734 , ÷ 374.651.928 , ÷ 459.621.783 , ÷ 619.732.845
÷ 298.531.764 , ÷ 375.498.621 , ÷ 461.723.985 , ÷ 621.783.945
÷ 312.495.678 , ÷ 375.612.849 , ÷ 465.723.981 , ÷ 623.741.859
÷ 312.549.786 , ÷ 375.648.921 , ÷ 473.651.829 , ÷ 625.783.941
÷ 312.579.846 , ÷ 376.594.812 , ÷ 479.651.823 , ÷ 629.741.853
÷ 312.594.876 , ÷ 378.495.612 , ÷ 481.723.965 , ÷ 641.783.925
÷ 316.549.782 , ÷ 378.651.924 , ÷ 483.621.759 , ÷ 643.729.815
÷ 316.579.842 , ÷ 379.612.845 , ÷ 485.612.739 , ÷ 645.729.813
÷ 316.594.872 , ÷ 382.549.716 , ÷ 485.723.961 , ÷ 645.732.819
÷ 318.495.672 , ÷ 386.549.712 , ÷ 489.612.735 , ÷ 645.783.921
÷ 321.489.657 , ÷ 391.624.857 , ÷ 489.621.753 , ÷ 649.732.815
÷ 321.498.675 , ÷ 394.561.728 , ÷ 491.657.823 , ÷ 652.783.914
÷ 321.594.867 , ÷ 395.621.847 , ÷ 492.615.738 , ÷ 652.813.974
÷ 321.648.975 , ÷ 397.621.845 , ÷ 493.657.821 , ÷ 653.741.829
÷ 324.561.798 , ÷ 397.624.851 , ÷ 498.615.732 , ÷ 654.783.912
÷ 324.651.978 . ÷ 398.561.724 , ÷ 512.738.964 , ÷ 654.813.972
÷ 325.498.671 , ÷ 412.675.938 , ÷ 512.693.874 , ÷ 659.741.823
÷ 325.648.971 , ÷ 418.675.932 , ÷ 512.738.964 , ÷ 672.813.954
÷ 327.489.651 , ÷ 421.639.857 , ÷ 514.693.872 , ÷ 674.813.952

Adunând numărul acestor soluţiuni la acelea găsite la paginile citate la început se găseşte că problema 4579 are 760 soluţiuni dintre care 380 progresiuni crescătoare şi 380 descrescătoare, acestea din urmă având aceeaşi termeni cu primele 380, însă în ordine inversă.

G-L GH. BUICLIU.

BIBLIOGRAFIE

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tom. CXXVIII. Fascicola III. Septemvrie 1939. Buenos-Aires. Asupra funcţiunilor olomorfe şi poligene de o variabilă complexă binară de PEDRO F. CAPELLI.

Buletinul „I. R. E.". Anul VII. Nr. 3. Septemvrie 1939. Bucureşti. Funcţiuni periodice şi aplicaţiile lor în fizică de E. ABASON.

Boletin Matematico, publicat de B. I. BAIDAFF. Anul XII. Nr. 15. Octomvrie 1939. Buenos-Aires.

Journal de Mathématiques élémentaires, publicat de H. VUIBERT. Anul 64. Nr. 4. 15 Noemvrie 1939. Paris.

Idem. Anul 64. Nr. 5. 1 Decemvrie 1939. Paris.

Idem. Anul 64. Nr. 6. 15 Decemvrie 1939. Paris.

Mathesis, publicată de AD. MINEUR. Tome LIII. Nr. 7—8. Iulie—Octomvrie 1939. Bruxelles. Descompunerea unei omografii plane într'un produs de două involuţii de R. DEAUX. Extensiunea unei observări a D-lui GOURRAT asupra desfăşurării în serie întreagă a integralei unei ecuaţiuni diferenţiale de D-ra J. MORANT. Extensiuneă unei teoreme PICARD relativă la sisteme de ecuaţii diferenţiale, asupra sistemelor complet integrabile de ecuaţii cu diferenţiale totale de R. J. GERMAY. Triplete de puncte cu acelaş baricentru de J. LEEMANS. Asupra omografiilor permutabile de R. DEAUX. Asupra unei metode de rezolvare a ecuaţiilor diofantiene omogene de gradul al treilea de A. GLODEN. Asupra triunghiurilor PONCELET de R. GOORMAGHTIGH. Asupra numerelor curioase de V. THÉBAULT.

Pitagora. Revistă de matematici. Anul V. Nr. 3. 10 Decemvrie 1939. Bucureşti. Incadrarea geometriei proiective plane în geometria de contact a ciclelor de D. BARBILIAN. O problemă de înscriere de O. N. ŢINO. Asupra unor curbe de G. G. CONSTANTINESCU. Asupra polinomului lui ABEL de M. BOTEZ. Asupra unei proprietăţi la conice de R. GEORGESCU. Note. Probleme rezolvate şi propuse.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XIX. Nr. 10. Decemvrie 1939. Asupra lanţurilor multigrade de A. GLODEN.

România aeriană. Anul XIII. Nr. 11. Noemvrie 1939. Bucureşti.

Suplimentul Gazetei Matematice. Anul VI. Nr. 4. Ian. 1940. Exerciţii rezolvate şi propuse.

V. ALACI. *Trigonometrie patratică.* Tabele conţinând logaritmii sinusului şi cosinusului patratic al arcelor cuprinse între 0° şi 90°, din minut în minut, cu cinci zecimale.

TH. ANGHELUTZA. *Sur une limite des modules des zéros des polynomes.* (Extras du Bulletin de la Section Scientifique, Académie Roumaine, 1939).

C. BUDEANU. *Quelques confirmations expérimentales de la théorie des phénomènes déformants.* Academia română. Memoriile secţiunei ştiinţifice. Seria III. Tomul XIV. Mem. 13. 1939.

ŞTEFAN G. BALAN. *Culegere de probleme de Mecanică, Cinematică-Dinamică. Seminar de Mecanică Raţională la Şcoala Politechnică din Bucureşti «Regele Carol II», la D-nii Profesori* A. G. IOACHIMESCU *şi* CR. MATEESCU. Bucureşti, 1939.

Domnul Inginer ŞTEFAN G. BĂLAN prezintă un volum de 422 pagini conţinând 900 probleme de Cinematică şi Dinamică, însoţite de figuri explicative, de indicaţiuni şi rezultate. Urmărind cursul de Mecanică Raţională al D-lui Profesor A. GH. IOACHIMESCU, autorul distribue aceste probleme în următoarele capitole: Bibliografie; Mişcări rectilinii şi curbilinii; Mişcarea de translaţie, de rotaţie, şurub, plană; Mişcarea relativă; Compuneri de mişcări; Postulate, Unităţi; Câmpuri de forţe. Atracţiuni; Lucru. Putere; Energie; Momente de inerţie; Strămutări virtuale; Principiul lui d'Alembert; Ecuaţiile generale ale Dinamicii; Mişcarea punctului materiál fără legături; Mişcarea punctului material cu legături; Mişcarea relativă a corpurilor; Mişcarea sistemelor; Mişcarea unui corp solid; Ecuaţiile lui LAGRANGE; Mişcări oscilatorii; Ciocniri; Fire, Resoarte, Experienţe.

Lucrarea D-lui Inginer ŞTEFAN G. BĂLAN îndeplineşte cu prisosinţă toate calităţile cerute de o bună culegere de probleme: alegere judicioasă a problemelor, expunere metodică şi clară a enunţurilor, sobrietate şi sugestivitate în indicaţiuni şi rezultate.

Pusă la îndemâna elevilor Şcolilor Politechnice, această lucrare va contribui la ridicarea nivelului viitorilor technicieni ai ţării.

In concluzie, o recomandăm cu toată căldura tuturor celor pe care îi interesează Mecanica.

ALEXANDRU STOENESCU.

Dr.-Ing. MIRCEA N. IORGA. *Tratat de Desemn Geometric. Partea I. Noţiuni de Geometrie plană. Bucureşti, 1938.*

Sunt cuprinse în 286 pag. definiţii şi proprietăţi imediate, enunţate, dar nedemonstrate, ale figurilor plane: drepte, unghiuri, triunghiuri, patrulatere, cercuri, urmate de asemănări. Cadrul figurilor programului liceului teoretic este depăşit prin capitolele asupra: cicloidelor, spiralelor, arcelor de boltă, ciubucelor, ornamentelor, metodei SIMPSON pentru aflarea ariilor.

Astfel cum se prezintă, volumul are caracterul de introducere în Desemnul Geometric şi îl socotim foarte potrivit liceelor industriale.

Semnalăm însă folosirea unor numiri care contrazic Statica vocabularului nostru matematic: circumferenţă pentru cerc, curbă interplană în loc de curbă strâmbă, radiant în loc de radian, circumferenţe tangente din afară pentru cercuri tangente exterioare şi alăturate prin înconjurare în loc de interioare.

C. IONESCU-BUJOR.

CERERI

289. Care este autorul unei aritmetici românești scrise cu litere cirilice pe pagini 140×85 (partea tipărită) care la pag. 3 are scris numărul:

6, 567, 891, 214, 324, 560, 780, 900, 345,

iar la pag. 117 începe cu capitolul *«pentru patraturi şi scoaterea rădăcinii»*. Un exemplar donat de D-l S. MARCOVICI are numai paginile 3—136.

I. I.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

EMILE BOREL. Leçons sur la théorie de la croissance. Paris, 1910.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

C. ALASIA. Esercitazioni di geometria. Palermo, 1908.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

A. Z. Elemente de Aritmetica Teoretica şi Practică cu numeróse exemple şi desluşiri asupra regulelor şi operaţiilor numerice. Bucuresci, 1863.

COSTANDINU ŞERBESCU-LU. Tratatu de Algebra Elementara elaborata pentru usu-lu scole-loru secundare şi a-lu aspiranti-loru lá bacalaureatu. Bucuresci, 1876.

CHRISTIAN WOLFF. Compendium Elementorum Matheseos Universae in usum studiose juventatis adorinatum. Halle, 1710. (Numai dela pag. 163 înainte).

P. POGORELSCY. Curs de Matematică pură, după însărcinarea lui BELLAVEN de către profesori de matematici ALLEZON, BILLI, PUISSAN şi BUDRO din limba franceză cu multe modificări şi adăogiri tradusă de . . . Moscova, 1837 (în limba rusă).

H. E. TOMBECK. Traité de Géométrie élémentaire à l'usage des élèves de lycées et des candidats au baccalauréat ès-sciences et aux écoles du Gouvernements avec de nombreux exercices. Paris, 1873.

G. RITT. Problèmes d'Algèbre et Exercices de Calcul algébrique avec les solutions. Paris, 1879.
Aceste cărţi au fost cumpărate de Societatea *«Gazeta Matematică»*.

CH. DELAUNAY. Cours élémentaire de Mécanique théorique et appliquée. Paris, 1867.

M. STURM. Cours de Mécanique. Tom. I. Tom. II. Paris, 1861.

H. GARCET. Élements de Mécanique. Ed. II. Paris 1861.

CH. DELAUNAY. Cours élémentaire d'Astronomie. Ed. V. Paris, 1870.

CH. BRISSE. Cours de Géométrie descriptive. Vol. I şi II. Paris, 1891.

E. DESSENON. Eléments de Géométrie analytique. Ed. II. Paris, 1894.

F. BRÜNNOW. Traité d'Astronomie sphérique, Vol. I, 1869 et Traité d'Astronomie pratique, Vol. II, édition française publiée par C. ANDRÉ. Paris, 1872.
Donate de D-l N. GHERASI.

LEFÉBURE DE FOURCY. Traité de Géométrie descriptive. Tome I. Texte. Paris, 1881.

O. FORT & O. SCHLÖMILCH. Lehrbuch der Analytischen Geometrie. Erster Theil. Leipzig, 1872.

ERNST PRIX. Elemente der Darstellenden Geometrie. Erster und zweiter Theil. Leipzig, 1883.

OTTO STOLZ. Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik erster und zweiter Theil. 1886. Leipzig.
Donate de D-l G-ral C. FELIX.

M. CHASLES. Aperçu historique sur l'origine et les développement des méthodes en géométrie particulièrement de celle qui se rapportent à la géométrie moderne. Partea I (incomplect). Paris, 1889.

FRIDERICUS HULTSCH. Mitrologicorum scriptorum reliquiae. Volumen I Quo scriptores graeci continentur (1864). Volumen II quo scriptores romani et indices continentur (1866). Lipsiae.

C. A. BJERKNES NIELS-HENRIK ABEL. Tableau de sa vie et de son action scientifique. Traduction française. Revue est considérablement augmentée par l'auteur. Orné d'un portrait d'Abel. Paris, 1885.

. . . Manual de aritmetică (în ruseşte, lipseşte prima pagină cu titlu şi data cărţii).

J. L. HEILBERG. Litterargeschichtliche Studien über EUKLID. Leipzig, 1882.

H. G. ZEUTHEN. Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. Vorlesungen. Kopenhagen, 1896.

MORITZ CANTOR. Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Achtzehntes Heft. Leipzig, 1904.

HEINRICH WIELEITNER. Geschichte der Mathematik. II. Teil. 1. Hälfte, Arithmetik, Algebra, Analysis. Leipzig, 1911.

KARL WERNER. *Gerbert von Aurillac*, die Kirche und Wissenschaft seiner Zeit. Wien, 1881.

KARL WERNER. Beda der Ehrwürdige und seine Zeit. Wien, 1881.
Donate de D-l S. MARCOVICI.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 766. *Pe un biliard circular se află o bilă, care se lansează în toate modurile posibile, astfel ca să revină la punctul de plecare, după ce a atins de un număr de ori, marginea biliardului. In fiecare din drumurile ce parcurge bila, există puncte prin care ea trece de două ori. Să se calculeze numărul acelor puncte şi să se fixeze poziţia lor.*

A. M. TĂNĂSESCU.

Fie P punctul din care se lansează bila. Notăm pe fig. 1 cu: A_1, A_2, ... A_n primul, al doilea... şi ultimul punct în care bila atinge biliardul înainte de a reveni în P. Fie încă B a doua extremitate a corzei A_1P, TT′ tangenta în A_1 la margina circulară a biliardului, O centrul cercului A_1, A_2, ... A_n.

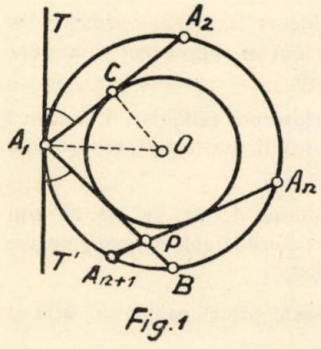


Fig. 1

Observăm dela început că A_n ar putea fi şi în B, în care caz bila ar reveni în P pe drumul BP.

Presupunem că bila, suprafaţa şi marginea biliardului ar fi aşa construite încât bila în mişcarea ei să urmeze legile reflexiunei şi că după ce bila revine prima oară în P, se opreşte. Altfel ar fi să se numere din nou punctele duble şi încă fără nici o precizie pentru că nu se spune în enunţ când s'ar opri bila dacă şi-ar continua drumul după ce ar reveni în P.

Cu aceste elemente se poate trece la examenul chestiunilor puse în enunţ.

Conform legilor reflexiei

$$\sphericalangle PA_1T' = \sphericalangle TA_1A_2 = \theta$$

deci $A_1A_2 = BA_1$. La fel $A_2A_3 = A_1A_2$ şi deci în general

$$BA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots$$

Prin urmare drumul parcurs de bilă este format de laturile egale ale unui poligon înscris în cercul $A_1A_2 \dots A_n$ şi circumscris cercului de rază

$$OC = R\cos\theta$$

C fiind proiecţia lui O pe A_iA_{i+1}.

Intre aceste poligoane sunt unele, convexe sau stelate, care se închid în B deci $A_n A_{n+1}$ este chiar BPA_1 iar altele care după un număr dat n nu se închid neapărat în B.

Vom considera cazurile poligoanelor care se închid în B, problema se examinează la fel şi pentru celelalte poligoane.

Evident că practic, numărul punctelor în care bila atinge biliardul, este limitat la un număr foarte redus.

Considerăm deci două cazuri.

Cazul I. Drumul parcurs de bilă este format de laturile unui poligon regulat convex. In acest caz bila nu poate reveni în P decât pe drumul BP, dar atunci bila *nu a trecut niciodată prin două puncte,* în afara punctului P, de plecare şi de ajungere (fig. 1).

Cazul II. Drumul parcurs de bilă este format de laturile unui poligon regulat stelat. In acest caz este evident că punctele duble sunt *o parte* sau *toate punctele* de intersecţie ale laturilor poligonului. Deoarece numărul acestor intersecţii nu se poate da prin o formulă, le vom determina prin numărare pentru fiecare caz în parte, mai ales că chiar pentru un acelaşi poligon numărul ce ne interesează variază după poziţia lui P după cum vom vedea din exemplul ce urmează.

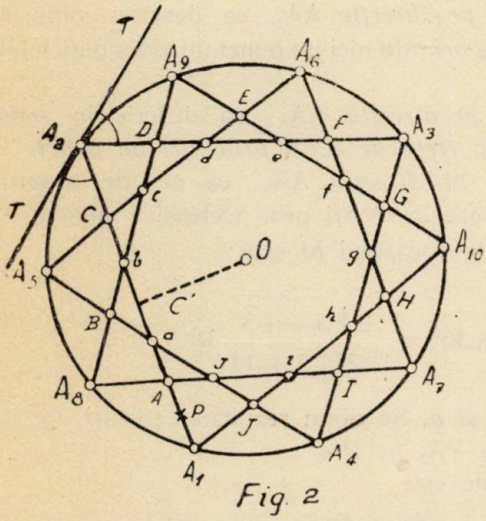


Fig. 2

Să presupunem că bila este lansată (fig. 2) pe direcţia A_1A_2 a laturei decagonului regulat stelat $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}$. Se vede că intersecţiile laturilor acestui poligon formează două decagoane regulate, concentrice cu primul după cum se poate demonstra foarte uşor. Vârfurile unuia din aceste decagoane sunt marcate pe fig. 2 cu ABCDEFGHIJ, iar ale celuilalt cu *abcdefghij.*

Avem de examinat diferite subcazuri, după poziţiile punctului P pe A_1A_2.

a) P *se află între* A_1 *şi* A. Urmărind figura, se vede că bila revine în P, pe drumul A_1P sau A_2P, după cum a fost lansată în senzul PA_2 sau PA_1. Şi într'un caz şi în altul, ea a parcurs întreg drumul format de laturele decagonului stelat şi deci a trecut de 2 ori prin 20 de puncte, care sunt vârfurile decagonului ABC... J şi acelea ale decagonului *abc... j.*

Dacă OC' este apotema decagonului regulat stelat înscris în O, bila nu poate fi lansată pe direcţia A_1A_2 decât dacă

$$OP > OC' = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

b) P *se află în punctul* A. Pentru a reveni în A, bila se poate lansa pe direcţiile AA_2, AA_1 sau AA_8, AA_7.

Să examinăm fiecare direcţie în parte.

1°. *Bila este lansată pe direcţia* AA_2. Ea va descrie conturul $AA_2A_3A_4A_5A_6A_7A$ şi va trece de 2 ori prin următoarele 7 puncte *a*, C, *d*, F, *g*, I, *j*.

2°. *Bila este lansată pe direcţia* AA_1, ea descrie conturul $AA_1A_{10}A_9A_8A$ şi *nu trece de 2 ori* prin nici un punct, în afara punctului de plecare A.

3°. *Bila este lansată pe direcţia* AA_8, ea descrie în sens invers drumul dela 2° şi *nu trece de 2 ori prin nici un punct.*

4°. *Bila este lansată pe direcţia* AA_7, ea descrie în senz invers drumul dela 1° şi trece de 2 ori prin aceleaşi 7 puncte.

Condiţia de posibilitate a cazului *b)* este:

$$\overline{OP} = OC' \sec 36^0 = \frac{2\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)} R.$$

c) P *se află între* A *şi a.* Se obţin rezultate ca la *a),* fie că se lansează bila pe direcţia PA_2 fie PA_1.

Condiţia de posibilitate este

$$\overline{Oa} < \overline{OP} < \overline{OA}$$

$$\therefore \quad \overline{OC'} \sec 18^0 < \overline{OP} < \overline{OC'} \sec 36^0.$$

d) P *se află în a.* Sunt de examinat 4 subcazuri ca la *b)* şi se obţin 7 puncte duble B, *i*, E, *f*, G, *i*, A sau nici unul.

Bila poate fi lansată în acest caz după direcţia poligonului stelat din ori care din punctele cercului de rază $\overline{OC'}\sec 18^0$ şi concentric cu O.

e) Bila se află între a şi C'. Se obţin rezultatele dela *a)* şi *c)*. Condiţia de posibilitate este

$$\overline{OC'} < \overline{OP} < \overline{OC'}\sec 18^0.$$

f) P *se află în* C. Rezultatul dela *e)* cu condiţia

$$\overline{OP} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

Din acest examen se conchide că afirmaţia din enunţ că *„în fiecare din drumurile ce parcurge bila, există puncte prin care ea trece de două ori“*, nu este adevărată.

Pentru cazul poligoanelor care nu se închid în B (fig. 1), se poate pune o problemă de construcţie de felul următor:

In interiorul unui cerc O *se dă un punct* P *şi se cere să se construiască un număr* n *de coarde* BA_1, A_1A_2, A_2A_3, ... $A_{n-1}A_n$, *toate egale între ele şi aşa încât corzile* BA_1 *şi* $A_{n-1}A_n$ *să treacă prin* B.

Dacă *n* nu divide pe 2π, problema aceasta poate avea o soartă mai grea decât problema de analiză nedeterminată a lui FERMAT.

Notă. 1. Problema 766 a fost propusă în Ianuarie 1903, la pag. 124, Vol. VIII, pe copertele căruia pe lângă numele semnatarului acestor rânduri mai sunt trecute următoarele nume de rezolvitori: AL. ALEXANDRESCU, I. ANGELESCU, P. COANDĂ, M. CIOC, G. CONSTANTINESCU, AT. DEDIU, GH. DINESCU, ST. DRĂGĂNESCU, M. FILIP, AL. GHEORGHIEŞ, F. IACOB, T. JALBĂ, V. MÂRZA, C. NIŢULESCU, D. PETROVANU, N. PROFIRI, O. RACOVIŢĂ, M. RADU, Z. RUGINĂ şi M. TUDORAN.

Pe copertele Vol. IX, 1903/4 este citat G. RĂDULESCU, iar pe copertele Vol. XI, 1906/7 este citat M. DRĂCEA.

Regret că soluţiile acestor rezolvitori, ale căror nume îmi amintesc de frumoasa primăvară a vieţii, au fost pierdute în timpul de bejanie a războiului mondial; printre acele soluţii poate că s'ar fi găsit lucruri de interes din pulsul vremei de acum 33 de ani.

2. Este probabil că s'au trimis soluţii şi dela alţi rezolvitori ale căror soluţii s'au rătăcit şi ale căror nume nu au fost anunţate pe copertă.

3. După război s'au primit soluţii parţiale dela D-nii: G. G. CONSTANTINESCU (pe când era elev de liceu), I. DANIELOPOLU şi M. MENASE.

G-L GH. B.

PROBLEMA 2996. *Să se calculeze suma*

$$\frac{1}{2^k}+\frac{2^k}{3^k}a+\frac{3^k}{4^k}a^2+\ldots+\frac{n^k}{(n+1)^k}a^{n-1}.$$

M. GHERMĂNESCU.

Să considerăm identitatea

$$e^{-t}+e^{-2t}+\ldots+e^{-nt}=\frac{e^{-(n+1)t}-e^{-t}}{e^{-t}-1}=f(t),$$

pe care s'o derivăm de k ori în raport cu t; obţinem

$$e^{-t}+2^k e^{-2t}+3^k e^{-3t}+\ldots+n^k e^{-nt}=f^{(k)}(t),$$

pe care o înmulţim cu e^{-t} în ambii membri:

$$e^{-2t}+2^k e^{-3t}+3^k e^{-4t}+\ldots+n^k e^{-(n+1)t}=1^k e^{-t} f^{(k)}(t).$$

Integrăm de k ori această egalitate membru cu membru şi obţinem

$$\frac{1}{2^k}e^{-2t}+\left(\frac{2}{3}\right)^k e^{-3t}+\left(\frac{3}{4}\right)^k e^{-4t}+\ldots+\left(\frac{n}{n+1}\right)^k e^{-(n+1)t}=$$

$$\int_t^\infty dt\int_t^\infty dt\int\ldots dt\int_t^\infty e^{-t}f^{(k)}(t)\,dt=\frac{1}{(k-1)!}\int_t^\infty (t-u)^{k-1}e^{-u}f^{(k)}(u)\,du,$$

în virtutea unei identităţi cunoscute. Suma propusă în problemă se deduce făcând $e^{-t}=a$ în identitatea precedentă, după ce am împărţit ambii membri prin $e^{-2t}=a^2$; obţinem

$$\frac{1}{2^k}+\left(\frac{2}{3}\right)^k a+\left(\frac{3}{4}\right)^k a^2+\ldots+\left(\frac{n}{n+1}\right)^k a^{n-1}$$

$$=\frac{1}{a^2(k-1)!}\int_t^\infty (t-u)^{k-1}e^{-u}f^{(k)}(u)\,du.$$

Cum $a<1$, putem trece la limită pentru $n=\infty$ şi obţinem astfel suma seriei

$$\frac{1}{2^k}+\left(\frac{2}{3}\right)^k a+\ldots+\left(\frac{n}{n+1}\right)^k a^{n-1}+\ldots$$

înlocuind $f(t)$ prin

$$\frac{1}{e^t-1}.$$

M. G.

PROBLEMA 3665. *Se dă un cerc* O *şi se consideră o dreaptă variabilă* D, *exterioară cercului, astfel ca să existe* n *cercuri tangente cercului* O, *înconjurându-l de* m *ori, tangente dreptei* D *şi tangente între ele două câte două.*

Să se arate că înfăşurătoarea dreptei D *este un cerc* (C) *şi că locul polului dreptei* D, *în raport cu cercul dat, este un cerc* (C') *concentric cu* (C).

GH. MIHOC.

Soluţie dată de Domnul ION C. VASILIU (Elev Şcoala Politehnică Bucureşti).

Fie o poziţie a dreptei D pentru care condiţiile problemei sunt îndeplinite şi x distanţa ei la centrul O; dreapta OI perpendiculară pe D (I fiind piciorul lui OI pe D) şi P un punct exterior cercului O şi dreptei D pe dreapta OI; R măsura razei cercului dat O şi y a distanţei $\overline{OP}$. Transformăm figura *prin inversiune* faţă cu polul P şi puterea egală cu k^2 aleasă astfel ca *transformatele* cercului O şi dreptei D să fie două cercuri concentrice. Fie O_1 centrul comun, (O_1) cercul transformata cercului O şi (O_d) transformata dreptei D deci trecând prin P. Tangenta PM la cercul O se transformă în ea însăşi tangentă la cercul (O_1) [punctul de contact cu (O_1) fiind M_1]; punctul I' transformatul lui I.

Următor celor presupuse, avem deci:

$$\frac{\overline{PO_1}}{\overline{PO}} = \frac{\overline{PM_1}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{PM_1}\cdot\overline{PM}}{\overline{PM^2}} = \frac{k^2}{y^2-R^2} \quad \text{şi} \quad \overline{PI'}\cdot\overline{PI} = k^2$$

sau:

$$\overline{PO_1} = \frac{k^2 y}{y^2-R^2} \quad \text{şi} \quad \overline{PO_1} = \frac{k^2}{2\overline{PI}} = \frac{k^2}{2(y-x)}$$

de unde, prin comparaţie, rezultă ecuaţia:

$$2y(y-x) = y^2 - R^2 \quad (1) \quad ; \quad \text{sau încă} \quad y^2 - 2yx + R^2 = 0. \quad (2)$$

Între cercurile (O_1) şi (O_d) luăm cele n cercuri tangente între ele două câte două şi care înconjoară cercul (O_1) de m ori, deoarece inversele cercurilor tangente două câte două între ele şi tangente cercului O şi dreptei D faţă cu polul P exterior lor se transformă tot în cercuri tangente între ele două câte două şi transformatelor (O_1) şi (O_d).

Cele n cercuri sunt egale și însemnând cu θ măsura unghiului ce-l fac razele cercului (O_1) corespunzând la două puncte de contact consecutive, avem conform enunțului:

$$n\theta = m \cdot 2\pi.$$

Insemnând cu r raza celor n cercuri egale; cu R_1 și R_d razele cercurilor (O_1) și (O_d) și considerând relațiile:

$$\frac{R_1}{R} = \frac{\overline{PM_1}}{\overline{PM}} = \frac{k^2}{y^2 - R^2} \quad \text{și} \quad 2R_d \cdot (y - x) = k^2,$$

deducem imediat că:

$$\frac{R_1}{R} = \frac{2R_d(y - x)}{y^2 - R^2};$$

dar din ecuația (1) avem:

$$y^2 - R^2 = 2y(y - x),$$

deci: $$\frac{R_1}{R} = \frac{R_d}{y}, \quad \text{sau încă:} \quad y = \frac{R_d}{R_1} \cdot R. \tag{2}$$

Să calculăm deci raportul $\frac{R_d}{R_1}$ în funcțiune de datele problemei.

Insemnând cu L centrul unuia din cercurile egale, avem:

$$\frac{O_1L}{r} = \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}},$$

din care deducem:

$$\frac{R_1}{r} = \frac{1 - \sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \quad \text{și} \quad \frac{R_d}{r} = \frac{1 + \sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

și ca urmare:

$$\frac{R_d}{R_1} = \frac{1 - \sin\frac{\theta}{2}}{1 + \sin\frac{\theta}{2}};$$

sau încă:

$$\frac{R_d}{R_1} = \frac{1 - \sin\frac{m}{n}\pi}{1 + \sin\frac{m}{n}\pi}. \tag{3}$$

Inlocuind această valoare în (2) obţinem:

$$y = R\frac{1 - \sin\frac{m}{n}\pi}{1 + \sin\frac{m}{n}\pi}, \tag{4}$$

pe care la rândul ei înlocuind-o în ecuaţia (1) avem:

$$x = \frac{y^2 + R^2}{2y} = \frac{R}{2}\,\frac{1 + \sin^2\frac{m}{n}\pi}{1 - \sin^2\frac{m}{n}\pi}. \tag{5}$$

Aşa dar, dreapta D variabilă în planul cercului O în condiţiunile problemei se găseşte la o distanţă constantă faţă cu punctul O, deci dreapta D înfăşoară un cerc (C) concentric cu (O), de rază

$$\rho = \frac{R}{2}\,\frac{1 + \sin^2\frac{m}{n}\pi}{1 - \sin^2\frac{m}{n}\pi}. \tag{6}$$

Insemnând acum cu ρ' distanţa polului dreptei D în raport cu cercul (O) la centrul O, avem relaţia cunoscută:

$$\rho'\rho = R^2, \quad \text{deci} \quad \rho' = \frac{R^2}{\rho} = \text{constantă},$$

de unde urmează proprietatea enunţată pentru polul dreptei D.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 4377. *Să se discute ecuaţia:*

$$3(3a + b)x^2 + 6(a + b)x + a + b^3 = 3b(ab + 1)$$

după valorile relative ale lui a *şi* b.

G-L GH. BUICLIU.

Trecând toţi termenii în membrul I avem

$$F(x) = 3(3a - b)x^2 + 6(a + b)x + a - 3b - 3ab^2 + b^3 = 0. \tag{1}$$

Notând cu R realizantul acestei ecuații se vede că

$$\frac{R}{3} = f(a) = 9b^2a^2 + 2b(8 - 3b^2)a + b^4 \qquad (2)$$

unde $f(a)$ este un trinom de gradul II în a. Realizantul trinomului $f(a)$ este

$$\varphi(b) = 16b^2(4 - 3b^2). \qquad (3)$$

Se vede că $\varphi(b)$ se anulează pentru

$$b_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \quad , \quad b_2 = 0 \quad \text{și} \quad b_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot$$

Când $a = b = 0$ ecuația dată nu are senz. Deci nu se poate avea a și b nuli simultan.

Dacă $a = 0$, $b \neq 0$ se vede că $R > 0$, deci (1) are 2 rădăcini reale.

Dacă $b = 0$ și $a \neq 0$ ecuația (1) se reduce la ecuația

$$a(3x + 1)^2 = 0$$

cu rădăcina dublă $\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Considerăm acum $a \neq 0$ și $b \neq 0$.

Se vede că dacă

$$-\frac{2}{\sqrt{3}} < b < \frac{2}{\sqrt{3}}$$

și anume dacă

$$-\frac{2}{\sqrt{3}} < b < 0 \quad \text{și} \quad 0 < b < \frac{2}{\sqrt{3}}$$

atunci $\varphi(b) < 0$ și deci ecuația

$$f(a) = 0$$

are rădăcini imaginare, prin urmare trinomul (2) este pozitiv și în consecință ecuația (1) are totdeauna 2 rădăcini reale.

Dacă

$$h < -\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{sau} \quad \frac{2}{\sqrt{3}} < b \qquad (4)$$

atunci $\varphi(b) > 0$ deci $f(a) = 0$ admite 2 rădăcini reale α_1 , α_2.

Din

$$\alpha_1\alpha_2 = \frac{b^4}{9b^2} \quad , \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{-2b\,(8-3b^2)}{9b^2}$$

şi $b^2 < \frac{4}{3}$, dedus din neegalităţile (4), se vede că α_1 şi α_2 sunt de semn contrar cu b.

Dacă $\alpha_1 < a < \alpha_2$ atunci $f(a) < 0$ deci (1) nu are rădăcini reale.

Când $a < \alpha_1$ sau $\alpha_2 < a$ atunci $f(a) > 0$ şi (1) are totdeauna 2 rădăcini reale.

Această discuţie se poate rezuma astfel:

$b < -\frac{2}{\sqrt{3}}$; $0 < \alpha_1 < \alpha_2$; $\begin{cases} \alpha_1 < a < \alpha_2 \ldots \text{zero rădăcini reale} \\ a < \alpha_1 \text{ sau } \alpha_2 < a\text{; 2 rădăcini } \text{„} \end{cases}$

$b = -\frac{3}{\sqrt{3}}$ . . . . . zero „ „

$-\frac{2}{\sqrt{3}} < b \leqslant 0$, oricare ar fi a . . . . . 2 „ „

$0 < b < \frac{2}{\sqrt{3}}$ „ „ „ „ . . . . . 2 „ „

$\frac{2}{\sqrt{3}} < b$; $\alpha_1 < \alpha_2 < 0$ $\begin{cases} \alpha_1 < a < \alpha_2 \ldots \text{zero} \quad \text{„} \quad \text{„} \\ a < \alpha_1 \text{ sau } \alpha_2 < \alpha \quad 2 \quad \text{„} \quad \text{„} \end{cases}$

Soluţii parţiale dela D-nii: V. CEAUŞOGLU, S. H. HORNSTEIN şi M. I. PREDOESCU.

Se ajunge la ecuaţia (1) punând

$$x = \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v$$

şi rezolvând sistemul

$$\operatorname{tg} 3u + \operatorname{tg} 3v = a \quad , \quad \operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v = b.$$

Pentru cazul că x are semnificaţia aceasta, discuţia ecuaţiei (1) trebue complectată cu condiţia $x < \frac{b^2}{4}$.

GH. B.

PROBLEMA 4441. *Să se găsească forma generală a cuburilor cari se termină cu cubul ultimei cifre a rădăcinii cubice respective.*

Să se înlocuiască cubul prin o altă putere.

M. GHERMĂNESCU.

Fie $N = 10n + a$ rădăcina cubică căutată, a fiind cifra unităţilor. Trebue să avem

$$(10n + a)^3 - a^3 = M\,10^{\alpha},$$

sau

$$(1) \qquad n(100n^2 + 10na + a^2) = M\,10^{\alpha-1},$$

unde α este numărul cifrelor lui a^3. Dacă $a = 1, 2$, a^3 are o cifră, $\alpha = 1$ şi (1) este totdeauna satisfăcută, deci un prim grup de soluţii

$$(2) \qquad N = 10n + 1, 2.$$

Dacă $a = 3$, sau 4, $\alpha = 2$; dacă $a = 3$, trebue $n = 10m$, deci

$$(3) \qquad N = 100m + 3.$$

Dacă $a = 4$, trebue $n = 5m$, deci

$$(4) \qquad N = 50m + 4.$$

Dacă $a = 5, 6, \ldots 9$, avem $\alpha = 3$: dacă $a = 5$, trebue $n = 4m$ deci

$$(5) \qquad N = 40m + 5.$$

Dacă $a = 6$ sau 8, trebue $n = 25m$, deci

$$(6) \qquad N = 250m + 6, 8.$$

Dacă $a = 7$ sau 9, trebue $n = 100m$, deci

$$(7) \qquad N = 1000m + 7, 9.$$

Problema se tratează la fel pentru o putere oarecare k, cu avantagiul, când k e neprim, de a avea mai mult de doi factori în primul membru al relaţiei (1), deci permiţând o analiză mai lesnicioasă.

Notă. La această problemă s'a primit soluţii insuficiente.

M. G.

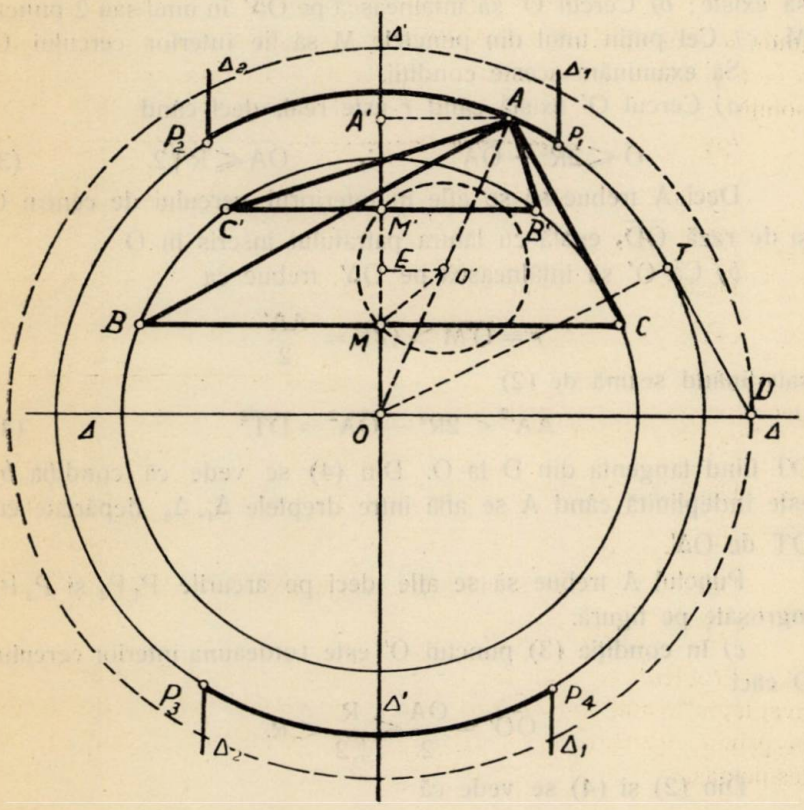
PROBLEMA 4809. *Să se construiască un triunghiu dreptunghic cunoscând vârful* A, *direcția ipotenuzei* BC *și un cerc* O *pe care se află vârfurile unghiurilor ascuțite* B *și* C. *Discuție.*

G-L GH. BUICLIU.

Soluție dată de D-l Prof. GH. BAZACOV.

Presupun problema rezolvată și fie OΔ un diametru paralel cu direcția Δ, iar OΔ' diametrul perpendicular pe Δ. Notez cu M și O' mijloacele lui BC și OA și cu E, A' proecțiile lui O' și A pe OΔ'. Dacă R este raza cercului O se vede pe figură că

$$\overline{MO}^2 + \overline{MB}^2 = R^2$$



și cum AM este egală cu MB în triunghiul dreptunghic BAC, rezultă

$$\overline{MO}^2 + \overline{MA}^2 = R^2. \qquad (1)$$

Se ştie că locul punctelor M, care au constantă suma patratelor distanţelor la două puncte fixe A şi O, este un cerc cu centrul în mijlocul O′ al lui AO şi cu raza r dată de:

$$r^2 = \overline{O'M}^2 = \frac{2(\overline{OM}^2 + \overline{MA}^2) - \overline{OA}^2}{4} = \frac{2R^2 - \overline{OA}^2}{4}. \quad (2)$$

De aici construcţia: Se iau intersecţiile M ale cercului O′ cu OΔ′ şi prin M se duce coarda BC, paralelă cu OΔ. Se pot avea 2,1 sau nici o soluţie.

Discuţie, dată de D-l AD. O. ŞAICHIN.

Pentru ca problema să fie posibilă trebue ca: *a)* Cercul O′ să existe; *b)* Cercul O′ să întâlnească pe OΔ′ în unul sau 2 puncte M; *c)* Cel puţin unul din punctele M să fie interior cercului O.

Să examinăm aceste condiţii.

a) Cercul O′ există când r este real, deci când

$$O \leqslant 2R^2 - \overline{OA}^2 \quad \therefore \quad \overline{OA} \leqslant R\sqrt{2}. \quad (3)$$

Deci A trebue să se afle în interiorul cercului de centru O şi de rază $\overline{OD}$, egală cu latura patratului înscris în O.

b) Ca O′ să întâlnească pe OΔ′, trebue ca

$$r = \overline{O'M} > \overline{O'E} = \frac{\overline{AA'}}{2}$$

sau ţinând seamă de (2)

$$\overline{AA'}^2 < 2R^2 - \overline{OA}^2 = \overline{DT}^2 \quad (4)$$

DT fiind tangenta din D la O. Din (4) se vede că condiţia *b)* este îndeplinită când A se află între dreptele Δ_1, Δ_2 depărtate cu $\overline{DT}$ de OΔ′.

Punctul A trebue să se afle deci pe arcurile P_1P_2 şi P_3P_4 îngroşate pe figură.

c) In condiţia (3) punctul O′ este totdeauna interior cercului O căci

$$\overline{OO'} = \frac{OA}{2} \leqslant \frac{R}{\sqrt{2}} < R.$$

Din (2) şi (4) se vede că

$$r = \frac{\overline{DT}}{2}.$$

Dacă A este interior cercului O atunci minimul și maximul lui $\overline{DT}$ sunt R și $R\sqrt{2}$, deci

$$R < 2r < R\sqrt{2}$$

ceea ce arată că cel puțin unul din punctele M, M' este interior cercului O.

Dacă A este exterior cercului O, atunci în condiția neegalității (2), maximul și minimul lui DT vor fi R și zero. Deci

$$O < 2r < R$$

ceea ce arată că cercul O' este interior cercului O și deci avem totdeauna unul din punctele M.

Concluzii. Dacă $R < \overline{OA} < R\sqrt{2}$ și A se află pe arcul P_1P_2 sau P_3P_4, între punctele extreme, problema are 2 soluții.

Când A se află în P_1, r este egal cu

$$\frac{AA'}{2} = \frac{DT}{2} = O'E$$

și avem o singură soluție.

Dacă $OA < R$, rezultate analoage.

Când $OA = R$ se vede din (2) că r este nul, deci O' se află pe $O\Delta'$ și vom avea o singură soluție atunci când A se găsește la intersecția lui $O\Delta'$ cu cercul O (OD).

Notă. 1°. D-nii Oct. Gh. Rădulescu (Lic. militar Târgoviște) și Gh. N. B. Ionescu (Lic. Ploești) au dat soluții bune dar discuție parțială.

2°. La fel se rezolvă problema pentru cazul construcției unui triunghiu oarecare, caz în care trebue să se dea și produsul laturilor AB și AC.

Gh. B.

PROBLEMA 5032. *Indicatorul indicatorului unui număr prim de patru cifre este* 1008; *care este acel număr?*

Cpt. C-dor I. Linteș.

Fie N numărul căutat, atunci:

$$\varphi(N) = N - 1 \text{ și deci } \varphi(N-1) = 1008 = 2^4 . 3^2 . 7.$$

Cum $N-1$ este un număr par, urmează că va avea una din formele:

$$2^{\alpha}.M \;;\; 2^{\alpha}.3^{\beta}.M \;;\; 2^{\alpha}.7^{\gamma}.M \;;\; 2^{\alpha}.3^{\beta}.7^{\gamma}.M$$

unde M este un produs de unul sau mai multe numere prime de forma:

$$2^{a}.3^{b}.7^{c}+1,$$

a, *b* şi *c* putând lua şi valorile *zero*.

Admitem că numărul M este constituit dintr'un singur număr prim, atunci $\varphi(N-1)$ poate avea una din formele:

$$2^{a+\alpha-1}.3^{b}.7^{c}$$
$$2^{a+\alpha}.3^{b+\beta-1}.7^{c}$$
$$2^{a+\alpha}.3^{b+1}.7^{c+\gamma-1}$$
$$2^{a+\alpha+1}.3^{b+\beta}.7^{c+\gamma-1}$$

unde avem respectiv:

$$a+\alpha=5 \;;\; b=2 \;;\; c=1$$
$$a+\alpha=4 \;;\; b+\beta=3 \;;\; c=1$$
$$a+\alpha=4 \;;\; b=1 \;;\; c+\gamma=2$$
$$a+\alpha=3 \;;\; b+\beta=2 \;;\; c+\gamma=2.$$

In aceste condiţiuni $N-1$ poate lua valorile:

$2^{\alpha}.(2^{5-\alpha}.3^{2}.7+1$ unde $\alpha=1,2,3,4,5$

$2^{\alpha}.3^{\beta}.(2^{4-\alpha}.3^{3-\beta}.7+1)$ „ $\begin{cases}\alpha=1,2,3,4\\ \beta=1,2,3\end{cases}$

$2^{\alpha}.7^{\gamma}.(2^{4-\alpha}.3.7^{2-\gamma}+1)$ „ $\begin{cases}\alpha=1,2,3,4\\ \gamma=1,2\end{cases}$

$2^{\alpha}.3^{\beta}.7^{\gamma}.(2^{3-\alpha}.3^{2-\beta}.7^{2-\gamma}+1)$ „ $\begin{cases}\alpha=1,2,3\\ \beta=1,2\\ \gamma=1,2\end{cases}$

expresiunile din paranteză reprezentând numere prime mai mari decât 7, iar dacă exponenţii factorilor din paranteză devin nuli, atunci paranteza întreagă devine *unu*.

Observăm însă că în primele trei forme valorile $\alpha=5$ şi 4 nu pot fi luate în consideraţie deoarece parantezele reprezintă numere *pare*, prin urmare le vom elimina.

In aceste condiţiuni, calculând diferitele valori pentru N — 1, găsim :

				α = 1	2	3	4
(N — 1)	Prima formă			2018	2020	2024	2032
	A doua formă		β = 1	3030	—	3040	—
			β = 2	3042	—	3096	—
			β = 3	—	3132	3240	—
	A treia formă		γ = 1	—	—	2408	—
			γ = 2	2450	2188	2744	—
	A patra formă	β = 1	γ = 1	—	3612	—	—
			γ = 2	3822	—	—	—
		β = 2	γ = 1	3654	—	—	—
			γ = 2	4410	—	3528	—

Eliminând numerele terminate cu *4*, atunci numerele, care sporite cu *1* devin prime sunt:

3049; 3529, 3613, 3823

care constituesc soluţiuni ale problemei.

Admiţând apoi că numărul M ar fi constituit din mai multe numere prime şi raţionând analog, nu mai găsim alte soluţiuni.

In consecinţă problema admite în total *patru soluţiuni.*

I. L.

Notă. Au rezolvat problema parţial, dând numai soluţiunile notate în dreptul fiecăruia, Domnii : D. MIHĂILESCU şi GH. TOPALESCU (3529 şi 3823) ; D. BOIANGIU, EM. MODÂLCĂ şi M. VASILESCU-STABU (3529); M. ROŞCULEŢ (3049).

PROBLEMA 5066. *Pe un cerc cu centrul în* O *şi cu raza 1, se ia un punct fix* P. *Se consideră cercul variabil care trece prin* P *şi are centrul pe cercul* O *şi se cere:*

1. *Locul punctului de contact al cercului variabil cu tangenta sa dusă paralel cu* OP.

2. *Să se construiască locul găsit.*

EM. MORŢUN.

1. Luăm origina în P şi PO ca axă a absciselor. Fie $A(\alpha, \beta)$ punctul mobil pe cercul O şi MN diametrul cercului A, perpendicular pe PO. Se cer locurile punctelor M şi N. Punctul A fiind mobil pe cercul O, de ecuaţie

$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

avem

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha = 0. \tag{1}$$

Pe de altă parte M, N se află la intersecţia dreptei

$$y - \beta = 0 \tag{2}$$

cu cercul NPM de diametru MN şi de ecuaţie

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0. \tag{3}$$

Eliminând pe α, β între (1), (2) şi (3) se găseşte că M şi N descriu cuartica

$$4y^2(x^2 - 2x) + (y^2 - x^2)^2 = 0. \tag{4}$$

2. Membrul I al lui (4) se poate anula numai dacă $x^2 - 2x$ este negativ, adică dacă

$$0 \leqslant x \leqslant 2 \tag{5}$$

căci $x < 0$ şi $2 < x$ nu pot avea loc simultan. Rezultă că cuartica (4) este cuprinsă între dreptele

$$x = 0 \quad \text{şi} \quad x - 2 = 0$$

Din (4) se scoate

$$y^4 - 2(4x - x^2)y^2 + x^4 = 0$$

$$\therefore \qquad y = \pm \sqrt{4x - x^2 \pm \sqrt{16x^2 - 8x^3}}.$$

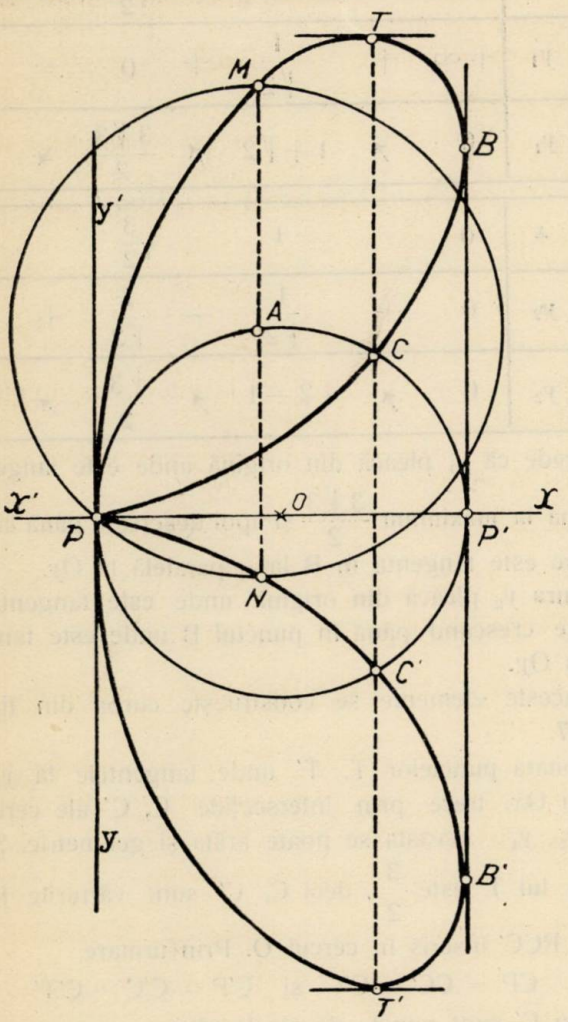
Sau punând radicalii suprapuşi sub formă de sumă de radicali, avem

$$y = \pm \left[\sqrt{2x} \pm \sqrt{2x - x^2}\right].$$

Să construim ramurile

$$y_1 = \sqrt{2x} + \sqrt{2x - x^2} \quad \text{și} \quad y_2 = \sqrt{2x} - \sqrt{2x - x^2}$$

celelalte două ramuri fiind simetrice față de axa xx'.



Calculând derivatele funcțiunilor y_1 și y_2 se găsește

$$y'_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2x}} \pm \frac{1-x}{\sqrt{2x - x^2}}.$$

Cu ajutorul funcțiunilor și al derivatelor se stabilesc următoarele două tablouri de variația lui y_1 și y_2.

I.

x	0		1		$\frac{3}{2}$		2
y'_1	$+\infty$	$+$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+$	0	$-$	$-\infty$
y_1	0	$\nearrow$	$1+\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	2

II.

x	0		1		$\frac{3}{2}$		2
y'_2	0	$+$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$+$	∞
y_2	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}-1$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	2

Se vede că y_1 pleacă din origină unde este tangentă la Oy, crește până la maximum $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ și apoi descrește până la valoarea 2 pentru care este tangentă în B la o paralelă la Oy.

Ramura y_2 pleacă din origină unde este tangentă la Ox și apoi merge crescând până în punctul B unde este tangentă la o paralelă la Oy.

Cu aceste elemente se construește curba din figură de la pagina 267.

Ordonata punctelor T, T′ unde tangentele la y_1, y_3 sunt paralele cu Ox, trece prin intersecțiile C, C′ ale cercului O cu ramurile y_2, y_4. Aceasta se poate arăta și geometric. Se observă că abscisa lui T este $\frac{3}{2}$, deci C, C′ sunt vârfurile triunghiului echilateral PCC′ înscris în cercul O. Prin urmare

$$CP = CC' = CT \quad \text{și} \quad C'P = C'C = C'T'$$

așa că C și C′ sunt puncte de ale locului.

Notă. 1°. Au rezolvat problema complect, găsind ecuația locului prin eliminarea unui parametru între ecuația cercului A și a tangentelor sale paralele cu Ox și construind exact curba lor, D-nii: I. V. JAREGHIE, C. V. PANTELIMON M. D. POPA, AL. JILETCOVICI (Lic. militar, Iași); OVID ENCULESCU și D. RIPIANU.

2°. Să considerăm cazul mai general când punctul A descrie o curbă

$$F(x, y) = 0,$$

iar MN are o direcţie Δ.

Ecuaţia cercului A (AP) este, luând origina în P şi direcţia Δ ca axă de y:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0.$$

Eliminând pe α, β între această ecuaţie şi ecuaţiile

$$x - \alpha \quad \text{şi} \quad P(\alpha, \beta) = 0$$

se găseşte că locul punctelor T este curba

$$F\left[x, \frac{y^2 - x^2}{2y}\right] = 0.$$

G-L G. B.

PROBLEMA 5107. *Dându-se trei numere prime absolut* p_1, p_2, p_3, *astfel încât să avem:*

$$p_1 < p_2 < p_3$$

să se arate că:

1. *Numărul numerelor prime cu* p_2 *din intervalul de numere dela* p_1 *la* p_3 *este egal cu:*

$$p_3 - p_1 - n.$$

2. *Suma acelor numere este egală cu:*

$$\frac{1}{2}\left[p_3(p_3+1) - p_1(p_1+1)\right] - p_2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

3. *Produsul acelor numere este:*

$$\frac{p_3!}{n!\, p_1!\, p_2^n}$$

unde n *este numărul întregilor din* $\left(\frac{p_3}{p_2}\right)$.

CPT. C-DOR I. LINTEŞ.

Soluţia I-a, dată de D-nii: D. BOIANGIU, P. DRĂGHICESCU, I. PETRESCU şi V. ROLEA.

1. Intre p_1 şi p_3 sunt $(p_3 - p_1)$ numere consecutive. In acest interval se găsesc $L\left(\frac{p_3}{p_2}\right)$ multipli de p_2, $L(x)$ fiind notaţia lui LEGENDRE, care reprezintă întregii lui x.

Atunci numărul numerilor prime cu p_2 în intervalul $(p_3 - p_1)$ va fi :

$$p_3 - p_1 - n$$

unde $$n = L\left(\frac{p_3}{p_2}\right).$$

2. Suma lor va fi :

$$S = (1+2+3+\ldots+p_3) - (1+2+3+\ldots+p_1) - (1+2+3+\ldots+n)$$

$$= \frac{1}{2}\left[p_3(p_3+1) - p_1(p_1+1)\right] - p_2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

3. Produsul lor va fi :

$$P = \frac{p_3!}{p_1!\,[p_2 \cdot (2p_2)\ldots(np_2)]} = \frac{p_3!}{n!\,p_1!\,p_2^n}.$$

Soluţia II-a, dată de D-l M. AL. VASILESCU-STABU.

Dacă se ia în considerare articolul D-lui CPT. C-DOR I. LINTEŞ, *„Extinderi asupra indicatorilor"*, (G. M. XLI — 279, 280) şi în formulele generale stabilite acolo facem :

$$N = a = p_2 \quad ; \quad p = p_1 \quad ; \quad q = p_3$$

$$\left(\frac{p_3}{p_2}\right) = n \quad \text{şi evident} \quad \left(\frac{p_1}{p_2}\right) = 0$$

atunci avem :

1. Numărul numerilor prime cu p_2 din şirul de numere dela p_1 la p_3 este :

$$F_{p_1 p_3}(p_2) = p_3 - p_1 - n.$$

2. Suma numerilor prime cu p_2 din acelaşi şir, este :

$$S_{p_1 p_3}(p_2) = \frac{1}{2}\left[p_3(p_3+1) - p_1(p_1+1)\right] - \frac{p_3}{2}\left[\frac{p_3}{p_2}\left(1+\frac{p_3}{p_2}\right) - 0[1+0]\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[p_3(p_3+1) - p_1(p_1+1)\right] - p_2\frac{n(n+1)}{2}.$$

3. Produsul numerilor prime cu p_2 din acelaş şir, este:

$$P_{p_1 p_3}(p_2) = \frac{p_3!}{p_1!} \cdot \frac{\left(\frac{p_1}{p_2}\right)!}{\left(\frac{p^3}{p^2}\right)!} \cdot \frac{1}{p_2\left(\frac{p_3}{p_2}\right) - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)}$$

$$= \frac{p_3!\ 1!}{p_1!\ n!\ p_2^{n-o}}$$

$$= \frac{p_3!}{n!\ p_1!\ p_2^n}$$

unde trebue socotit $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)! = 1$.

Observaţie.

D-l M. AL. VASILESCU-STABU încearcă să exemplifice cazul particular $p_1 = 1$; $p_2 = p_3 = p$ unde p este prim şi ajunge la relaţiile:

$$F_p(p) = p - 2 \quad ; \quad S_p(p) = \frac{1}{2}(p+1)(p-2)$$

$$P_p(p) = (p-1)!$$

cari nu sunt exacte deoarece în $F_p(p)$ trebue socotit şi 1 ca prim cu p şi atunci: $F_p(p) = p - 1$; iar în $S_p(p)$ trebue adunat 1 ca fiind prim cu p, deci:

$$S_p(p) = \frac{1}{2} p(p-1).$$

I. L.

PROBLEMA 5115. *Să se studieze natura şi semnul rădăcinilor ecuaţiei*

$$(m+1)y^2 - 2m(m+1)y + m^3 + m^2 - m + 1 = 0.$$

Să se figureze variaţia rădăcinilor reale şi să se calculeze, cu 2 zecimale exacte, valorile lui m *pentru care rădăcinile sunt maxime sau minime.*

TH. ANGHELUŢĂ.

Au rezolvat problema D-nii: S-LT. GRIG. MARTEŞ; MIRCEA C. NICULESCU (Lic. „Maiorescu", Buc.); MIRCEA D. POPA (Lic. militar Iaşi); ADOLF O. ŞAICHIN (Şc. Polit.).

Soluţii. Chestiunea propusă se poate rezolva studiind variaţia funcţiei y de x, determinată de ecuaţia

$$(x+1)y^2 - 2x(x+1)y + x^3 + x^2 - x + 1 = 0,$$

din care deducem

$$y = x \pm \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

Această funcţie are prin urmare două ramuri

$$y_1 = x + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \quad , \quad y_2 = x - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

care sunt reale în intervalele, $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$.

Derivatele acestor funcţii sunt

$$y_1' = 1 + \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)(x+1)^2}} \quad , \quad y_2' = 1 - \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)(x+1)^2}}.$$

De aici rezultă că y_1 este o funcţie crescătoare în cele două intervale.

Derivata lui y_2 poate fi scrisă astfel

$$y_2' = \frac{x^4 + 2x^3 - 2x - 2}{\sqrt{(x^2-1)(x+1)^2}\,\left[\sqrt{(x^2-1)(x+1)^2} + 1\right]}.$$

Ecuaţia $x^4 + 2x^3 - 2x - 2 = 0$ are o rădăcină pozitivă a în intervalul $(1, 2)$ şi una negativă b în intervalul $(-1, -2)$, după cum se vede uşor, căci derivata primului membru este $2(x+1)^2(2x-1)$. Restrângând intervalele în care se găsesc cele două rădăcini se găseşte $a = 1{,}10$, $b = -1{,}71$, cu două zecimale exacte.

Avem următorul tablou al variaţiilor ramurilor y_1 şi y_2

x	$-\infty$		b		-1	$+1$		a		$+\infty$
y_1'		$+$							$+$	
y_2'		$+$	0	$-$				-0		
y_1	$-\infty$	$\nearrow$		$-\infty$			1	$\nearrow$		$+\infty$
y_2	$-\infty$	$\nearrow$	$-3{,}66\ldots$	$\searrow$	$-\infty$		1	$\searrow$	$0{,}88\ldots$ $\nearrow$	$+\infty$

Numai y_2 se anulează, căci ecuaţia $x^3 + x^2 - x + 1 = 0$ are o singură rădăcină reală care este negativă. Avem asimptota $x = -1$ pentru ambele ramuri, iar y, are asimptota $y = x + 1$ şi y_2 asimptota $y = x - 1$. Cu aceste lămuriri curba se poate figura cu înlesnire.

Punând în locul lui x parametrul m, se citeşte în tabloul de mai sus semnul şi variaţia rădăcinilor y_1 şi y_2 ale ecuaţiei propuse.

Soluţiile D-lor NICULESCU, MARTEŞ şi ŞAICHIN sunt lucrate cu multă îngrijire.

PROBLEMA 5132. *Se consideră într'un plan, două axe dreptunghiulare* Ox *şi* Oy, *o curbă* C *şi un punct* M(x, y) *pe ea. Fie* T *punctul de intersecţie al tangentei în* M *la* C *cu* Oy.

1°. *Să se determine curbele* C *ştiind că punctul* P(u, v), *mijlocul segmentului* MT, *descrie parabola*

$$v = 2u^2.$$

2°. *Dintre aceste curbe să se construiască aceea care trece prin punctul (1, 1). Să se calculeze centrul de greutate al ariei, presupusă omogenă şi închisă de această curbă şi de dreapta* $y = x$.

3°. *Să se determine curbele* C *ştiind că* P(u, v) *descrie curba dată*

$$v = f(u).$$

TH. ANGHELUŢĂ.

Au rezolvat problema D-nii: ORIGEN MĂRCULESCU (Craiova); Ş-LT. GRIG. MARTEŞ şi MIRCEA D. POPA (liceul militar, Iaşi).

1°. Tangenta în M la curba C are ecuaţia

$$Y - y = y'(X - x)$$

şi prin urmare determinând coordonatele punctelor T şi P obţinem

$$T(O,\ y - xy') \quad , \quad \left(\frac{x}{2}\ ,\ y - \frac{xy'}{2}\right).$$

Scriind că P se găseşte pe parabola dată obţinem ecuaţia diferenţială lineară

$$y' - \frac{2}{x}y + x = 0$$

cu integrala generală

$$y = x^2 (A - Lx),$$

A fiind o constantă arbitrară.

2°. Curba cerută are deci ecuația

$$y = x^2 (1 - Lx).$$

Derivata

$$y' = x\,(1 - 2Lx)$$

se anulează pentru $x = 0$ și $x = \sqrt{e}$. Derivata a doua

$$y'' = -(1 + 2Lx)$$

se anulează pentru $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Avem astfel următorul tablou al variației lui y.

x	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\sqrt{e}$	e	$+\infty$
y'	0	+	0	−	
y''	+	0	−		
y	0	$\frac{4}{2e}$ ↑	$\frac{e}{2}$	0 ↘	$-\infty$

Curba se figurează lesne cu aceste date.

Dreapta $y = x$ este tangentă la curbă în punctul A (1, 1).

Insemnând cu S aria închisă de curbă și de această dreaptă avem

$$S = \frac{1}{2} - \int_0^1 x^2 (1 - Lx)\, dx = \frac{1}{18}.$$

Fie ξ și η coordonatele centrului de greutate al acestei suprafețe presupusă omogenă. Știm că avem

$$S\xi = \iint x\, dx\, dy \quad , \quad S\eta = \iint y\, dx\, dy$$

integralele duble fiind luate pe suprafața al cărui centru de greutate îl căutăm.

Integrând obținem

$$S\xi = \int_0^1 x\,[x - x^2(1 - Lx)]\,dx = \frac{1}{48},$$

$$S\eta = \frac{1}{2}\int_0^1 [x^2 - x^4(1 - Lx)^2]\,dx = \frac{37}{375},$$

sau

$$\xi = \frac{3}{16}\ ,\quad \eta \pm \frac{42}{125}.$$

3°. Scriind că P descrie curba dată obținem ecuația diferențială lineară

$$y' - \frac{2}{x}y + \frac{1}{x}f\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

cu integrala generală

$$y = x^2\left[A - \int_{x_0}^{x} \frac{1}{x^3} f\left(\frac{x}{2}\right)dx\right]$$

A fiind constanta arbitrară.

Curbele din această problemă generalizează următoarea proprietate a parabolei. Se duce tangenta în punctul M al parabolei și fie T punctul ei de intersecție cu axa acestei parabole. Punctul P mijlocul segmentului MT se găsește pe tangenta de parabolă dusă în vârful ei.

Soluțiile redijate de corespondenții noștri sunt foarte bune.

PROBLEMA 5210. *Se cere exemple de calculul:*

$$abc \times d = eeef.$$

I. IONESCU.

Soluție dată de D-l D. D. BOIANGIU (Clasa VIII-a, Liceul Turnu-Severin): F. I. ABELES (Galați); C. PANTELIMON (Liceul Militar, Iași).

Partea a doua nu are trei cifre decât dacă $d > e$. Calea de urmat este următoarea: dăm lui e pe rând valorile 1, 2, 3,..., 9 și lui d valorile $(e+1)$, $(e+2)$,..., 9 și facem împărțirea din partea a doua. Pe f îl alegem așa ca împărțirea să se facă exact. Imediat ce în cursul calculului dăm la cât peste una din cifrele d, e, f deja întrebuințate, sau peste una din cifrele deja găsite la cât mai înainte, întrerupem operația, căci nu avem soluție. Dacă împărțirea se poate efectua așa ca cifrele a, b, c, d, e, f să iasă toate diferite, avem o soluțiune a problemei.

Tabloul următor rezumă toate calculele necesare şi arată care sunt soluţiunile problemei, în număr de 6.

e	d	a	b	f	c	Observaţii	Soluţie
1	2	5	5	—	—	$b = a$	
	3	3	—	—	—	$a = d$	
	4	2	7	2	—	$f = a$	
	»	»	»	6	9		$279 \times 4 = 1116$
	5	2	2	—	—	$b = a$	
	6—9	1	—	—	—	$a = e$	
2	3	7	4	0	0	$c = f$	
	»	»	»	3	—	$f = d$	
	»	»	»	6	2	$c = e$	
	»	»	»	9	3	$c = d$	
	4	5	5	—	—	$b = a$	
	5	4	4	—	—	$b = a$	
	6	3	7	0	0	$c = f$	
	»	»	»	6	—	$f = d$	
	7	3	1	6	8		$318 \times 7 = 2226$
	8—9	2	—	—	—	$a = e$	
3	4	8	3	—	—	$b = e$	
	5	6	6	—	—	$b = a$	
	6	5	5	—	—	$b = a$	
	7	4	7	—	—	$b = d$	
	8	4	1	6	7		$417 \times 8 = 3336$
	9	3	—	—	—	$a = e$	
4	5	8	8	0	0	$b = a$	
	6	7	4	—	—	$b = e$	
	7	6	3	5	5	$c = f$	
	8	5	5	—	—	$b = a$	
	9	4	—	—	—	$a = e$	
5	6	9	2	0	5	$c = c$	
	»	»	»	6	6	$c = f$	
	7	7	—	—	—	$a = d$	
	8	6	9	2	4		$694 \times 8 = 5552$
	9	6	1	3	7		$617 \times 9 = 5553$
6	7	9	5	4	2		$952 \times 7 = 6664$
	8	8	—	—	—	$a = d$	
	9	7	4	0	0	$c = f$	
	»	»	»	9	—	$f = d$	
7	8	9	7	—	—	$b = e$	
	9	8	6	6	—	$f = b$	
8	9	9	—	—	—	$a = e$	

D-nii MIRCEA I. STOIANOVICI şi E. M. ŞENCHI au dat 5 soluţii (afară de $694 \times 8 = 5552$) fără a arăta cum le-a găsit.

EXERCIȚII

15. $A_i (i = 1, 2, \ldots 6)$ fiind 6 puncte colineare, dacă

$$(A_1 A_2 A_3 A_4) = -\lambda \quad , \quad (A_1 A_2 A_3 A_5) = -\mu \quad , \quad (A_1 A_2 A_3 A_6) = -\nu,$$

ν, λ, μ fiind trei numere în progresie aritmetică,

$$(A_1 A_4 A_5 A_6) = -1.$$

C. IONESCU-BUJOR.

R. Avem:

$$(A_1 A_4 A_5 A_6) = \frac{\lambda - \nu}{\lambda - \mu} \qquad \text{(G. M. XLI. pag. 375).}$$

Dar

$$\lambda = \frac{\nu + \mu}{2},$$

deci

$$\frac{\lambda - \nu}{\lambda - \mu} = -1.$$

16. În triunghiul ABC, fie A_1 piciorul înălțimei din A și O cercul său circumscris.

Paralelele duse prin B și C, la diametrul vârfului A, tae respectiv paralelele prin A_1, la AC și AB, în B′ și C′.

Se cere locul punctelor B′, C′ când A este mobil pe cercul O.

LT. I. GH. ZAMFIRESCU.

R. Se observă că

$$\sphericalangle BB'A_1 = \sphericalangle OAC.$$

Cum se știe că

$$\sphericalangle OAC = \sphericalangle BAA_1,$$

rezultă:

$$\sphericalangle BB'A_1 = \sphericalangle BAA_1,$$

adică patrulaterul $BB'AA_1$ este inscriptibil și deci:

$$\sphericalangle BB'A = 180^0 - \sphericalangle BA_1A = 90^0$$

și cum $BB' \parallel OA$, rezultă că $B'A \perp OA$, adică B′A este tangentă în A la cercul O.

Analog se găsește că AC′ este tangentă în A la cercul O.

Dacă A variază, B′, C′ sunt proecțiile celor două puncte fixe B, C, pe tangenta variabilă la cercul O și deci vor descrie cele 2 melcuri ale lui PASCAL, ale punctelor B, C în raport cu cercul O.

PROBLEME PROPUSE

5241. Se cere a se da toate înmulțirile de forma:

$$a \times bcd = ecdf,$$

în sistemul zecimal.

I. IONESCU.

5242. Să se afle cel mai mic bicub terminat cu două sau trei cifre identice semnificative.

I. V. MĂTIEȘ.

5243. Să se găsească un număr format din cifre diferite astfel încât înlocuind fiecare cifră a sa prin rădăcina sa patrată să se obțină un număr egal cu produsul a trei numere consecutive decâte două cifre.

AL. STOENESCU.

5244. Fie M mijlocul laturei $\overline{AB}$ a exagonului regulat înscris în cercul O și C, C′ intersecțiile lui OM cu cercul de diametru $\overline{AB}$. Să se demonstreze că *laturele duodecagoanelor* regulate înscrise în cercul O sunt tot una cu *laturile patratelor* înscrise în cercurile de raze $\overline{OC}$ și $\overline{OC'}$.

G-L GH. BUICLIU.

5245. Să se construiască trei cercuri egale, tangente două câte două, cunoscând centrul unuia din ele și câte un punct de pe celelalte două.

P. TROFIM.

5246. Fie $A_1B_1C_1$ triunghiul pedal al punctului I față de triunghiul ABC; A′ punctul de intersecție al paralelelor duse din B_1 și C_1 respectiv la CC_1 și BB_1; etc. Să se arate, că:

1°. Triunghiurile A′B′C′ și $A_1B_1C_1$ sunt invers omotetice;

2°. Triunghiurile A′B′C′ și ABC sunt homologice;

3°. I′ fiind centrul de omotetie al triunghiurilor A′ B′ C′; $A_1B_1C_1$, iar G_1 centrul de greutate al triunghiului $A_1B_1C_1$, punctele I, I′, G_1 sunt în linie dreaptă.

LT. I. GH. ZAMFIRESCU.

5247. In triunghiul ABC, fie: A'B'C' triunghiul median; H ortocentrul; AA_1 și AA_2 respectiv bisectoarele interioară și exterioară; M mijlocul segmentului $\overline{AH}$; apoi D_1 și D_2 punctele unde bisectoarele AA_1 și AA_2 taie pe B'C'. Să se arate că:

1°. Perpendicularele ridicate în D_1 pe AA_1, în D_2 pe AA_2 și perpendiculara din A pe A'M se taie într'un punct P_a pe latura BC.

2°. P_b, P_c fiind analoagele lui P_a, punctele P_a, P_b, P_c sunt în linie dreaptă.

HORIA M. BODNĂRESCU.

5248. T_n însemnând numărul triunghiular de rangul n, să se demonstreze că nu există triunghiuri dreptunghice ale căror catete să fie reprezentate prin numerele T_{m-n} și T_{m+n}.

G. G. CONSTANTINESCU.

5249. Să se determine, pentru $n = \infty$, limita expresiunii

$$E_n = \frac{n^n e^{-n} - (n-1)^{n-1} e^{-n+1}}{(n-1) \cdot (n-1)!}.$$

M. GHERMĂNESCU.

5250. Să se demonstreze identitățile:

$$\Sigma \sin a \sin(b+c) \sin(-a+b+c)$$
$$= \sin 2a \sin 2b \sin 2c - 2\cos(a+b+c) \sin a \sin b \sin c;$$
$$\Sigma \cos a \cos(b+c) \cos(-a+b+c)$$
$$= \sin^2(a+b+c) + \cos 2a \cos 2b \cos 2c$$
$$+ 2\cos(a+b+c) \cos a \cos b \cos c,$$

unde a, b, c sunt trei arce oarecare.

MIRCEA ADAM.

5251. In triunghiul ABC, unghiul A are 120°; bisectoarea AD taie latura BC sub unghiul D. Să se arate că:

$$\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC};$$
$$\sin D = \sin B + \sin C.$$

N. N. MIHĂILEANU.

5252. Triunghiul ABC are unghiul C de 45^0, iar laturile lui sunt legate prin relaţia: $a^4 + b^4 = c^3$. Se cere:

1. Să se demonstreze că suma $(m_c^2 + h_c)$ este constantă.

2. Să se rezolve triunghiul în cazul $m_c = h_c \sqrt{2}$.

ŞT. E. OLTEANU.

5253. O stea are ascensiunea dreaptă $9^h\,36^m\,31^s$ şi declinaţia $+ 14^0 15' 26''$. Să se determine pentru trecerea stelei prin verticalul comun *Parisului* şi *Bucureştiului:*

a) Timpul sideral al Parisului;

b) Distanţele zenitale ale stelei în acel moment la *Paris* şi *Bucureşti.*

C. IONESCU-BUJOR.

5254. Fie pe o conică un punct M_0. Din M_0 se duce un cerc osculator la conică în M_1, analog din M_1 un cerc osculator în M_2 şi din M_2 un cerc osculator în M_3. Dacă M_0, M_1, M_2, M_3 sunt conciclice, atunci cercul osculator la conică în M_0 trece prin M_3.

AD. GHEORGHIU.

5255. Două categorii de tunuri de pe linia *Maginot* bombardează acelaşi obiectiv de pe linia *Siegfried.* Cunoscând calibrul, viteza iniţială şi unghiul de tragere al primei categorii de tunuri să se determine aceleaşi elemente pentru a doua categorie de tunuri, care fiind aşezate mai înapoi, la o depărtare dată, să aibă aceeaşi putere de pătrundere a proiectilelor în obiectiv. Se va presupune că greutatea proiectilului este proporţională cu cubul calibrului, iarăşi rezistenţa aerului se va neglija.

Aplicaţiune numerică pentru cazul când prima categorie de tunuri au calibrul 120 mm, trag proiectilele cu o viteză iniţială de 600 m/sec, sub un unghiu de tragere de 45^0; iar a doua categorie de tunuri este aşezată la 3000 m înapoia primii categorii.

CPT. C-DOR I. LINTEŞ.

ERATĂ. 1°. La soluţia problemei 2017, la finele notei 2° se va citi E_{max}, E_{min} respectiv în loc de v_1 şi v_2, iar la 3° :

$$E_{max} \times E_{min} = \frac{k^2 m^2}{4} \left(\frac{1 - e^2}{p}\right)^2 .$$

2°. Numărul problemei rezolvată la pag. 218 în numărul trecut este 5133, iar nu 5153, cum s'a publicat.

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Abeles I. Florin (5232); *Abramescu Pop Mariana* (5203, 05, 07); *Boiangiu D. D.* (5121, 82, 87, 232); *Brezeanu Corneliu* (5008, 229); *Cherţman S. M.* (R); *Cruceru Gh. C.* (5235); *Drăghicescu P. Paul* (5154, 98, 99, 214, 35); *Dragomir M. Adrian* (5160); *Eftimie D. Cristea* (5025, 213, 32); *Enulescu O.* (3733); *Fila Gh. E.* (5180); *Florescu L. Victor* (4493, E, N, P); *Friedman I. Barbu* (5063, 65); *Jareghie V. I.* (5198, 213); *Moessner A.* (R); *Niculescu Cr. Mircea* (5232); *Pantelimon Const.* (4883, 5036, 154, 90, 201, 05, 213, 14); *Petrescu Iulian* (3071, P); *Popa D. Mircea* (5173, 98, 205, 07, 13); *Rohr I. Alex.* (5063, 65, 66, 201, 13); *Segal Joe* (5160); *Şeibulescu Const.* (5008); *Ştefan C. T.* (4573, 605, 832, 94, 914, 42, 59, 5046, 106, 20, 21, 34, 42, 51, 67, 74, 203); *Stoenescu D. Mirel* (4782, 5067, 98, 124, 60, 71, 235); *Stoianovici I. Şerban* (5153, 227, 29, 32); *Trefilov I. Mihail* (5120, 88, 99, 232, 35, 36); *Vişa Eugen* (P); *Zamfirescu Gh. I.* (P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Folle vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică* Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*
Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 50 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa :

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon : 3-9803).

C. 59.585.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLV

NUMĂRUL 6. — FEBRUARIE 1940

BIBLIOTECA CENTRALĂ A ASOCIAȚIUNII SIBIIU

SUMARUL

1. George Țițeica (urmare) . . . . . *Gh. Th. Gheorghiu.*
2. Impresiile Contelui Samuil Teleki despre matemateciani străini (urmare) . . . *Victor Marian.*
3. Asupra unei sfere asociate tetraedrului . *V. Thébault.*
4. Concursul „Gazetei Matematice" . . . . *Delegația Societății.*
5. Note Matematice: 19 — 25.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 290.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 2405, 2529, 4642, 4782, 4805, 4883, 4927, 5004, 5084, 5090, 5180, 5238.
10. Exerciții 17 — 20.
11. Probleme propuse: 4474, 5256—5270.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1940

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **D. Stoica**, Inginer; Cpt. Comandor-Inginer **Gr. Zapan**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Secretarul General al Ministerului Lucrărilor Publice şi Comunicaţiilor, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *«Gazeta Matematică»* in schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea sêmnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1939 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 5184, 85, 89, 93, 95, 96, 97, 200, 04, 06, 08, 09, 11, 12, 15, 18, 20, 21, 24, 25, 30, 31, 33, 34, 37, 42, 46, 48, 49, 52, 53, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

Avem plăcerea a anunţa că dela 8 Februarie a. c. mai fac parte din Societatea noastră şi Domnii: *Andronescu Plautius*, inginer; *Bădărău Eugen D.*, doctor în fizică; *Beneş Paul*, licenţiat în matematici; *Clorapciu Mircea*, inginer, şi *Vasilescu I. Teodor*, inginer.

GEORGE ŢIŢEICA

II. Lucrări de matemateci superioare

GEORGE ŢIŢEICA a publicat în intervalul 1898—1938, 96 lucrări şi două volume de matematici superioare. Iată lista lor cronologică [1]):

1. Sur un théorème de M. COSSERAT (I, 127, 167—168, 1898).
2. Sur les systèmes orthogonaux (I, 127, 856—857, 1898).
3. Sur les systèmes cycliques (II, 22, 172—173, 1898).
4. Sur les surfaces à courbure totale constante (I, 128, 288, 1899).
5. Sur certaines systèmes d'équations de LAPLACE (I, 128, 601—603, 1899).
6. Sur la déformation des quadriques de révolution (II, 23, 153—155, 1899).

---

1) Fiecare lucrare este însoţită de indicaţii care dau locul şi data unde a fost publicată. Astfel, cifra romană indică revista, după cum urmează:

I. Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, Paris;

II. Bulletin de sciences mathématiques, 2-e série, Paris;

III. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, 3-e série, Paris;

IV. Journal de mathématiques pures et appliquées, 9-e série, Paris;

V. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo;

VI. Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici, Roma, 1908;

VII. International Congress of mathematicians, Cambridge, 1912;

VIII. Proceedings Congress Toronto, 1924;

IX. Internationaler Mathematikerkongress, Zürich, 1932;

X. Congrès International des Mathématiciens, Oslo, 1936;

XI. Actes du Congrès Interbalcanique de Mathématiciens, Athènes;

XII. Revue Mathématique de l'Union Interbalkanique, Athénes;

XIII. Le matematiche pure ed applicate;

XIV. Analele Academiei Române (memoriile secţiunei ştiinţifice, seria 2-a);

XV. Bulletin de la section scientifique de l'Académie Roumaine;

XVI. Buletinul Societăţii de Ştiinţe din Bucuresci-România (devenit mai târziu: Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences);

XVII. Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées de l'École Polytechnique Roi Carol II, Bucarest;

XVIII. Asociatiunea română pentru înaintarea şi răspândirea ştiinţelor;

XIX. Revue scientifique,

al doilea număr indică volumul, apoi paginile şi la urmă este trecut anul.

7. Sur la déformation de certaines surfaces liées aux surfaces de second degré (I, 128, 1276—1277, 1899).

8. Sur les congruences cycliques et sur les systèmes triplement conjugués (III, 16, 137—192, 1899).

9. Sur certaines systèmes triplement conjugués (II, 23, 330—332, 1899).

10. Sur les équations de LAPLACE à solutions quadratiques (I, 131, 487—489, 1900).

11. Sur une classe d'équations de LAPLACE (II, 24, 142—144, 1900).

12. Sur la déformation continue des surfaces (I, 132, 1100—1102, 1901).

13. Sur la déformation continue des surfaces (I, 133, 431—432, 1901).

14. Sur le nombre des racines communes à plusieurs équations (I, 133, 918—920, 1901).

15. Rețele conjugate pe o suprafață (XVI, 10, 41—44, 1901).

16. Sur la déformation continue des surfaces (I, 134, 894—895, 1902).

17. Sulle superficie minime ortogonali ad una sfera (XIII, 2, 186—188, 1902).

18. Sur les substitussions linéaires à deux variables (XVIII, 14—18, 1902).

19. Sur la nouvelle transformation des surfaces à courbure totale constante de M. GUICHARD (I, 136, 952—953, 1903).

20. Sur la déformation continue des surfaces (I, 138, 553—554, 1904).

21. Sur les équations différentielles linéaires du second ordre renferment un paramètre (I, 140, 223—224, 1905).

22. Sur les équations différentielles linéaires du second ordre renferment un paramètre (I, 140, 492—493, 1905).

23. Sur la déformation de certaines surfaces tétraédrales (I, 142, 1401—1403, 1906).

24. Sur la déformation de certaines surfaces tétraédrales (I, 142, 1493—1494, 1906).

25. Sur une nouvelle classe de surfaces (V, 25, 180—187, 1907).

26. Sur une propriété caractéristique des surfaces de révolution (II, 31, 269—274, 1908).

27. Sur une nouvelle classe de surfaces (I, 144, 1257—1259, 1907).

28. Sur certaines surfaces reglées (I, 145, 1132—1133, 1907).

29. Sur une nouvelle classe de surfaces (VI, 2, 304—308, 1908).

30. Sur une classe de surfaces (I, 146, 165—166, 1908).

31. Sur les surfaces reglées (I, 147, 173—174, 1908).

32. Sur les réseaux conjugués à invariants égaux (I, 147, 1036—1038, 1908).

33. Sur une nouvelle classe de surfaces (V, 28, 210—216, 1909).

34. La courbure totale des surfaces reglées (XVI, 18, 5—9, 1909).

35. O problemă de geometria infinitezimală (XVI, 18, 166—170, 1909.

36. Sur certaines systèmes cycliques (I, 148, 822—824, 1909),

37. Un problème sur les systèmes triples orthogonaux (I, 150, 29—32, 1910).

38. Sur une nouvelle classe de surfaces (I, 150, 955—956, 1910).

39. Sur une nouvelle classe de surfaces (I, 150, 1227—1229, 1910).

40. Sur un théorème de M. DARBOUX (I, 151, 971—974, 1910).

41. Sur certaines courbes gauches (III, 28, 9—32, 1911).

42. Sur les congruences W (I, 152, 35—37, 1911).

43. Sur certains réseaux conjugués (I, 152, 1077—1079, 1911).

44. Sur les réseaux R (I, 153, 1127—1129, 1911).

45. Sur les surfaces isothermiques (VII, 2, 88—92, 1912).

46. Sur les réseaux conjugués à invariants égaux d'une quadrique (II, 36, 155—164, 1912).

47. Sur les surfaces isothermiques (I, 154, 54—56, 1912).

48. Sur les équations de LAPLACE à solutions quadratiques (I, 154, 332—334, 1912).

49. Sur les réseaux isothermiques (I, 154, 1144—1145, 1912).

50. Rețele derivate (XIV, 35, 113—115, 1913).

51. Sur les réseaux dérivés (XV, 1, 125—128, 1913).

52. Sur les réseaux dérivés (I, 156, 374—376, 1913).

53. Sur les réseaux réciproquement dérivés (I, 156, 666—669, 1913).

54. Sur une généralisation des surfaces minima noneuclidiens (I, 156, 1136—1138, 1913).

55. Sur une généralisation des surfaces minima (XV, 2, 11—15, 1913).

56. Sur les réseaux conjugués à suite de LAPLACE périodique (I, 157, 908—910, 1913).

57. Sur les réseaux à invariants égaux et à suite de LAPLACE périodique (I, 157, 1382—1383, 1913).

58. Sur les réseaux R à suite de LAPLACE périodique (XV, 2, 159—162, 1914).

59. Sur les surfaces reglées à lignes flecnodales confondues (XV, 3, 86—95, 1914).

60. Sur une classe spéciale de surfaces, I (XV, 3, 200—204, 1915).

61. Sur une classe spéciale de surfaces, II (XV, 3, 205—210, 1915).

62. Sur les réseaux conjugués à suite de LAPLACE périodique, I (XV, 3, 317—326, 1915).

63. Sur les réseaux conjugués à suite de LAPLACE périodique, II (XV, 4, 11—20, 1915).

64. Sur les réseaux conjugués à suite de LAPLACE périodique, III (XV, 4, 55—64, 1915).

65. Sur les couples de surfaces applicables (XV, 4, 92—102, 1915).

66. Sur un problème de M. GUICHARD (XV, 5, 17—25, 1916).

67. Deformarea unei clase de suprafeţe tetraedrale (XIV, 38, 241—259, 1916).

68. La géométrie différentielle projective des réseaux (XIX, 31, 349—353, 1920).

69. Sur les réseaux de points (I, 174, 150—151, 1922).

70. Un nouveau problème sur les suites de LAPLACE (VIII, 1, 791—794, 1924).

71. Sur la représentation géodésique affine des surfaces (I, 178, 834—836, 1924).

72. Sur certaines courbes gauches (III, 42, 379—390, 1925).

73. Sur certaines courbes gauches (I, 180, 1715—1716, 1925).

74. Sur la déformation de certains surfaces tétraédrales, les surfaces S et les réseaux R (notă publicată în vol. „Geometria proiettiva diferenziale“ de G. FUBINI şi E. ČECH, 2, 663, 1926).

75. Sur certaines congruences (I, 182, 952—954, 1926).

76. Sur une nouvelle classe de congruences (I, 182, 1071—1073, 1926.

77. Sur un certain système d'équations aux dérivées partielles (I, 184, 582—583, 1927).

78. Sur certaines congruences de droites (IV,7, 189—208, 1928).

79. Sur certaines propriétés quadratiques (XVII, 1, 17—21, 1929).

80. Sur les courbes quadratiques (I, 193, 1146—1148, 1931).

81. Sur la représentation conforme (I, 195, 476—478, 1932).

82. Sur les courbes quadratiques (IX, 2, 173, 1932).

83. Sur les fonctions rationnelles osculatrices à une fonction analytique (I, 197, 974—976, 1933).

84. Sur les réseaux à invariants constants (XI, 1, 81, 1934).

85. Réseaux et congruences (XI, 1, 107—113, 1934).

86. Sur certains réseaux (I, 200, 191—192, 1935).

87. Sur quelques propriétés affines (I, 200, 1563—1565, 1935).

88. Sur la géomètrie différentielle de l'équation de LAPLACE (X, 2, 174—175, 1936).

89. Sur une déformation d'ordre supérieur (I, 202, 547—548, 1936).

90. Sur des fonctions rationnelles osculatrice à une fonction analytique (XII, 1, 1—9, 1936).

91. Sur une nouvelle propriété des congruences de droites (XV, 18, 109—112, 1936).

92. Sur quelques propriétés affines (XVII, 6, 8—12, 1936).

93. La méthode de M. KUBOTA (XVII, 8, 6—8, 1937).

94. Sur certaines courbes quadratiques et sur les déplacements à un paramètre (I, 205, 639—640, 1937).

95. Sur certaines déformations d'ordre supérieur (I, 207, 707—708, 1938).

96. Mouvements à un paramètre d'un solide (XVI, 40, 23—26, 1938).

şi volumele:

97. Géométrie différentielle projective des réseaux (Cultura Națională, Bucureşti, 1923, volum conținând 291 pagini).

98. Introduction à la géométrie différentielle projective des courbes (Mémorial des sciences mathématiques, fasc, 47, Gauthier-Villars, Paris, 1931, volum conținând 60 pagini).

In cele ce urmează vom face o dare de seamă a conținutului acestor lucrări.

ȚIȚEICA își publică prima lucrare de matemateci superioare (1)[1], demonstrând următoarea teoremă: *Fiecărei drepte* D, *dintr'o congruență* C, *facem să-i corespundă coarda de contact* Δ, *a sferei* S, *descrisă pe segmentul focal al lui* D *ca diametru, cu înfășurătoarea sa. Dacă există pe dreapta* Δ *un punct* μ *care descrie o suprafață a cărei normală în* μ *să fie paralelă cu* D, *congruența* C *este ciclică.* Dacă congruența este în același timp ciclică și de RIBAUCOUR teorema precedentă devine o teoremă cunoscută a lui COSSERAT. Mai particular, dacă în plus distanța focală a congruenței este constantă, ȚIȚEICA face observarea că suprafața mijlocie este isotermică. Tot în legătură cu această teoremă face (4) o aplicare interesantă asupra congruențelor considerate de GUICHARD, cu alte cuvinte congruențele ce se bucură de proprietatea că desfășuratele lor taie suprafețele focale după liniile de curbură. In cazul acestor congruențe, dreptele Δ formează și ele o congruență ale cărei desfășurate taie suprafețele sale focale după rețele conjugate ciclice. In aceeași ordine de idei, ȚIȚEICA mai demonstrează (3) următoarea teoremă: *dacă o congruență se bucură de proprietatea că sfera* S *descrisă pe segmentul focal ca diametru rămâne ortogonală unei sfere fixă* O, *congruență este ciclică și planele cercurilor sistemului trec prin centrul sferei* O. In cazul când congruența formată cu normalele unei suprafețe Σ se bucură de proprietatea de mai sus, suprafața are aceeași reprezentare sferică ca și o suprafață cu curbura totală constantă.

Paralel cu aceste chestiuni, ȚIȚEICA s'a ocupat și de sistemele triplu conjugate. Anume, el a considerat o clasă specială (2), care se apropie mai mult de sistemele triplu ortogonale, și pe care le-a notat cu Ω_i. Iată cum introduce aceste sisteme. Consideră trei puncte $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2, 3)$, coordonatele fiind funcțiuni de trei parametrii ρ_1, ρ_2, ρ_3, în așa fel ca dreptele M_1M_2, M_2M_3, M_3M_1 să descrie câte o congruență ciclică având fiecare focarele în extremități. Consideră apoi punctul $M(x, y, z)$ astfel ca

$$[a] \qquad \frac{\partial x}{\partial \rho_i} = \alpha_i (x - x_i), \quad \frac{\partial y}{\partial \rho_i} = \alpha_i (y - y_i), \quad \frac{\partial z}{\partial \rho_i} = \alpha_i (z - z_i);$$

1) Această notație însemnează: vezi lucrarea având numărul de ordine 1, din lista de mai sus.

punctul M va descrie un sistem triplu conjugat Ω_i dacă notând cu $R_1, R_2, \ldots, R_i$ i soluţii ale sistemului de ecuaţii LAPLACE ce se deduce din [a] şi la care satisface x, y, z atunci acestui sistem îi satisface şi soluţia $x^2 + y^2 + z^2 - R_1^2 - R_2^2 - \ldots - R_i^2$. Face apoi o clasificare a acestor sisteme. Intr'o notă următoare (5) dă trei transformări ale sistemelor Ω_1 considerându-le mai generale în spaţiul cu n dimensiuni.

Toate aceste rezultate ŢIŢEICA le strânge şi le sistematizează pentru a-şi forma teza de doctorat (8) în 1899. Lucrarea conţine trei părţi. Prima parte este consacrată congruenţelor şi conţine printre altele condiţiile ce trebuesc îndeplinite de parametrii directori ai unei congruenţe pentruca să fie ciclică sau de-a lui RIBOUCOURT, folosind rezultatele găsite în cazul particular al congruenţelor lui GUICHARD, (ce sunt în acelaşi timp ciclice şi de RIBOUCOURT). Arată că suprafaţa mijlocie a unei congruenţe GUICHARD se corespunde prin ortogonalitate cu elementele unei suprafeţe având curbura constantă. Partea a doua are drept introducere determinarea sistemelor conjugate ce admit drept suprafeţe $\rho_1 = \text{const.}$, $\rho_2 = \text{const.}$ $\rho_3 = \text{const.}$, nişte suprafeţe speciale. In legătură cu sistemele triplu conjugate ŢIŢEICA introduce noţiunile de *reţea-triedru*, *reţea-triunghiu* şi *congruenţă-triplă*. Anume, dacă M este un punct al unui sistem triplu conjugat, cu alte cuvinte coordonatele lui depinzând de trei parametrii satisfac unui sistem de ecuaţii cu derivate parţiale ale lui LAPLACE, atunci prin M trec trei curbe determinate prin intersecţia suprafeţelor ρ_1, ρ_2, $\rho_3 = \text{const.}$, două câte două, ale căror tangente descriu o reţea-triedru. Figura transformată prin dualitate a unei reţea-triedru este o reţea-triunghiu. O dreaptă depinzând de trei parametrii se zice că descrie o congruenţă-triplă atunci când unul din parametrii rămânând constant, dreapta descrie o congruenţă obişnuită. Studiul acestor trei noţiuni, unele în legatură cu celelalte, formează subiectul celei de-a doua părţi a lucrării. In partea a treia se găseşte studiul sistemelor Ω_i şi în special al sistemelor Ω_1.

După publicarea tezei, ŢIŢEICA s'a mai ocupat în treacăt despre sistemele triplu conjugate. Astfel, în lucrarea (9) a arătat că se poate constata depe elementul linear dacă un sistem triplu conjugat este Ω_1. Trage apoi câteva consecinţe. In lucrările ce

urmează, (10) şi (11), se arată că a căuta n soluţii $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ale ecuaţiei lui LAPLACE

$$[b] \qquad z_{uv} = az_u + bz_v ,$$

în aşa fel ca şi $z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2$ să fie deasemeni o soluţie, revine la a găsi o funcţiune c de u şi v aşa fel ca sistemul format de $[b]$ şi de ecuaţia: $z_u z_v = c$, să admită o soluţie. Se studiază în special cazul când acest sistem este complect. Un caz particular este considerat în nota (15) când $n = 2$. Se găsesc aci demonstrate următoarele proprietăţi: a) *proiecţia unei reţele conjugate oarecare situată pe un paraboloid de rotaţie, pe un plan perpendicular pe axă, este o reţea ortogonală;* b) *presupunând că pe o suprafaţă* S *curbele* u, v *formează o reţea şi că* $x^2 + y^2$ *este o soluţie a ecuaţiei lui* LAPLACE *corespunzătoare reţelei pe transformata* S' *a suprafeţei* S *prin formulele:*

$$x'_u = \lambda x_u , \ldots , x'_v = \mu x_v , \ldots$$

curbele u, v *formează tot o reţea; şi* c) *printre suprafeţele* S' *este totdeauna un paraboloid de rotaţie.*

Mai târziu, peste 10 ani publică lucrarea (37) care este în legătură cu următoarea teoremă a lui RIBOCOURT: într'un sistem triplu ortogonal, cercurile osculatoare ale curbelor de intersecţie ale suprafeţelor a două familii ale sistemului, în punctele unde curbele întâlnesc o suprafaţă oarecare din cea de-a treia familie, formează un sistem ciclic. Planele cercurilor acestui sistem înfăşoară o suprafaţă pe care se află o reţea conjugată ce se păstrează conjugată în ∞^1 deformări sau într'o singură deformare ale suprafeţei. ŢIŢEICA îşi propune să găsească sistemele triplu ortogonale pentru care reţelele în chestiune se păstrează în ∞^1 deformări. Problema este complect rezolvată. Tot atunci, în lucrarea (36), revine asupra sistemelor ciclice ocupându-se cu găsirea tuturor sistemelor ciclice singulare şi arată că sunt numai cele găsite de DARBOUX şi DEMOULIN, cu alte cuvinte acelea pentru cari planele cercurilor rămân tangente la o curbă.

(Va urma) GH. TH. GHEORGHIU.

IMPRESIILE CONTELUI SAMUIL TELEKI DESPRE MATEMATICIANI STRĂINI

(Cu ocazia bicentenarului naşterii lui TELEKI)

(Urmare de la pag. 231)

III. Studii la Paris

Dela Haga TELEKI a plecat prin Rotterdam, Anvers, etc. la Paris, unde a ajuns la 29 Noemvrie. A doua zi se prezintă lui CLAIRAUT [1]) şi DE LA CONDAMINE [2]) cu recomandaţie din partea lui DANIEL şi ION BERNOULLI. Aici mai face cunoştinţa lui DU VOISIN ROUSSELOT, DE LA LANDE [3]), BUFFON [4]), etc. Pretutindeni este bine primit şi introdus în societatea savanţilor. Spicuim din notele făcute în Paris următoarele (pag. 96): „*In 5 Decemvrie dimineaţa am fost la o cafea la D-l* CLAIRAUT, *de acolo m'am dus la D-l* DE LA CONDAMINE, *unde era întrunită o societate erudită până la ora 1... In 6 Decemvrie a fost la mine D-l* DE LA CONDAMINE. *In ziua aceea am prânzit la D-l* CLAIRAUT. *După masă la ora 4 ne-am dus la şedinţa Academiei de Ştiinţe. La 7 Decemvrie m'am dus la D-l* DE LA LANDE, *pe care l-am cunoscut prin D-l* CLAIRAUT. *In 8 a fost D-l* LA LANDE *la mine. După masă, m'am dus la cursurile lui dela Collège Royale, în care vorbea* **De constructione navium.** *Fiindcă la D-nii* CLAIRAUT, DE LA CONDAMINE, DU VOISIN,... *merg foarte adesea, ba la câte unul merg în fiecare zi, despre asta nici nu voiu mai scrie*".

„*La 21 Decemvrie am început cu ajutorul lui Dumnezeu să învăţ astronomia dela D-l* ROUSSELOT, *pe care mi l-a recomandat D-l* LA LANDE. *In ce priveşte observaţiile mi le arată D-l* LA LANDE *la observator, unde mă chiamă când este timp frumos şi merge şi dânsul*".

Iar în notele din anul 1763 citim (pag. 98): „*La începutul lui Martie D-l* LA LANDE *a plecat în Anglia. Inainte de plecare*

1) ALEXIS CLAUDE CLAIRAUT (1713—1765), distins matematician francez.

2) C. M. DE LA CONDAMINE (1701—1774), matematician francez.

3) J. J. LE F. DE LA LANDE (1732—1807), astronom francez.

4) GEORGE LOUIS LECLERC DE BUFFON (1707—1788), vestit naturalist francez.

m'a dus la D-l DE L'ISLE [1]) *ca să-i fac cunoştinţa. E foarte bătrân, om bun, mare astronom, dar din cauza bătrâneţii nu mai poate lucra. Are pe lângă el un tânăr cu numele* MESSIERS [2]) *care lucrează pentru dânsul şi face observaţii la observatorul D-lui* DE L'ISLE. *La Paris nu au pe nimeni care să observe mai bine şi mai precis, dar au destui astronomi mai buni. D-l* DE LA LANDE *l-a rugat ca în absenţa sa să-mi arate uneori unele observaţii şi mi-a promis toată bunăvoinţa. Odată am fost deja cu dânsul la observatorul D-lui* DE L'ISLE".

„La 2 Aprilie am fost la observatorul regal împreună cu D-nii ROUSSELOT, MESSIERS *şi* KOVÁTS. *E un edificiu foarte frumos şi masiv, din piatră cioplită, este situat pe un loc frumos şi ridicat. Abatele* CHAPE [3]), *membru al Academiei, astronom care locuieşte la observator, ne-a arătat instrumentele într'un timp foarte scurt, fiindcă nu are mai nimic, în afară de patru cadrane astronomice, dintre care unul este foarte frumos şi mare. Ne-am coborît şi în încăperile subterane ale observatorului pe nişte trepte de piatră, cu torţe; se află la 90 de picioare dela suprafaţa pământului...*

In ziua de 13 fiind de faţă la Academia de Ştiinţe de după Paşti, între diferitele memorii D-l CASSINI [4]) *a cetit unul care cuprindea darea de seamă asupra călătoriei sale în Germania în vederea prelungirii meridianului parisian, şi a operaţiilor făcute...*

Prin D-l VARNIER *am făcut cunoştinţa D-lui* FERDINAND BERTHOUD [5]), *un mare mecanic şi vestit ceasornicar în construirea pendulelor. Acum a inventat o maşină pentru determinarea longitudinilor pe mare, pe care mi-a arătat-o şi pe care, înainte de plecarea sa în Anglia, a prezentat-o Academiei. Căci din porunca*

---

1) JOSEPH NICOLAS DE L'ISLE (1688—1768), astronom, dela 1714 membru al Academiei de Ştiinţe din Paris.

2) CHARLES MESSIERS (1730—1817) astronom. Membru al Academiei de Ştiinţe, mai târziu al Institutului din Paris.

3) Abbé JEAN CHAPPE D'AUTEROCHE (1722—1769), astronom, membru al Academiei de Ştiinţe din Paris.

4) CÉSAR FRANÇOIS CASSINI DE THURY (1714—1784), directorul Observatorului de astronomie din Paris.

5) FERDINAND BERTHOUD (1727—1807), horolojer-mecanician, Membru al Institutului.

Regelui Academia l-a trimis în Anglia împreună cu D-l CAMUS [1]) *ca să examineze o maşină nouă inventată în acelaşi scop de către englezul* HARISON [2]).

La 17 Aprilie, împreună cu vestitul orologer LE PEAUTE, *la care locuieşte D-l* LA LANDE *şi care deobiceiu lucrează pe seama Regelui, cu D-l* ROUSSELOT *şi* KOVÁTS *am fost la Passy (o oră dela Paris), unde am vizitat... pe Dom.* NOELE, *căruia i-am făcut cunoştinţa şi care face parte din ordinul benedictin, locuieşte în de Passy, în case foarte frumoase, pe care le-a cumpărat Regele şi le-a amenajat pentru păstrarea colecţiei sale de instrumente fizice. Cabinetul Regelui e foarte frumos şi împodobit cu multe instrumente, din care partea cea mai mare şi mai frumoasă le-a construit sau comandat Dom.* NOELE; *şi acum lucrează încontinuu la ele sau le comandă. Anume construeşte un telescop, având o lungime de 22 picioare, diametru de 22 degete (pollex) şi 2 linii, care întrece în mărime pe toate cele de până acum; mulţi să îndoiesc dacă precizia lui va corespunde mărimii; va costa trei sute de mii de floreni".*

„30 Aprilie. Impreună cu D-l LE PEAUTE [3]) (*care e* **„l'Horloger du Roy"**) *şi cu D-l* KOVÁTS *am fost la Margli ca să vedem... vestita maşină hidraulică existentă acolo... Maşina e foarte mare şi grozav de costisitoare, dar nu e prea complicată. Are o descriere specială în franţuzeşte.* DESAGULIER [4]) *deasemenea a descris-o în fizica sa".*

La 2 Mai 1763 TELEKI părăseşte Parisul plecând spre casă. Din drum mai notează următoarele (pag. 105): *„La 7 Mai dimineaţa la orele 6 ajungând la Bâle, către amiazi m'am dus la D-nii profesori* DANIEL BERNOULLI *şi* ION BERNOULLI..." A fost ultima lui întâlnire cu fraţii BERNOULLI.

---

1) CHARLES ÉTIENNE LOUIS CAMUS (1699—1768), profesor de geometrie la Academia de architectură, membru al Academiei de Ştiinţe.

2) JOHN HARRISON (1693—1776), orolojer englez, inventatorul cronometrului.

3) JÉAN-ANDRÉ LE PEAUTE (1720—1787), orolojer francez, a construit pendule de precizie pentru observatoarele astronomice.

4) JÉAN THÉOPHILE DESAGULIER (1683—1744), profesor de fizică la Universitatea din Oxford.

Plecând din Bâle își continuă carnetul în franțuzește. Astfel sosind la Zürich la 19 Mai scrie (pag. 107): „*J'ai fait la connaissance de* M. GESSNER [1]), *Professeur en Mathématiques; j'ai été dans un de ses Collèges...*".

La 15 Iunie ajunge la Viena, unde notează (pag. 108): „*J'ai remis mon adresse au Pére* HÖLL [2]), *jésuite, de la part de* M. CLAIRAUT, *je l'ai déjà trouvé prévenu en ma faveur par* M. DE LA LANDE, *avec lequel il est en correspondance*". Apoi mai târziu: „*Le 27. J'ai été faire la connaissance du Pére* HÖLL, *Jésuite, à qui j'avais deux lettres de recommandation de la part de* MM. CLAIRAUT *et* LA LANDE.

Le 28. Je fus a Schönbrunn pour remettre mon adresse a M. VON SWIETEN [3]) *de la part de* M. DE LA CONDAMINE".

Notele contelui TELEKI despre matematicienii amintiți, deși împrăștiate, totuși sunt prețioase, deoarece cuprind impresiile unui iubitor al matematicilor, care a fost în strâns contact cu marii matematicieni din jumătatea a doua a veacului al XVIII-lea. Ele formează o contribuție serioasă la cunoașterea personalității acestor distinși matematicieni ai Apusului.

VICTOR MARIAN.

ASUPRA
UNEI SFERE ASOCIATE TETRAEDRULUI

Fie un tetraedru ABCD ale cărui muchi sunt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $DA = a'$, $DB = b'$, $DC = c'$; (O) sfera circumscrisă de rază R; $A_1B_1C_1D_1$ tetraedrul anticomplimentar format de planurile duse prin A, B, C, D paralel la planurile fețelor opuse.

1. Lemă. *Puterile extremităților* A *și* D *ale muchii* AD *a unui tetraedru* ABCD, *față de sfera* (S_a) *loc al punctelor ale*

1) J. GESNER (1709—1790), matematician elvețian.

2) MAXIMILIAN HÖLL (1720—1792), astronom la Observatorul din Viena, între anii 1752—1755; a fost profesor la Universitatea iezuită din Cluj.

3) GÉRARD VAN SWIETEN (1700—1782), medic olandez, născut la Leyda, mort la Schönbrunn.

căror distanțe la B *și* C *sunt într'un raport dat* $\frac{m}{n}$, *sunt independente de lungimea* BC $= a$ *și ia respectiv valorile*

$$\frac{m^2b^2 - n^2c^2}{m^2 - n^2} \quad \text{și} \quad \frac{m^2c'^2 - n^2b'^2}{m^2 - n^2} .$$

Fie M și N punctele în care muchea BC străpunge sfera (S_a). Dacă $m > n$, atunci

$$\frac{MB}{MC} = \frac{m}{n} = -\frac{NB}{NC} \quad \text{sau} \quad \frac{MB}{m} = \frac{MC}{n} = \frac{a}{m+n} \tag{1}$$

$$\therefore \quad MB = a\frac{m}{m+n} \quad , \quad MC = a\frac{n}{m+n} ,$$

$$NB = a\frac{m}{m-n} \quad , \quad NC = a\frac{m}{m-n} \tag{2}$$

și $$MN = MC + CN = a\left[\frac{n}{m+n} + \frac{n}{m-n}\right] = \frac{2amn}{m^2 - n^2} . \tag{3}$$

Dacă se notează cu ρ_a jumătate din lungimea MN, raza sferei (S_a), avem din (3):

$$\rho_a = a\frac{mn}{m^2 - n^2} . \tag{4}$$

Să aplicăm teorema lui STEWART întâi punctelor A, B, C, M și apoi punctelor A, B, C, N, avem

$$BC \cdot \overline{AM}^2 = MB \cdot \overline{AC}^2 + MC \cdot \overline{AB}^2 - MB \cdot MC \cdot BC$$

ceea ce dă, după înlocuirea lui MB și MC prin valorile (2):

$$\overline{AM}^2 = \frac{mb^2 + nc^2}{m+n} - a^2\frac{mn}{(m+n)^2} \tag{5}$$

și prin analogie

$$\overline{AN}^2 = \frac{mb^2 - nc^2}{m-n} + a^2\frac{mn}{(m-n)^2} . \tag{6}$$

Dacă w_a este centrul lui (S_a) se deduce:

$$\overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 = 2\left(A\overline{w_a}^2 + \rho_a^2\right) = \frac{mb^2 + nc^2}{m+n} + \frac{mb^2 - nc^2}{m-n} + \frac{4a^2m^2n^2}{(m^2 - n^2)^2} \tag{7}$$

și

$$(P_a) = \left| A\omega^2 - \rho_a^2 \right| = \left| \frac{m^2b^2 - n^2c^2}{m^2 - n^2} \right| . \tag{8}$$

Prin analogie

$$(P_d) = \left| Dw_a^2 - \rho_a^2 \right| = \left| \frac{m^2c'^2 - n^2b'^2}{m^2 - n^2} \right| \qquad (9)$$

(P_a) şi (P_d) sunt puterile vârfurilor A şi D faţă de sfera (S_a) şi aceste puteri sunt independente de lungimea a a muchii BC.

2. Dacă m^2 şi n^2 sunt egale cu suma patratelor muchilor feţelor DAC şi DAB a tetraedrului ABCD, dacă deci:

$$m^2 = a'^2 + b^2 + c'^2 \quad \text{şi} \quad n^2 = a'^2 + b'^2 + c^2 \qquad (10)$$

avem, în virtutea egalităţilor (8) şi (9),

$$(P_a) = \left| \frac{b^2(a'^2 + b^2 + c'^2) - c^2(a'^2 + b'^2 + c^2)}{(b^2 - b'^2) - (c^2 - c'^2)} \right| \qquad (11)$$

$$(P_d) = \left| \frac{c'^2(a'^2 + b^2 + c'^2) - b'^2(a'^2 + b'^2 + c^2)}{(b^2 - b'^2) - (c^2 - c'^2)} \right| \qquad (12)$$

(P_a) şi (P_d) fiind puterile vârfurilor A şi D, faţă de sfera (S_a).

Prin analogie sunt alte cinci sfere (S_a), (S_c), (S'_a), (S_α), (S'_c) la fel cu (S_a).

Am demonstrat [1]) că aceste sfere sunt ortogonale sferei lui LONGCHAMPS a tetraedrului ABCD, şi prin urmare sferelor (O, R), $(O_1, 3R)$ circumscrise tetraedrelor ABCD, $A_1B_1C_1D_1$.

Deci:

Intr'un tetraedru ABCD, *centrul* O_1 *al sferei circumscrise tetraedrului anticomplimentar* $A_1B_1C_1D_1$, *are aceeaşi putere, egală cu* $9R^2$, *faţă de cele şase sfere, loc al punctelor ale căror rapoarte ale patratelor distanţelor la două vârfuri ale tetraedrului sunt egale cu rapoartele sumelor patratelor muchilor feţelor opuse vârfurilor considerate.*

Această proprietate extinde la tetraedru o teoremă a lui E. LEMOINE relativ la simetricele cercurilor lui APPOLONIUS faţă de mijloacele laturilor unui triunghiu [2]).

1) *Mathesis*, 1932—229.

2) *Journal de Mathématiques Elémentaires* de G. DE LONGCHAMPS, 1886—142.

3. Când

$$m^2 = a'^2 + b'^2 + c^2 \quad \text{și} \quad n^2 = a'^2 + b^2 + c'^2$$

puterile vârfurilor A și D față de sfera (Σ_a), loc al punctelor ale căror distanțe la B și C au raportul $\frac{m}{n}$, sunt egale cu

$$(P_a) = \left| \frac{b^2(a'^2 + b'^2 + c^2) - c^2(a'^2 + b^2 + c'^2)}{(b^2 - b'^2) - (c^2 - c'^2)} \right| \tag{14}$$

$$(P'_d) = \left| \frac{c'^2(a'^2 + b'^2 + c^2) - b'^2(a'^2 + b^2 + c'^2)}{(b^2 - b'^2) - (c^2 - c'^2)} \right| \tag{15}$$

Din relațiunile (11), (12), (14) și (15) rezultă că

$$(P_a) + (P'_d) = \frac{(b^2+b'^2)(a'^2+b^2+c'^2) - (c^2+c'^2)(a'^2+b'^2+c^2)}{(b^2 - b'^2) - (c^2 - c'^3)} \tag{16}$$

$$(P_d) + (P'_a) = \frac{(c^2+c'^2)(a'^2+b^2+c'^2) - (b^2+b'^2)(a'^2+b'^2+c^2)}{(b^2 - b'^2) - (c^2 - c'^2)} \tag{17}$$

și că

$$(P_a) + (P'_a) + (P_d) + (P'_d) = b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2. \tag{18}$$

In plus, rezultă încă

$$(P_a) - (P'_a) = b^2 + c^2 = (P_d) - (P'_d). \tag{19}$$

Prin permutări circulare convenabile a numerelor a, a', b, b', c, c' se obțin relațiuni analoage cu precedentele pentru sferele (S_b), (S_c), (S'_a), (S'_b), (S'_c) și (Σ_a), (Σ_c), (Σ'_a), (Σ'_b), (Σ'_c) asociate muchiilor CA, AB, DA, DB, DC a tetraedrului fundamental.

4. Din relațiunile (10) și (13) rezultă că sferele

$$(S_a) \text{ și } (\Sigma_\alpha), \ldots, (S_c) \text{ și } (\Sigma'_c)$$

sunt simetrice față de mijloacele muchiilor BC, ..., DC.

5. Intr'un tetraedru ortocentrlc avem

$$(P_a) + (P'_d) = a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2 = (P_d) + (P'_a)$$

$$(P_a) + (P_a) + (P_d) + (P'_d) = 2(a^2 + a'^2) = \textit{constant}.$$

pentru toate cele șase muchii ale tetraedrului.

V. THÉBAULT
(Le Mans, Franța).

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE"

După cum s'a anunţat în numărul 1, din Septemvrie 1939, al *Gazetei Matematice*, anul acesta se va ţine un concurs de matematici între elevii liceelor din ţară şi elevii anului I al Şcoalei Politehnice REGELE CAROL II din Bucureşti.

Dintre candidaţii înscrişi au fost admişi a se prezenta la concurs următorii:

Pentru Clasa IV-a: *Teodorescu C. Maria, Dumitrescu F. Dan, Ganea D. Nicuşor, Iliescu C. Constantin, Mihalcu I. Ilie, Mişicu V. Mircea, Nicolaescu T. Ioan, Roşu M. Mircea, Staicu I. Constantin, Udrea C. Ilie, Vasiliu Gh. Dumitru.*

Pentru Clasa V-a: *Ciobanu V. Igori, Constantinescu I. Emil, Iordănescu Gh. Petru, Nistor Ioan, Petrescu I. Ştefan, Popa Teodor, Popescu Gh. Marin, Puchiu T. Gheorghe, Stănescu St. Constantin, Stoianovici I. Şerban, Vlădoianu T. I. Rusan.*

Pentru Clasa VI-a: *Aldea V. Virgil, Arendt R. Emil, Bogdan Gr. Gheorghe, Crăciunescu Marcel, Cristea I. Constantin, Diaconescu V. Constantin, Drăghicescu P. Paul, Floreşteanu D. Alexandru, Ganea M. Marin, Mănescu Gh. Ioan, Mateescu Gh. Aurel Marius, Mihăileanu Gh. Andrei-Călin, Miroslav St. Tudorel, Onciu D. Dimitrie, Ordeanu I. Mircea, Pacioglu Constantin, Popa N. Aurel, Predoleanu Nicolae, Rădulescu Th. Ioan, Zaharia V. Gheorghe, Zaharia Gh. Simion.*

Pentru Clasa VII-a: *Aldea V. Minea, Atanasiu C. Virgil, Bârlea-Suhăţeanu Gr. Victor, Bârzu Gh. Vasile, Chintescu M. Matei, Ciurescu I. Florin, Dragomir M. Adrian Ermin, Gligor N. Ioan, Luca I. Ioan, Mărgărit I. Nicolae, Niculescu Cr. Mircea, Sbârnea D. Gheorghe, Şerban C. Constantin, Ştefanovici I. Mircea, Vijelie Gh. Eugen.*

Pentru Clasa VIII-a: *Papadopol-Demetra Elena, Bădescu Fl. Constantin, Boiangiu D. Dumitru, Brezeanu Corneliu, Buznea Dinu, Cârdeiu D. Gheorghe, Cherţman S. Moses, Constantin V. Pantelimon, Costescu Gh. Ioan, Ionescu D. Stelian, Leibovici Sergiu, Mocanu D. Constantin, Petrescu V. Achile, Pop Gr. Ilie, Popa D. Mircea, Rohr I. Alexandru, Şeibulescu A. Constantin, Stoenescu D. Mirel, Sulițeanu C. Constantin, Theodorescu N. Dorin, Văduva F. Marin, Vasilescu Al. Mircea.*

Pentru anul I al Şcoalei Politehnice: *Cetăţeanu Gh. Stelian, Eftimie D. Cristea.*

Adică 11 candidaţi pentru clasa IV-a, 11 pentru clasa V-a, 21 pentru clasa VI-a, 15 pentru clasa VII-a, 22 pentru clasa VIII-a şi 2 pentru anul I al Şcoalei Politehnice.

Fiecare candidat va da câte o lucrare scrisă din ambele materii la care s'a înscris. Lucrările scrise sunt eliminatorii.

Prima teză va avea loc Joi 25 Aprilie 1940 dela ora 8^{30} până la 11^{30}, iar a doua teză, în aceeaşi zi, dela ora 15 până la ora 18, la Şcoala Politehnică, Calea Griviţei 132, Bucureşti.

Oralul va începe Vineri 26 Aprilie, ora 8^{30}, tot la Şcoala Politehnică.

Candidaţilor înscrişi la concurs, care nu dispun de mijloace materiale pentru venirea şi întreţinerea lor în Bucureşti (după cum au arătat în cererile lor), li se vor trimite în vacanţa de Paşti sumele necesare transportului la Bucureşti şi li se va comunica locul unde vor fi găzduiţi în tot timpul concursului.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII.

NOTE MATEMATICE

19. CAL-ORĂ. La vechile Poşte Române, plăţile se făceau uneori cu o unitate specială de CAL-ORĂ, după numărul cailor dela diligenţă şi numărul orelor de parcurs.

Astfel, pentru curieri şi călători domneşti, se lua 10 *bani* de *cal-oră*, pentru alte categorii de călători, 15 bani de *cal-oră*, etc.

I. I.

20. *Asupra problemei 5210.* Ne-au sosit prea târziu la această problemă o soluţie complectă a D-lui ST. CETĂŢIANU şi câte 5 soluţii bune dela D-nii: CRISTEA CONST. şi CONSTANTIN C. MIHĂILESCU.

I. I.

21. *Asupra problemei 3911.*

In cele ce urmează vrem să demonstrăm unicitatea soluției găsită în notele [1]) care complectau soluția acestei probleme [2]), în care scop va trebui să rezolvăm cele două ecuații diofantine

$$(1) \qquad 9y^3 - 8x^3 = 1 \quad . \quad y^3 - 72x^3 = 1$$

obținute în notele citate.

Cum aceste două ecuații sunt cazuri ale ecuației

$$(2) \qquad 9X^3 - Y^3 = 1$$

care se poate scrie sub forma unică

$$(2') \qquad (2X)^3 + X^3 = Y^3 + 1$$

conchidem că soluțiile sale vor fi deductibile din cele ale ecuației generale

$$(3) \qquad u^3 + v^3 = w^3 + t^3$$

rezolvată de EULER, prin formele

$$\begin{aligned}
&(m^2 + 3n^2)^2 - (mp + 3nq + 3mq - 3np)\,(p^2 + 3q^2)\\
&-(m^2 + 3n^2)^2 + (mp + 3nq - 3mq + 3np)\,(p^2 + 3q^2)\\
&-(p^2 + 3q^2)^2 + (mp + 3nq - 3mq + 3np)\,(m^2 + 3n^2)\\
&(p^2 + 3q^2)^2 - (mp + 3nq + 3mq - 3np)\,(m^2 + 3n^2)
\end{aligned}$$

care, fără a pierde ceva din generalitatea lor, pot fi înlocuite prin următoarele

$$(4) \qquad \begin{aligned}
&(a^2 + 3b^2)^2 - a + 3b\\
&-(a^2 + 3b^2)^2 + a + 3b\\
&(a^2 + 3b^2)\,(a + 3b) - 1\\
&-(a^2 + 3b^2)\,(a - 3b) + 1
\end{aligned}$$

după cum a arătat BINET [3]) și CH. HERMITE [4]), exceptând cazul particular pentru care soluțiile ecuației (3) sunt două câte două egale, caz, în care ecuația (2') ne dă soluția unică (1, 2) din care rezultă, numai pentru prima ecuație (1), soluția (1, 1).

1) *Gazeta Matematică*, XLIV—636 și XLV—76.
2) *Gazeta Matematică*, XLIV—433.
3) Comptes rendus t. XII, p. 248.
4) Nouvelles Annales de Mathematiques, serie t. XI, p. 5.

In cazul general, va trebui să determinăm numerele a şi b astfel ca, în primul rând, una din necunoscutele ecuaţiei (3) să fie egală cu ± 1, iar în al doilea rând, astfel ca una din ele să fie dublă celeilalte.

Prima condiţiune nu poate fi îndeplinită decât de ultimile două numere din (4) şi anume numai pentru cazurile

$$a + 3b = 0 \quad a - 3b = 0 \quad a = b = 0$$

deoarece primele două numere sunt totdeauna pare, oricare ar fi numerele a şi b.

Rezultă deci că vom avea soluţiile

$144b^4$	$144b^4 + 6b$	0
$-144b^4 + 6b$	$-144b^4$	0
$72b^3 - 1$	-1	-1
1	$72b^3 + 1$	1

pentru cazul când una din necunoscutele ecuaţiei (3) este egală cu ± 1, şi discutând ecuaţiile algebrice în raport cu b, ce se formează atunci când punem condiţiunea ca una din soluţii să fie dublă alteia, constatăm uşor că va trebui să avem $b = 0$, astfel încât ecuaţia (2') mai admite soluţia (0, — 1), din care deducem soluţia (1, 0) pentru a doua ecuaţie din (1).

In concluzie, ecuaţiile (1) admit numai soluţiile evidente (1, 1); (1, 0) care conduc la valorile 1 şi 10 ale lui n şi pentru care expresia

$$E = 8n^2 - 7n - 1$$

este un cub perfect. Dintre aceste două valori, prima se elimină în mod natural, astfel că rămâne valoarea unică $n = 10$, după cum voiam să demonstrăm.

Este de observat că metoda întrebuinţată se poate extinde şi asupra ecuaţiilor de forma

$$x^3 + y^3 = az^3$$

unde a este un număr ce se poate descompune într'o sumă sau diferenţă de două cuburi. Determinarea formei generale a numărului a, nu întâmpină dificultăţile şi poate fi încercată de corespondenţii Gazetei.

G. G. CONSTANTINESCU.

22. *Asupra problemei 4676 şi 4844.* (G. M., XLIV, 151). Iată o soluţie cu un caracter mai general.

Avem:

$$N = 1000 \cdot a^2 + 10 \cdot ab + b^2 = n^2.$$

Sau:

$$(5a + b)^2 + 39 \cdot (5a)^2 = n^2.$$

Această egalitate este de forma:

$$x^2 + k \cdot y^2 = z^2$$

ale cărei soluţiuni in numere întregi sunt:

x	$\alpha^2 - k \cdot \beta^2$	$k\alpha^2 - \beta^2$
y	$2\alpha\beta$	$2\alpha\beta$
z	$\alpha^2 + k\beta^2$	$k\alpha^2 + \beta^2$

In consecinţă vom avea:

$5a + b$	$\alpha^2 - 39 \cdot \beta^2$	$39 \cdot \alpha^2 - \beta^2$
$5a$	$2\alpha\beta$	$2\alpha\beta$
n	$\alpha^2 + 39\beta^2$	$39\alpha^2 + \beta^2$

Care ne dă soluţiunile:

$$a = \frac{2}{5}\alpha\beta$$

$$b = \alpha^2 - 39 \cdot \beta^2 - 2\alpha\beta \quad \text{sau} \quad 39 \cdot \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta$$

$$n = \alpha^2 + 39 \cdot \beta^2 \quad \text{sau} \quad 39 \cdot \alpha^2 + \beta^2.$$

Şi prin urmare: $N = n^2$.

1. *Dacă α şi β sunt întregi,* atunci este suficient să avem ori α, ori β multiplu de 5, pentru ca să obţinem soluţiunile problemei.

Cum însă avem:

$$0 \leqslant a \leqslant 9 \; ; \; 0 \leqslant b \leqslant 3 \quad \text{şi} \quad 100 \leqslant n \leqslant 316$$

atunci căutând pe α şi β întregi, astfel încât să satisfacem acestor ultime condiţiuni, constatăm că nu avem soluţie, căci singurele

valori cari ar conveni, ar fi α sau β egal cu *10* şi β sau α egal cu *2*; dar aceste valori ne dau $a = 8$ şi $b = -96$ sau 16, ceea ce nu convine.

2. *Vom căuta soluţiile în cazul când α şi β nu sunt întregi.*

Observăm că avem:

$$n + (5a + b) = 2\alpha^2 \qquad n + (5a + b) = 2.3.13.\alpha^2$$

sau

$$n - (5a + b) = 2.3.13.\beta^2 \qquad n - (5a + b) = 2\beta^2$$

deci

$$2\alpha^2 \text{ sau } 2\beta^2 \text{ şi } 2.3.13.\alpha^2 \text{ sau } 2.3.13.\beta^2$$

trebue să reprezinte numere întregi, iar:

$$2\alpha.\beta = \mathcal{M}5.$$

In consecinţă vom avea:

α	$\pm\sqrt{\frac{\alpha_1}{2}}$	$\pm\sqrt{\frac{\alpha_1}{2.3.13}}$
β	$\pm\sqrt{\frac{\beta_1}{2.3.13}}$	$\pm\sqrt{\frac{\beta_1}{2}}$

Apoi:

$$\alpha_1.\beta_1 = 3.5^2 13.\varepsilon^2$$

unde ε este un număr întreg.

Cu aceasta observăm că avem:

$$a = \varepsilon$$

$$b = \frac{\alpha_1 - \frac{3.5^2.13.\varepsilon^2}{\alpha_1}}{2} - 5\varepsilon$$

$$n = \frac{\alpha_1 + \frac{3.5^2.13.\varepsilon^2}{\alpha_1}}{2}$$

unde α_1 şi ε sunt numere întregi, pozitive şi de aceeaşi paritate, iar α_1 trebue să dividă exact produsul: $3.5^2.13.\varepsilon^2$.

In cazul problemelor: 4676 şi 4844 avem:

$$0 \leqslant \varepsilon \leqslant 9$$

$$100 + 5\varepsilon \leqslant \alpha_1 \leqslant 319 + 5\varepsilon.$$

Eliminând soluțiunile formale, constatăm că ne rămâne:

$$\varepsilon = 4 \quad \text{și} \quad \alpha_1 = 150$$

cari ne dau soluția:

$$N = 16129 = n^2 = 127^2.$$

CPT. COMANDOR I. LINTEȘ.

23. *Asupra problemei 4258.* In această problemă, a cărei soluție s'a publicat în G. M. Vol. 40, pag. 472, se cere să se determine u dat de relația de recurență.

(1) $(n-2)\,u_n = n\,(u_{n-1} - a)$, $n = 1, 2, \ldots, u_o = 0.$

Iată o metodă care leagă chestiunea de niște considerațiuni generale și bine cunoscute:

Fie $n \geqq 1$ și să punem $v_n = \dfrac{u_n}{n}$. Prin eliminarea lui a din (1), găsim că v_n verifică relația de recurență

(2) $$v_n = 2v_{n-1} - v_{n-2} \quad , \quad n = 3, 4, \ldots$$

cu coeficienții constanți. Ecuația caracteristică a lui (2) este $z^2 - 2z + 1 = 0$, care are rădăcina dublă 1. Vom avea deci

$$v_n = A + nB.$$

Pentru determinarea constantelor A, B facem $n = 1, 2$ și găsim

$$A = 2v_1 - v_2 \quad , \quad B = v_2 - v_1.$$

Avem prin urmare

$$v_n = (n-1)\,v_2 - (n-2)\,v_1$$

deci

$$u_n = \frac{n(n-1)}{2}\,u_2 - n\,(n-2)\,u_1.$$

Se mai poate proceda în felul următor. Dacă în (2) dăm valorile 3, 4,..., n lui n și adunăm membru cu membru, avem:

(3) $$v_n = v_{n-1} + v_2 - v_1.$$

Dacă în (3) dăm valorile 3, 4,..., n lui n și adunăm membru cu membru deducem:

$$v_n = (n-1)\,v_{n-1} - (n-2)\,v_{n-2}.$$

T. P.

24. *Teorema celor 3 perpendiculare.* Se dă SA perpendiculară pe planul P în care se duc dreptele AB şi BC perpendiculare între ele. Se ştie că BA şi CA sunt perpendiculare pe SA. Rezultă

$$AB = AC \cos BAC \quad \therefore \quad \overline{SA} \cdot \overline{AB} = \overline{SA} \cdot \overline{AC} \cos BAC$$

$$\therefore \qquad Sup.\ SAB = Sup.\ SAC \times cos BAC$$

care arată că SAB este proecţia triunghiului SAC pe planul SAB, deci CB este perpendiculară pe acest plan şi prin urmare SB $\perp$ BC.

Altă demonstraţie. Se vede că

$$\overline{SB}^2 = \overline{SA}^2 + \overline{BA}^2.$$

Dar $\overline{SA}^2 = \overline{SC}^2 - \overline{AC}^2$ şi $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$.

Deci $\overline{SB}^2 = \overline{SC}^2 - \overline{BC}^2$

ceea ce arată deasemenea că SB $\perp$ BC.

M. AL. VASILESCU-STABU.

25. *Asupra unei teoreme a lui* MANNHEIM. In *Revista Matematică din Timişoara*, Vol. XIV, pag. 45 şi Vol. XV, pag. 90, s'au dat două soluţiuni elementare următoarei teoreme a lui MANNHEIM, demonstrată pe vremuri de MANNHEIM prin ajutorul polarelor reciproce : „*Suma inverselor patratelor catetelor unui triunghiu dreptunghic este egală cu inversul patratului înălţimei ce pleacă din vârful unghiului drept*".

Iată încă o soluţie elementară, diferită de cele citate. Fie AD înălţimea ce pleacă din vârful unghiului drept A în triunghiul ABC. Din triunghiurile ABD şi ACD se scoate

$$AB = \frac{AD}{\sin B} \quad \text{şi} \quad AC = \frac{AD}{\cos C} \qquad (1)$$

de unde se deduce imediat teorema de demonstrat :

$$\frac{1}{\overline{AB}^2} + \frac{1}{\overline{AC}^2} = \frac{1}{\overline{AD}^2}.$$

In cazul când triunghiul este oarecare, relaţiunile corespunzătoare relaţiunilor (1) dau

$$\frac{1}{\overline{AB}^2} + \frac{1}{\overline{AC}^2} = \frac{\sin^2 B + \sin^2 C}{\overline{AD}^2}$$

care este o generalizare a teoremei lui MANNHEIM.

I. I. SOLOMON.

BIBLIOGRAFIE

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tom. CXXVIII. Fascicola V. Noemvrie 1939. Buenos-Aires.

Boletin Matematico, publicat de B. I. BAIDAFF. Anul XII. Nr. 17. Noemvrie 1939. Buenos-Aires.

Idem. Anul XII. Nr. 18. Noemvrie 1939. Buenos-Aires.

Idem. Anul XII. Nr. 19. Nr. 20 Decemvrie 1939. Buenos-Aires.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 45. Nr. 11. Noemvrie 1939. Menasha Wis & New-York.

Idem. Vol. 45. Nr. 12. Partea I. Decemvrie 1939. Menasha Wis & New-York.

Idem. Vol. 45. Nr. 12. Partea II. Decemvrie 1939. Menasha Wis & New-York.

Bulletin scientifique de l'école Polytechnique de Timişoara. Tom. 9. Fac. 1—2. Timişoara 1939. Asupra zonei de convergenţă a câtorva serii sintagmatice de M. ST. BOTEZ. Asupra geometriei triunghiului de VINCENZO G. CAVALLARO, Asupra cercurilor asociate la un triunghiu de V. THÉBAULT, Asupra structurei grupurilor semi-simple reale de W. BARRET, Teoria curbelor definite ca intersecţia a două suprafeţe reprezentate parametric de T. T. VESCAN, Determinarea presiunii în gurile de foc de M. GHERMĂNESCU, Supralărgirea şi suprainălţarea căii în curbă de I. PROTOPOPESCU, Câteva consideraţiuni asupra determinării planului secant în proiecţiunea stereografică, de Ing. BONEA.

Deutsche Mathematik, publicată de THEODOR VAHLEN. An. II. Caietul 6. Decemvrie 1937. Leipzig.

Idem. An. III. Caietul 1. Februarie 1938. Leipzig.

Idem. An. III. Caietul 2. Aprilie 1938. Leipzig.

Idem. An. III. Caietul 3. Mai 1938. Leipzig.

Journal de mathématiques élémentaires, publicat de H. VUIBERT. Anul 64. Nr. 7. 1 Ianuarie 1940. Paris.

Idem. Anul 64. Nr. 8. 15 Ianuarie 1940. Paris.

Nieuw archief voor wiskunde. Vol. XX. 1940. Groningen.

Pitagora. Revistă de matematici. Anul V. Nr. 4. 10 Ianuarie 1940, Bucureşti. Întrebuinţarea coordonatelor baricentrice în calculul ariilor şi volumelor de P. BOLDESCU, Asupra coeficienţilor desvoltării produsului $\prod_{1}^{m}(x+i)$ de E. VIŞA, Asupra triunghiurilor polar reciproce de N. MIHĂILEANU, Studiul elementar al unui complex de drepte de A. NICULESCU.

România Aeriană. Anul XIII. Nr. 12. Decemvrie 1939. Bucureşti.

Ştiinţă şi Progres. Anul VI. Nr. 1. Octomvrie — Decemvrie 1939. Tg.-Mureş. Rezolvarea ecuaţiei de gradul IV. (Metoda LAGRANGE) de C. IVĂNESCU.

Suplimentul Gazetei Matematice. Anul VI. Nr. 5. 1 Februarie 1940. Bucureşti.

RADU BĂDESCU. *Sopra una certa serie di Laurent die due variabili.* Extras. Bologna, 1939.

RADU BĂDESCU. *Sur l'extraction de l'or par la méthode de la cyanuration.* Extras. Geneva, 1939.

RADU BĂDESCU. *Sur la méthode de la cyanuration dans l'exploitation de l'or.* Extras. Bucureşti, 1938.

RADU BĂDESCU. *Semplificazioni ed estensioni del metodo di Picone per l'integrazione delle equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine di tipo iperbolico.* Extras. Roma, 1938.

L. CAGNIARD. *Réflexion et réfraction des ondes séismiques progressives.* Gauthier-Villars. Paris, 1939.

JULIO R. CASTINEIRAS. *El proyecto economico de estructuras de hormigon armado.* La Plata (Argentina), 1939.

O. ENULESCU. *Teorema lui* ROLLE. Monografia Nr. 3. Biblioteca revistei „Pitagora".

S. STOÏLOW. *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques.* Paris, 1938.

TH. VESCAN. *La théorie des courbes définies comme l'intersection des deux surfaces représentées paramétriquement.* (Extras din *„Bulletin scientifique de l'Ecole Polytechnique de Timişoara"*). Timişoara 1939.

Mechanics by William Fogg Osgood — New-York 1937.

In Europa este un lucru obişnuit de a se admira realizările technice ale Americii, realizări ce ne surprind prin ingeniozitatea lor sau ne covârşesc prin proporţiile lor uriaşe.

Aceste rezultate le socotesc datorite în bună parte spiritului american ce face imediat legătura între teoria cea mai abstractă şi realizarea practică corespunzătoare. In acest spirit este scrisă Mecanica D-lui WILLIAM FOGG OSGOOD. Autorul concentrează în numai 495 pagini, toate principiile şi rezultatele mecanicii clasice. Lucrarea cuprinde următoarele capitole: Statica punctului material; Statica corpului rigid; Mişcarea punctului material; Dinamica corpului rigid; Cinematica în plan; Rotaţia; Lucru mecanic şi energia; Impactul; Mişcarea relativă şi mişcarea axelor! Ecuaţiunile lui LAGRANGE şi mişcările virtuale; Ecuaţiunile canonice ale lui HAMILTON; Principiul lui D'ALEMBERTS; Principiul lui HAMILTON şi principiul celei mai mici acţiuni; Transformările de contact; Soluţia ecuaţiunilor lui HAMILTON; Apendice.

Fiecare capitol este complectat cu exemple admirabil alese precum şi cu probleme propuse originale foarte interesante.

Subliniez faptul că unele din aceste probleme *nu cuprind în enunţ datele necesare,* elevul trebuind *să aleagă singur* elementele de care are nevoie pentru rezolvarea problemei. Elevul este astfel obligat de *a gândi ce date îi trebuesc* şi *de a culege din viaţa practică mărimi numerice raţionale pentru aceste date.*

Este axact modul cum se prezintă în viaţa reală orice problemă spre rezolvare.

In concluzie lucrarea D-lui WILLIAM FOGG OSGOOD pe lângă interesul ce-l prezintă ca manual teoretic, este de o necontestată valoare practică şi pedagogică. Textul admirabil tipărit cuprinde şi o planşe de o rară finete reprezentând *curbele lui* LISSAJOU.

ALEXANDRU STOENESCU.

CERERI

290. In *„Foaia Cărţilor şi a Manuscriptelor după care se paradosesc* [se predau] *obiectele în şcoalele publice"* din Moldova pe anul şcolar 1838—1839, este trecută şi:

„Aritmetică, *pentru incepători. Elementele Aritmeticei până la proporţii, cu aplicaţiile practice, manuscris de* AGA G. ASACHI".

Se cunoaşte vreun exemplar din acea *Aritmetică*?

I. IONESCU.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

W. LIETZMANN. Der pythagoraische Lehrsatz. Lipsca, 1912.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

C. ALASIA. Rassegna di matematica, 1912.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

LUDWIG MATTHIESSEN. Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen.

WILHELM SCHIMIDT. Herons von Alexandria Druckwerke und Automatenlheater. Griechische und Deutsch herausgegeben. Leipzig, 1899.

L. NIX UND W. SCHMIDT. Herons von Alexandria Mechanik und Katoptrik. Ubersetzung. Leipzig, 1900.

HERMANN SCHÖNE. Herons von Alexandria Vermessungslehre und Dioptra. Griechisch und Deutsch. Leipzig, 1903.

J. L. HEIBERG. Heromis Alexandrini opera quae supersunt omnia Vol. IV Heronis definitionis cum variis collectionibus heronis quae feruntur geometrica. Copiis Guilelmi Schmidt usus. Lipsiae, 1912.

J. L. HEIBERG. Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia Vol. V Heronis quae feruntur stereometrica et de mensuris. Copiis Guilelmi Schmidt usus. Lipsiae, 1914.
Donate de D-l S. MARCOVICI.

I. L. HEIBERG. Naturwissenschaften Mathematik und Medizin im elassischen Altertum. Leipzig, 1920.

PAUL PAINLEVÉ. Les axiomes de la Mécanique, note sur le propagation de la lumière. Paris, 1922.
Donate de D-l VICTOR MARIAN.

EDUARD COLLIGNON. Cours de mécanique appliquée aux constructions. Ed. II. Paris, 1880.

A. DESBOVES. Questions de trigonométrie rectiligne. Ed. III. Paris, 1884.

A. LEGENDRE & M. BLANCHET. Elemente de Geometrie. Traducţiune de J. M. RIURIANU şi E. ANGELESCU. Ed. I. Bucureşti, 1865.
Donate de D-l M. PORTOCALĂ, Inginer.

PAUL MONTEL. Sur quelques séries à coefficients récurrents. (Extras). Cracovia 1936.

LUCIEN GODEAUX. Les géométries. Paris, 1937.
Donate de D-l P. SERGESCU.

M. GRUEY. Leçons d'astronomie. Paris, 1885.

ABEL SOUCHON. Traité d'astronomie pratique, Paris, 1883.

A. MANNHEIM. Cours de géométrie descriptive. Paris, 1886.

O. SCHMIDT - DUMONT. Die mathematischen Elemente der Erkenntnisstheorie. Berlin, 1878.

W. FOERSTER. Studien zur Astronomie. Berlin, 1888.

C. F. GEISER. Die Theorie der Kegelschnitte. Leipzig, 1875.

W. ERLER. Die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. Leipzig, 1877.

A. DRONKE. Die Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. Leipzig, 1881.

TH. REYE. Syntetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme. Leipzig, 1879.

V. SCHLEGEL. System der Raumlehre, I & II Theile, Leipzig, 1872.

C. F. GEISER. Einleitung in die synthetische Geometrie, Leipzig, 1869.

E. HESS. Einleitung in die Lehre der Kugelteilung. Leipzig, 1883.

W. FR. SCHÜLER. Die Arithmetik und Algebra in philosophischer Begründung. Leipzig, 1873.

O. SCHLÖMILCH. Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung der Geometrie des Maases, I & II Theile. Leipzig, 1874.

Donate de D-l GENERAL C. FELIX.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2405. *Se dau două axe triunghiulare* OX *şi* OY. *Pe ordonatele corespunzătoare lui* $x = -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5$ *se consideră segmentele cuprinse între ordonatele* $(-1, +1)$, $(-2, -1)$, $(-2, -1)$, $(-1, +1)$, $(+1, +2)$, $(+1, +2)$, $(-1, +1)$, $(+1, +2)$, $(-2, -1)$, $(-1, +1)$, $(-1, +1)$. *Care este gradul cel mai mic al unei curbe algebrice care poate intersecta toate aceste 11 segmente?*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-l E. GRIGORESCU.

Nu există nici o dreaptă care să poată tăia cele 11 segmente. In adevăr, pentru ca o dreaptă să intersecteze segmentele de pe dreapta $x = -3$ şi $x = +3$ trebue ca ordonata ei la origină să fie cuprinsă între -1 şi $+1$. Ca să întâlnească segmentul de pe axa OY trebue ca ordonata la origină să fie cuprinsă între $+1$ şi $+2$.

Observăm acum că dreapta $y = 1$ taie segmentele din dreptul lui $x = -5$, $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 4$, $x = 5$. Dreapta $y = -1$ taie celelalte segmente rămase la $x = -4$, $x = -3$, $x = 3$. Reese de aici că fascicolul $(y^2 - 1) = 0$ le taie pe toate cele 11 segmente. Deci gradul cel mai mic căutat este 2.

PROBLEMA 2529. *Să se arate că dacă* a, b, c *sunt trei termeni ai şirului lui* FIBONACCI, *nu putem avea*

$$a^n = b^n + c^n .$$

SEB. KAUFMANN.

Soluţia autorului. Intre trei termeni consecutivi ai şirului lui FIBONACCI avem relaţiunea

$$a = b + c$$

$$\therefore \qquad a^n = b^n + c^n + f(b, c).$$

Termenii şirului lui FIBONACCI fiind pozitivi, $f(b, c) > 0$ şi deci când $n > 1$, avem totdeauna:

$$a^n > b^n + c^n .$$

Notă. 1°. Pe copertele Vol. XXIII şi XXXVI sunt anunţaţi ca rezolvitori ai acestei probleme D-nii : M. GHERMĂNESCU şi I. B. FLORESCU.

Ulterior nu mai găsesc anunţaţi alţi rezolvitori.

2°. Am dat soluţia autorului pentru a arăta cum a înţeles D-sa problema, care în enunţ nu precizează că cei trei termeni sunt consecutivi.

Problema se poate demonstra şi în cazul general când a, b, c sunt 3 termeni oarecare din şirul lui FIBONACCI, fie

$$a = u_m > b = u_p > c = u_q . \tag{1}$$

Se ştie că

$$u_m = u_{m-1} + u_{m-2} = 2u_{m-2} + u_{m-3}$$

$$\therefore \qquad u_m = 3u_{m-3} + 2u_{m-4}$$

$$\therefore \qquad u_m = 5u_{m-4} + 3u_{m-5} = 8u_{m-5} + 5u_{m-6}$$

şi din aproape în aproape

$$a = u_m = \alpha u_{p+2} + \beta u_{p+1}$$

aşa că

$$a^n = \alpha^n . u_{p+2}^n + \beta^n u_{p+1}^n + F(\alpha u_{p+2} + \beta u_{p+1}) \tag{2}$$

ceea ce arată că pentru $n > 1$ nu se poate avea

$$a^n = b^n + c^n$$

căci din (1) şi (2) se vede că

$$u_{p+2}^n > b^n = u_p^n \quad \text{şi} \quad u_{p+1}^n > c^n = u_q^n$$

deci cu atât mai mult

$$a^n > b^n + c^n .$$

3°. In cazul, cel mai general, când a, b, c sunt numere oarecare, ecuaţia

$$a^n = b^n + c^n$$

nu se poate rezolva în numere întregi pentru $n > 2$. Rezolvarea în numere întregi a acestei ecuaţii este cunoscuta problemă a lui FERMAT, asupra căreia recomand a se consulta notele publicate de D-l I. IONESCU în *Gazeta Matematică*, Vol. XVI, pag. 452 şi Vol. XXXVII, pag. 177 şi 355.

4°. Problema se rezolvă ca la 2° şi pentru n negativ sau fracţionar.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4642. *O dreaptă* Δ *exterioară triunghiului* ABC *taie laturile lui în punctele* α, β, *şi* γ. *Cercurile ortogonale cercului* ABC *având centrele în punctele* α, β, γ *intersectează respectiv laturile* BC, CA *şi* AB *în punctele* (A_1 *şi* A_2); (B_1 *şi* B_2) *şi* (C_1 *şi* C_2), *unde s'a notat cu* A_1, B_1, C_1 *punctele interioare cercului* ABC *şi cu* A_2, B_2, C_2 *punctele exterioare lui. Să se arate că dreptele* AA_1, BB_1, CC_1 *sunt concurente şi că punctele* A_2, B_2, C_2 *sunt în linie dreaptă.*

TH. GH. COCEA.

Soluţia I, dată de D-nii: I. I. ŢIŢEICA, M. C. POSTELNICESCU şi R. V. APOSTOL (Lic. militar, Mânăstirea Dealului); AL. POPESCU-ZORICA (Clasa VIII-a Lic. Particular, Bucureşti); S. R. TURCU (Lic. militar, Iaşi) şi V. ECKSTEIN.

Cercul de centru α şi ortogonal cercului ABC determină pe dreapta BC, punctele A_1, A_2 astfel încât

$$(BCA_1A_2) = -1.$$

Avem deci şi relaţia metrică (G. ŢIŢEICA, *Culegere de probleme de geometrie*, XII, 4):

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = \frac{\overline{A_2B}^2}{\overline{A_2C}^2} = \frac{\overline{A_1B}^2}{\overline{A_1C}^2}$$

care, înmulţită cu analoagele ei demonstrează problema.

Soluţia II, dată de D-l M. AL. VASILESCU-STABU (Lic. „Gh. Lazăr", Bucureşti).

Această problemă este propusă şi rezolvată în *Exercices de Géometrie Moderne* de G. PAPELIER cartea II, Nr. 79, pag. 67. In soluţia dată, la pag. 215, Vol. XLIII, *Gazeta Matematică*, problemei 4709 propusă de D-l G. D. SIMIONESCU şi în articolul dela pag. 570, acelaşi volum, al D-lui G-L GH. I. POPESCU, s'a arătat în plus că cercurile (α), (β), (γ) au acelaş ax radical, care trece prin centrul cercului ABC.

Notă. 1°. D-l N. D. ŞTEFĂNESCU (Lic. militar, Târgovişte) rezolvă foarte bine problema plecând dela relaţia

$$\overline{\alpha A_1}^2 = \overline{\alpha B} \cdot \overline{\alpha C}$$

şi dela teorema lui CHASLES

$$\overline{\alpha B} + \overline{BA_1} + \overline{A_1\alpha} = 0.$$

2°. D-nii N. D. ŞTEFĂNESCU şi I. I. ŢIŢEICA observă că dreapta $A_2B_2C_2$ este polara trilineară a punctului de întâlnire P al dreptelor AA_1, BB_1, CC_1 şi deduc că reciproc, dacă AA_1, BB_1, CC_1 sunt cevienele unui punct P a cărui polară trilineară este $A_2B_2C_2$, atunci mijloacele α, β, γ ale segmentelor A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sunt în linie dreaptă.

3°. Din proprietatea precedentă, D-l N. D. ŞTEFĂNESCU deduce şi colinearitatea următoarelor grupe de 3 puncte:

$$(A_2, B_1, C_1), (B_2, C_1, A_1) \text{ şi } (C_2, A_1, B_1).$$

4°. S'a primit în ultimul timp o soluţie bună dela D-l C. V. PANTELIMON.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4782. *Dintr'un punct* P, *situat în planul unui cerc fix* (O), *se duce o secantă care taie cercul* (O) *în* A *şi* B. *Să se găsească învelitoarea polarei punctului* P *în raport cu cercul descris pe* AB *ca diametru, când secanta* PAB *se roteşte în jurul lui* P.

AL. ŞCODRANO.

Soluţie şi generalizare, date de D-l I. I. ŢIŢEICA (Liceul militar, Târgovişte).

In locul cercului (O) consider o conică (C). Polara lui P faţă de cercul (O') de diametru AB este o dreaptă Δ perpendiculară pe AB în punctul P' conjugatul lui P faţă de A, B. Când secanta PAB se roteşte în jurul lui P, punctul P' descrie polara Δ' a lui P faţă de conica (C) şi problema revine a găsi învelitoarea laturei Δ

a unui unghiu drept al cărui vârf descrie o dreaptă Δ', iar cealaltă latură trece printr'un punct fix P. Se ştie că această învelitoare este o parabolă cu focarul în P şi având pe Δ' ca tangentă la vârf.

Notă. 1°. Au dat bune soluţii geometrice analoage pentru cazul particular al cercului D-nii: M. AL. VASILESCU-STABU (Lic. „Mihai Viteazul", Alba-Iulia); AD. O. ŞAICHIN (Lic. „Matei Basarab", Bucureşti) şi R. V. APOSTOL (Lic. militar, Târgovişte).

2°. Bune soluţii analitice au dat D-nii: V. I. BUCURENCIU, AD. DEUTSCH, D. RIPIANU, N. D. ŞTEFĂNESCU şi MIREL D. STOENESCU.

GH. B.

PROBLEMA 4805. *Dându-se determinanţii:*

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\omega_j & \cos^2\omega_j \end{vmatrix} \; ; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \sin\omega_j & \sin^2\omega_j \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\omega_j & \sin^2\omega_j \end{vmatrix} \; ; \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & \sin\omega_j & \cos^2\omega_j \end{vmatrix} \; (j = 1, 2, 3)$$

să se determine relaţia

$$D_1 - D_3 + i(D_2 - D_4) = 16 \sin\frac{\omega_1-\omega_2}{2} \sin\frac{\omega_2-\omega_3}{2} \sin\frac{\omega_1-\omega_3}{2} \times$$

$$\left(\sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2} \sin\frac{\omega_2+\omega_3}{2} \sin\frac{\omega_3+\omega_1}{2} - i\cos\frac{\omega_1-\omega_2}{2} \cos\frac{\omega_2-\omega_3}{2} \cos\frac{\omega_3-\omega_1}{2} \right)$$

unde $i = \sqrt{-1}$. *(Enunţ rectificat).*

LT. MIHAIL I. FOCŞENEANU.

Soluţie. Determinanţii D_1 şi D_2 sunt de tip VANDERMONDE şi deci:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\omega_j & \cos^2\omega_j \end{vmatrix} = (\cos\omega_1 - \cos\omega_2)(\cos\omega_2 - \cos\omega_3)(\cos\omega_3 - \cos\omega_1)$$

$$= -8 \sin\frac{\omega_1-\omega_2}{2} \sin\frac{\omega_2-\omega_3}{2} \sin\frac{\omega_3-\omega_1}{2} \sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2} \sin\frac{\omega_2+\omega_3}{2} \sin\frac{\omega_3+\omega_1}{2}$$

$$= 8 \sin\frac{\omega_1-\omega_2}{2} \sin\frac{\omega_2-\omega_3}{2} \sin\frac{\omega_1-\omega_3}{2} \sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2} \sin\frac{\omega_2+\omega_3}{2} \sin\frac{\omega_3+\omega_1}{2}.$$

Se găseşte analog:

$$D_2 = -8 \sin\frac{\omega_1-\omega_2}{2} \sin\frac{\omega_2-\omega_3}{2} \sin\frac{\omega_1-\omega_3}{2} \cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2} \cos\frac{\omega_2+\omega_3}{2} \cos\frac{\omega_3+\omega_1}{2}.$$

Pentru D_3 şi D_4 avem:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\omega_j & \sin^2\omega_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos\omega_j & 1-\cos^2\omega_j \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & \cos\omega_j & \cos^2\omega_j \end{vmatrix} = -D_1$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & \sin\omega_j & \cos^2\omega_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \sin\omega_j & 1-\sin^2\omega_j \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & \sin\omega_j & \sin^2\omega_j \end{vmatrix} = -D_2 .$$

In acest caz avem:

$$D_1 - D_3 + i(D_2 - D_4) = 2D_1 + 2iD_2 = 2(D_1 + iD_2)$$

$$= 16 \sin\frac{\omega_1-\omega_2}{2} \sin\frac{\omega_2-\omega_3}{2} \sin\frac{\omega_1-\omega_3}{2} \left(\sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2} \sin\frac{\omega_2+\omega_3}{2} \sin\frac{\omega_3+\omega_1}{2} \right.$$

$$\left. - i\cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2} \cos\frac{\omega_2+\omega_3}{2} \cos\frac{\omega_3+\omega_1}{2} \right)$$

Q. E. D.

IONEL I. STAMATE
Student matematici Cluj.

Observaţii. Foarte uşor se obţine relaţia:

$$D_1 + D_3 \pm i(D_2 + D_4) = 0.$$

Analog avem relaţia:

$$D_1 - D_2 + i(D_3 + D_4) = 8(1-i) \sin\frac{\omega_1-\omega_2}{2} \sin\frac{\omega_2-\omega_3}{2} \sin\frac{\omega_1-\omega_3}{2} \times$$

$$\left[\sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2} \sin\frac{\omega_2+\omega_3}{2} \sin\frac{\omega_3+\omega_1}{2} + i\cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2} \cos\frac{\omega_2+\omega_3}{2} \cos\frac{\omega_3+\omega_1}{2} \right].$$

M. I. F.

PROBLEMA 4883. *Fie* I *centrul cercului înscris triunghiului* ABC ; B′, C′ *picioarele bisectoarelor,* B_1, C_1 *punctele unde paralelele din* I *la* AB, AC *taie pe* AC, AB; *fie încă* $\beta\gamma$ *o paralelă la* BC — β *pe* AC, ... — βI, γI *taie pe* AB, AC *în* γ', β'. *Dreptele* $\beta'\gamma'$, B′C′, B_1C_1 *şi paralela din* I *la* BC, *se întâlnesc pe tangenta în* A *la cercul circumscris.*

N. N. MIHĂILEANU.

Generalizare. Fie M un punct arbitrar în planul triunghiului ABC; $\beta\gamma$ o paralelă la BC ; βM, γM taie pe AB, AC în γ', β'. Punctele β', γ' *descriu diviziuni omografice* de baze AC, AB în care A este *autoomolog* —, obținut când $\beta\gamma$ trece prin A. Deci dreapta ce unește punctele omoloage β', γ' *trece printr'un punct fix* N. Dreptele B'C', B_1C_1 și paralela din M la BC fac parte din categoria precedentă când $\beta\gamma$ se suprapune pe BC, e la infinit ori trece prin I; toate dreptele se întâlnesc deci în punctul N. Fie P, Q, R intersecțiile (AM, BC), (AN, BC), (AM, B'C'); din considerarea fascicolelor anarmonice egale, e ușor de urmărit că

$$A(QBPC) = A(NC'IB') = M(NC'IB') = (\infty CPB)$$

deci

$$\frac{QB}{QC} = \left(\frac{PB}{PC}\right)^2.$$

Dacă M e un punct oarecare pe ceviana AP, N este pe AQ, dat de relația precedentă, pe paralela din M la BC.

Cazuri particulare: a) Dacă AMP e bisectoarea interioară ori exterioară din A

$$\frac{PB}{PC} = \pm\frac{c}{a} \quad \text{și} \quad \frac{QB}{QC} = \frac{c^2}{a^2}$$

deci AQ e tangenta din A (cazul problemei 4883).

b) Dacă M este pe mediana din A ori paralela din A la BC, N este pe această ultimă dreaptă.

Observare: 1. Soluție directă, foarte bună, dată de D-nul HORIA M. BODNĂRESCU (lic. „T. Maiorescu", București).

2. Celelalte soluții nu sunt de semnalat; una neglijentă, alta zăpăcită și alte două care vor să demonstreze totul cu omografia, fără să mai gândească nimica.

In ultimul timp s'a mai primit o foarte bună soluție directă, dela D-l CONST. PANTELIMON (lic. militar, Iași).

PROBLEMA 4927. *Care numere mai mici ca 100 se pot scrie cu aceleași cifre în două sisteme de numerație diferite?*

I. IONESCU.

Vom zice prescurtat *sistemul n* în loc de *sistemul de numeraţiune cu baza n.*

Pentru a rezolva problema trebue mai întâiu să cunoaştem câte cifre au numerele 1—99 în diferite sisteme. Pentru aceasta am format tabloul următor:

Sistemul	Numerele care au						
	1 cifră	2 cifre	3 cifre	4 cifre	5 cifre	6 cifre	7 cifre
2	0—1	2— 3	4— 7	8—15	16—31	32—63	64—99
3	0—2	3— 8	9—26	27—80	81—99	—	—
4	0—3	4—15	16—63	64—99	—	—	—
5	0—4	5—24	25—99	—	—	—	—
6	0—5	6—35	36—99	—	—	—	—
7	0—6	7—48	49—99	—	—	—	—
8	0—7	8—63	64—99	—	—	—	—
9	0—8	9—80	81—99	—	—	—	—
10	0—9	10—99	—	—	—	—	—
$n \geqslant 10$	0—$(n-1)$	n—99	—	—	—	—	—

Din acest tablou deducem următoarele:

a) Numerele 0 şi 1 se scriu la fel în orice sistem. Ele constituesc dar primele soluţii ale problemei.

b) Numerele de o cifră se scriu la fel în orice sistem cu baza superioară lor. Astfel 2 se scrie la fel pentru $n > 2$, adică în sistemele 3, 4, 5, ...

c) Să căutăm soluţiile N *de două cifre.* Ele vor fi de forma *ab, ba* scrise în sistemele B şi B′. Va trebui să avem:

$$N = aB + b = bB' + a \quad , \quad (a<B,\ b<B,\ a<B',\ b<B').$$

$$\therefore \qquad a(B-1) = b(B'-1),$$

$$\therefore \qquad a/b = (B'-1)/(B-1).$$

Fie: $a/b = m/n,$

în care (m/n) este o fracţie ireductibilă. De aici reese:

$$B'-1 = mk \quad , \quad B-1 = nk,$$

$$\therefore \quad B = nk+1 \quad , \quad B' = mk+1.$$

Pentru a găsi soluţii procedăm în modul următor. Fie două cifre, de exemplu 6 şi 8. Să vedem în ce sisteme 68 şi 86 pot reprezenta un acelaşi număr N. Avem $6/8 = 3/4$. Cum 68 şi 86 sunt scrise în sistemele cu bazele B şi B' reese că $B \geqslant 9$, $B' \geqslant 9$. Formulele precedente dau:

$$B = 4k + 1 \quad , \quad B' = 3k + 1.$$

Se vede că putem lua $k = 3$ şi deci $B = 13$ şi $B' = 10$. Deci numărul 68 în sistemul 13 este acelaşi cu numărul 86 în sistemul 10. Aşa dar $N = 86$ scris în sistemul zecimal este o soluţie a problemei.

Dacă luăm $k = 4$ găsim $B = 17$, $B' = 13$ şi deci 68 în sistemul 17 este acelaşi cu 86 în sistemul 13. Aşa dar

$$N = 6 \times 17 + 8 = 8 \times 13 + 6 = 110.$$

Această soluţie nu este însă admisibilă căci depăşeşte limita de 99 ca soluţie impusă de enunţul problemei.

Procedând în acest fel găsim următoarele 233 de soluţii:

$a = 1$, $b = 2$. B = 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23; 25;
B' = 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13;
N = 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23; 25; 27;

B = 27; 29; 31; 33; 35; 37; 39; 41; 43; 45; 47;
B' = 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 23; 24;
N = 29; 31; 33; 35; 37; 39; 41; 43; 45; 47; 49;

B = 49; 51; 53; 55; 57; 59; 61; 63; 65; 67; 69;
B' = 25; 26; 27; 28; 29; 30; 31; 32; 33; 34; 35;
N = 51; 53; 55; 57; 59; 61; 63; 65; 67; 69; 71;

B = 71; 73; 75; 77; 79; 81; 83; 85; 87; 89; 91;
B' = 36; 37; 38; 39; 40; 41; 42; 43; 44; 45; 46;
N = 73; 75; 77; 79; 81; 83; 85; 87; 89; 91; 93;

B = 93; 95; 97.
B' = 47; 48; 49.
N = 95; 97; 99.

$a = 1$, $b = 3$. B = 10; 13; 16; 19; 22; 25; 28; 31; 34; 37; 40;
B' = 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14;
N = 13; 16; 19; 22; 25; 28; 31; 34; 37; 40; 43;

B = 43; 46; 49; 52; 55; 58; 61; 64; 67; 70; 73;
B' = 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 23; 24; 25;
N = 46; 49; 52; 55; 58; 61; 64; 67; 70; 73; 76;

B = 76; 79; 82; 85; 88: 91; 94.
B' = 26; 27; 28; 29; 30; 31; 32.
N = 79; 82; 85; 88; 91; 94; 97.

$a = 1,\ b = 4.$ B = 17; 21; 25; 29; 33; 37; 41; 45; 49; 53; 57;
B′= 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15;
N = 21; 25; 29; 33; 37; 41; 45; 49; 53; 57; 61;

B = 61; 65; 69; 73; 77; 81; 85; 89; 93.
B′= 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 23; 24.
N = 65; 69; 73; 77; 81; 85; 89; 93; 97.

$a = 1,\ b = 5.$ B = 26; 31; 36; 41; 46; 51; 56; 61; 66; 71; 76;
B′= 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16;
N = 31; 36; 41; 46; 51; 56; 61; 66; 71; 76; 81;

B = 81; 86; 91.
B′= 17; 18; 19.
N = 86; 91; 96.

$a = 1,\ b = 6.$ B = 37; 43; 49; 55; 61; 67; 73; 79; 85; 91.
B′= 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16.
N = 43; 49; 55; 61; 67; 73; 79; 85; 91; 97.

$a = 1,\ b = 7.$ B = 50; 57; 64; 71; 78; 85; 92.
B′= 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14.
N = 57; 64; 71; 78; 85; 92; 99.

$a = 1,\ b = 8.$ B = 65; 73; 81; 89.
B′= 9; 10; 11; 12.
N = 73; 81; 89; 97.

$a = 1,\ b = 9.$ B = 82.
B′= 10.
N = 91.

$a = 2,\ b = 3.$ B = 7; 10; 13; 16; 19; 22; 25; 28; 31; 34; 37;
B′= 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23; 25;
N = 17; 23; 29; 35; 41; 47; 53; 59; 65; 71; 77;

B = 40; 43; 46.
B′= 27; 29; 31.
N = 83; 89; 95.

$a = 2,\ b = 4.$ B = 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23; 25; 27; 29;
B′= 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15;
N = 22; 26; 30; 34; 38; 42; 46; 50; 54; 58; 62;

B = 31; 33; 35; 37; 39; 41; 43; 45; 47.
B′= 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 23; 24.
N = 66; 70; 74; 78; 82; 86; 90; 94; 98.

$a = 2,\ b = 5.$ B = 16; 21; 26; 31; 36; 41; 46.
B′= 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19.
N = 37; 47; 57; 67; 77; 87; 97.

$a = 2,\ b = 6.$ B = 19; 22; 25; 28; 31; 34; 37; 40; 43; 46.
B′= 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16.
N = 44; 50; 56; 62; 68; 74; 80; 86; 92; 98.

$a = 2,\ b = 7.$ B = 29; 36; 43.
B′= 9; 11; 13.
N = 65; 79; 93.

$a = 2,\ b = 8.$ B = 33; 37; 41; 45.
B′= 9; 10; 11; 12.
N = 74; 82; 90; 98.

$a = 3,\ b = 4.$ B = 9; 13; 17; 21; 25; 29.
B′= 7; 10; 13; 16; 19; 22.
N = 31; 43; 55; 67; 79; 91.

$a = 3,\ b = 5.$ B = 11; 16; 21; 26; 31.
B′= 7; 10; 13; 16; 19.
N = 38; 53; 68; 83; 98.

$a = 3,\ b = 6.$ B = 13; 15; 17; 19; 21; 23; 25; 27; 29; 31.
B′= 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16.
N = 45; 51; 57; 63; 69; 75; 81; 87; 93; 99.

$a = 3,\ b = 7.$ B = 22; 29.
B′= 10; 13.
N = 73; 94.

$a = 3,\ b = 8.$ B = 25.
B′= 10.
N = 83.

$a = 3,\ b = 9.$ B = 28.
B′= 10.
N = 93.

$a = 4,\ b = 5.$ B = 11; 16; 21.
B′= 9; 13; 17.
N = 49; 69; 89.

$a = 4,\ b = 6.$ B = 10; 13; 16; 19; 22.
B′= 7; 9; 11; 13; 15.
N = 46; 58; 70; 82; 94.

$a = 4,\ b = 7.$ B = 15; 22.
B′= 9; 13.
N = 67; 95.

$a = 4,\ b = 8.$ B = 17; 19; 21.
B′= 9; 10; 11.
N = 76; 84; 92.

$a = 5,\ b = 6.$ B = 13.
B′= 11.
N = 91.

$a = 5,\ b = 7.$ B = 15.
B′= 11.
N = 82.

$a = 5,\ b = 8.$ B = 17.
B′= 11.
N = 93.

$a = 6,\ b = 7.$ B = 15.
B′= 13.
N = 97.

$a = 6,\ b = 8.$ B = 13.
B′= 10.
N = 86.

I. I.

(Va urma).

PROBLEMA 5004. *Se dă un triunghiu fix* ABC, *dreptunghic în* A. *Printr'un punct fix* P *din plan, se duc paralelele* Δ *şi* Δ′ *respectiv la catetele* AB *şi* AC. *Fie* M *un punct mobil din plan. Dreptele* MB *şi* MC *taie respectiv dreptele* Δ *şi* Δ′ *în punctele* D *şi* E.

1. *Se cere locul punctului* M *astfel ca* DE *să fie paralelă cu* BC.

2. *Considerând punctul* M *fix, iar* P *mobil, se cere locul lui* P *în aceleaşi condiţiuni.*

3. *Fie* N *intersecţia paralelelor duse prin* E *şi* D, *respectiv la* Δ *şi* Δ′. *Punctele* P *şi* M *sunt fixe, iar* B *şi* C *alunecă pe paralelele duse din* A *(fix) respectiv la* Δ *şi* Δ′. *Se cere, în aceste condiţiuni, locul punctului* N.

D. MAVRODIN.

Soluţie analitică. 1°. Luăm ca axă Ox cateta AB, iar ca axă Oy cateta AC. Fie B (b, o), C (o, c), P (p, q), M (u, v) coordonatele punctelor B, C, P, M. Ecuaţiile dreptelor BM, CM fiind:

$$(BM)\ \frac{y-v}{-v} = \frac{x-u}{b-u}\ ,\quad (CM)\ \frac{y-v}{c-v} = \frac{x-u}{-u},$$

ele taie respectiv dreptele $\Delta (y = q)$, $\Delta' (x = p)$ în punctele D, E de coordonate

$$D\left[u - \frac{(b-u)(q-v)}{v},\ q\right] \quad , \quad E\left[p,\ v - \frac{(c-v)(p-u)}{u}\right].$$

Coeficientul unghiular al dreptei BC fiind $-\frac{c}{b}$, iar al dreptei DE fiind raportul între diferența ordonatelor și diferența absciselor punctelor D și E, condiția de paralelism se obține egalând acești doi coeficienți unghiulari, ceea ce duce la

$$\frac{v - \frac{(c-v)(p-u)}{u} - q}{p - u + \frac{(b-u)(q-v)}{v}} = -\frac{c}{b}$$

sau, după simplificări,

$$(1) \qquad (pv - qu)(bv + cu - bc) = 0,$$

care se descompune în

$$(2) \qquad bv + cu - bc = 0$$

și

$$(3) \qquad pv - qu = 0.$$

Prima arată cu M se află pe BC, care face, în adevăr, parte din locul geometric, căci în acest caz DE se suprapune pe BC, fiind astfel mai mult decât paralele.

A doua reprezintă dreapta AP.

Deci *locul se compune din dreptele* BC *și* AP.

2°. Când M e fix, iar P variabil, ajungem tot la ecuațiile (2) și (3), cu deosebirea că de data aceasta u și v sunt fixe, iar p și q variabile.

Dacă M este pe BC, în cazul relației (2), DE se confundă cu BC, oricare ar fi punctul P, care deci poate avea *orice* poziție în plan; dacă M nu este pe BC, atunci (2) nu este posibilă, iar (3) arată că *locul lui* P *este dreapta* AM.

3°. Enunțul este incomplect în acest punct, căci nu dă nici o indicațiune în privința dependenței variațiilor punctelor B și C, una față de alta, ceea ce face că avem doi parametrii arbitrari b și c, deci nu se poate pune problema unui loc geometric.

Coordonatele punctului N se obţin rezolvind sistemul format de ecuaţiile dreptelor DN, EN, adică:

$$x = u - \frac{(b-u)(q-v)}{v}, \quad y = v - \frac{(c-v)(p-u)}{u}.$$

Impunând o condiţie variaţiei ipotenuzei BC, se obţine o relaţie între b şi c care, fiind eliminate între această relaţie şi ecuaţiile dreptelor DN, EN, duce la ecuaţia locului lui N.

Notă. 1°. Pentru prima parte a problemei au găsit ca loc numai dreapta AP, D-nii: NICULESCU C. MIRCEA şi SOLOMON ISAC.

D-nii MIHU CERCHEZ şi M. ROSENBLATT, zis ROTH, au ajuns la echivalentul relaţiei (1), fără să observe că se descompune în factori, conchizând că locul e o *conică.*

D-l O. ENULESCU a găsit că locul e o *cubică!*

2°. Pentru a doua parte, au găsit ca loc numai dreapta AM, D-nii: M. CERCHEZ, M. NICULESCU, M. ROSENBLATT şi SOLOMON ISAC.

3°. Pentru a treia parte, unii corespondenţi au făcut ipoteze suplimentare. Astfel, D-nii: M. CERCHEZ şi M. ROSENBLATT au presupus BC = a = const şi au găsit ca loc, primul o elipsă, iar al doilea o conică.

D-l M. NICULESCU a presupus că BC rămâne paralelă cu ea însăşi, iar A, M, P sunt colineare, găsind ca loc o paralelă la BC, dusă prin P-

4°. Problema admite de altfel o soluţie geometrică simplă, pentru primele două părţi. In adevăr, dacă DE şi BC sunt paralele, urmează că perechile de triunghiuri (MBC, MDE), (BAC, DPE) sunt asemenea, deci:

$$\frac{MC}{ME} = \frac{MB}{MD} = \frac{BC}{DE}, \quad \frac{AC}{PE} = \frac{AB}{PD} = \frac{BC}{DE},$$

din care deducem:

$$\frac{MC}{ME} = \frac{AC}{PE}.$$

Observând apoi că $\sphericalangle MCA = \sphericalangle PEM$, căci

$$\sphericalangle MCA = \sphericalangle MCB + \sphericalangle BCA = \sphericalangle MED + \sphericalangle DEP = \sphericalangle PEM,$$

rezultă că triunghiurile MCA, PEM sunt asemenea ca având câte un unghiu egal cuprins între laturi proporţionale, deci:

$$\sphericalangle CMA = \sphericalangle PME,$$

adică A, M, P sunt *colineare.*

M. G.

PROBLEMA 5084. *Să se rezolve un triunghiu oarecare fiind cunoscute lungimile bisectoarelor, interioară și exterioară unghiului* A, β' și β'' *precum și suprafața triunghiului,* S.

Aplicație numerică :

$$\beta' = 7{,}5 \text{ m} \quad , \quad \beta'' = 30{,}8 \text{ m} \quad , \quad S = 18{,}12 \text{ m}^2.$$

VIRGIL GHIȚESCU.

Fie ABC triunghiul ($b < c$), D piciorul bisectoarei interioare β', E piciorul bisectoarei exterioare β''. Triunghiul de rezolvat nu poate fi isoscel căci atunci $\beta'' = \infty$. Să presupunem $b < c$, în caz contrar, inversăm notațiile.

Triunghiul ADE — se știe — este dreptunghiu în A. Înălțimea sa $AA' = h_a$ este în același timp și înălțimea triunghiului ABC. Avem :

$$\frac{\beta'\beta''}{2} = \frac{h_a\sqrt{\beta'^2+\beta''^2}}{2}$$

$$h_a = \frac{\beta'\beta''}{\sqrt{\beta'^2+\beta''^2}}$$

$$S = \frac{a\beta'\beta''}{2\sqrt{\beta'^2+\beta''^2}}$$

$$(1) \qquad a = \frac{2S\sqrt{\beta'^2+\beta''^2}}{\beta'\beta''}.$$

Un prim element este determinat. Avem apoi :

$$\sphericalangle DAA' = \varphi = \frac{C-B}{2},$$

iar

$$(2) \qquad \cos\frac{B-C}{2} = \frac{\beta''}{\sqrt{\beta'^2+\beta''^2}}.$$

Aplicând triunghiului ABC teorema sinusurilor obținem :

$$\frac{a^2}{\sin^2 A} = \frac{bc}{\sin B \sin C}$$

$$\frac{a^2}{\sin^2 A} = \frac{\frac{2S}{\sin A}}{\frac{1}{2}[\cos(B-C) - \cos(B+C)]} \qquad \frac{a^2}{\sin A} = \frac{4S}{\cos 2\varphi + \cos A}$$

$$(3) \qquad 4S\sin A - a^2\cos A = a^2\cos 2\varphi.$$

Am ajuns la o ecuație trigonometrică de tip cunoscut care ne va procura:

$$\sin(A - \psi) = \frac{a^2 \cos 2\varphi}{4S} \cdot \cos\psi$$

unde ψ este dat de

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{a^2}{4S} \cdot$$

Recapitulând conchidem:

Cunoaștem pe a, pe A; cunoaștem pe $B - C$ și pe $B + C = 180^0 - A$. Vor rezulta B și C.

Aplicând în fine iarăși relația sinusurilor, determinăm pe b și c.

Triunghiul este așa dar rezolvat.

Discuție. Problema este totdeauna posibilă și are o singură soluție. Relația (2) dă totdeauna un unghiu φ real.

Construcția geometrică, după determinarea lui a ca a 4-a proporțională între segmentele k, $\frac{h_a}{2}$, k (unde $k^2 = S$) se reduce la a așeza pe DE punctele B și C astfel ca să avem în valoare absolută:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} \cdot$$

Punem:

$$DC = x$$

$$DE = \sqrt{\beta'^2 + \beta''^2} = l.$$

Va rezulta:

$$\frac{a - x}{x} = \frac{l + a - x}{l - x}$$

$$x = \frac{1}{2}(l + a \pm \sqrt{l^2 + a^2}).$$

Aceste ambe rădăcini se pot construi, numai

$$DC = \frac{1}{2}(l + a - \sqrt{l^2 + a^2})$$

este însă acceptabilă deoarece cealaltă conduce — având în vedere

că trebue să avem $a - x > x$ (deoarece şi $c > b$) — la rezultatul absurd $2l + 2\sqrt{l^2 + a^2} < 0$.

In consecinţă se poate construi doar un singur triunghiu.

Aplicaţie numerică. Facem calculele cu ajutorul unei table de logaritmi cu cinci zecimale şi găsim:

$$a = 4{,}9732 \text{ m} \qquad A = 35^0\,30'\,27''$$
$$b = 7{,}3055 \text{ m} \qquad B = 58^0\,33'\,31'',5$$
$$c = 8{,}5412 \text{ m} \qquad C = 85^0\,56'\,01'',5.$$

Au rezolvat numai partea teoretică a problemei, fără a o discuta D-nii: M. CERCHEZ, D. ENESCU, ROM. GVIAZDOMORSCHI, ST. D. IONESCU, V. ONIŞOR, ACHILLE PETRESCU, M. PETRESCU şi C. SULIŢEANU.

Niciuna din soluţiile primite nu aveau exacte rezultatele numerice. Unii rezolvitori nici nu le-au calculat pe toate probabil tot din lipsă de timp, cum se scuză unul dintrânşii!

V. GH.

PROBLEMA 5090. *Să se găsească toate cuburile perfecte de cinci cifre, ştiind că suma cifrelor acestor cuburi este egală cu rădăcina lor cubică.*

G-L GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-l M. AL. VASILESCU-STABU (Lic. „Gh. Lazăr", Bucureşti).

Cel mai mic şi cel mai mare cub de 5 cifre sunt

$$22^3 = 10648 \quad \text{şi} \quad 46^3 = 97336.$$

Numerele cerute N se găsesc deci definite de limitele

$$22 \leqslant N \leqslant 46. \qquad (1)$$

Faţă de divizorul 9, un cub N^3 este de una din formele $9m$, $9m \pm 1$. Ţinând seamă de (1), rezultă că N trebue căutat între *mult.* 9 sau *mult.* 9 ± 1 cuprinşi între 22 şi 46, adică între numerele

26, 27, 28, 35, 36, 37, 44, 45, 46.

Prin ridicarea acestor numere la cub, se găseşte că singurile soluţii ale problemei sunt

$$26^3 = 17576 \quad \text{cu} \quad 26 = 1+7+5+7+6$$

$$27^3 = 19683 \quad \text{cu} \quad 27 = 1+9+6+8+3.$$

Notă. 1°. O soluţie analoagă a dat D-l P. V. CAZANACLI (Ismail).

2°. Au dat soluţii bune D-nii: D. D. BOIANGIU, EM MODÂLCĂ (Lic. „Traian", T.-Severin); M. S. CHERŢMAN, M. F. VĂDUVA (Lic. „I. Mariorescu", Giurgiu); T. C. ŞTEFAN (Elev ofiţer din Geniu); I. I. STAMATE (Student, Cluj); P. I. DRĂGHICESCU, GH. GR. BOGDAN, I. C. PASCARU (Lic. militar Iaşi); V. C. ROLEA (Lic. Naţional, Iaşi); H. L. REISCHER (Iaşi) şi Subloc. M. GRUMĂZESCU.

2°. In exerciţiul 41 dela pag. 197, Vol. XXXII, *Gazeta Matematică*, s'a găsit că cuburile de 4 cifre care se bucură de aceeaşi proprietate sunt

$$17^3 = 4913 \quad \text{şi} \quad 18^3 = 5832.$$

Aceste cuburi au fost găsite şi la problema 4501, rezolvată la pag. 265, Vol. XLII.

3°. In *Exercices d'Arithmétique* de J. FITZ-PATRICK şi G. CHEVREL se dau, la pag. 281, toate cuburile care se bucură de aceeaşi proprietate.

4°. D-l V. THÉBAULT a dat în *Mathesis* LI, ca curiozitate numerică, cuburile

$$1^3 = 1 \; ; \; 8^3 = 512 \; ; \; 171^3 = 5000211 \; ;$$

$$577^3 = 192100033 \; ; \; 585^3 = 200201625$$

la care suma cifrelor rădăcinei este egală cu suma cifrelor cubului.

GH. B.

PROBLEMA 5180. *O mediană a unui triunghiu poate fi semisuma a două laturi ale unui triunghiu?*

I. IONESCU.

Soluţie geometrică dată de D-nii: MIRCEA C. NICULESCU (Liceul „Titu Maiorescu", Bucureşti) şi M. S. CHERŢMAN (Liceul „Ion Maiorescu", Giurgiu).

Vom desebi două cazuri:

I. *Mediana este semisuma laturilor care pleacă din acelaşi vârf cu ea.*

Fie ABC un triunghiu cu mediana AM. Luăm A' simetricul lui A faţă de M şi trasăm dreptele BA', CA'. Avem evident

$\overline{AA'} = 2\overline{AM}$. Figura ABA'C este un paralelogram căci diagonalele AA', BC se taie pe din două. Deci $\overline{BA'} = \overline{AC}$.

In triunghiul ACA' avem:

$$\overline{AB} + \overline{A'B} = \overline{AB} + \overline{AC} > \overline{AA'},$$

$$\therefore \quad \overline{AB} + \overline{AC} > 2\overline{AM},$$

$$\therefore \quad \tfrac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}) > \overline{AM}.$$

Deci mediana este totdeauna mai scurtă ca semisuma laturilor care pleacă din acelaşi vârf cu ea.

II. *Mediana este semisuma unei laturi ce pleacă din acelaşi vârf cu ea şi a laturii opusă acelui vârf.*

Un asemenea triunghiu se poate construi. Ne dăm lungimile laturilor AB, BC; facem suma lor grafic, o împărţim pe din două şi găsim lungimea medianei AM. Din extremităţile laturii AB descrim arce de cerc cu $\overline{AM}$ şi $\frac{1}{2}\overline{BC}$ cu raze, care se taie în M. Prelungim BM cu $\overline{MC} = \overline{BM}$ şi găsim al treilea vârf al triunghiului ABC, care corespunde enunţului.

Pentru ca problema să fie posibilă trebue ca arcele descrise din A şi B să se taie. Pentru aceasta trebue ca distanţa $\overline{AB}$ a centrelor să fie mai mică decât suma razelor şi mai mare ca diferenţa lor, adică:

$$\overline{AB} < \overline{AM} + \overline{BM} \quad , \quad \overline{AB} > \overline{AM} - \overline{BM}.$$

La a doua neegalitate am luat diferenţa $(\overline{AM} - \overline{BM})$, căci aceasta este pozitivă, deoarece $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC}$ pe când $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BC}$. Diferenţa este deci $\frac{1}{2}\overline{AB}$, care fiind mai mică decât AB, ne arată că neegalitatea a doua este totdeauna îndeplinită. Inlocuind în prima neegalitate pe $\overline{AM}$ şi $\overline{BM}$ cu valorile lor găsim că trebue să avem:

$$\overline{AB} < \tfrac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC}) + \tfrac{1}{2}\overline{BC},$$

$$\therefore \quad \overline{AB} < 2\overline{BC}.$$

Deci în triunghiurile la care o latură este mai mică decât îndoitul alteia este posibil ca mediana corespunzătoare laturii a doua să fie semisuma acestei laturi cu prima.

Soluție algebrică dată de D-l H. M. BODNĂRESCU (Bacalaureat).

Fie a, b, c laturile triunghiului ABC și AM mediana AM. Intre elementele a, b, c, m avem relațiunea:

$$b^2 + c^2 = 2m^2 + 2\left(\tfrac{1}{2}a\right)^2,$$

$$\therefore \quad 2b^2 + 2c^2 = 4m^2 + a^2.$$

Cazul I: $m = \frac{1}{2}(b + c)$.

Făcând înlocuire, relația de mai sus devine:

$$(b - c)^2 = a^2.$$

$$\therefore \quad b - c = \pm a$$

$$\therefore \quad b = a + c \quad \text{sau} \quad c = a + b.$$

Triunghiul se reduce la o dreaptă.

Cazul II: $m = \frac{1}{2}(a + c)$.

In acest caz relația găsită devine:

$$2b^2 = 2a^2 + 2ac - c^2.$$

Pentru ca să existe un b trebue ca partea a doua să fie pozitivă, deci a să fie afară din rădăcinile trinomului care sunt $(\sqrt{3} + 1)\,c/2$ și $(\sqrt{3} - 1)\,c/2$. Cum a este pozitiv trebue ca a să fie mai mare ca $(\sqrt{3} - 1)\,c/2 = 0{,}366\ldots c$. Pe de altă parte, ca să existe triunghiul ABC trebue ca $b < (a + c)$ și $b > (a - c)$ ori $b > (c - a)$ adică $b^2 > (a - c)^2$. De aici condițiile:

$$b^2 = a^2 + ac - \tfrac{1}{2}c^2 < a^2 + c^2 + 2ac$$

și

$$b^2 = a^2 + ac - \tfrac{1}{2}c^2 > a^2 + c^2 - 2ac,$$

$$\therefore \quad 0 < a + 3c \quad , \quad a > 0{,}5c.$$

Prima condiție este evident împlinită. A doua cuprinde condiția $a > 0{,}366\ldots c$ găsită mai înainte. De aici concluzia:

Se pot găsi triunghiuri în care mediana să fie semisuma unei laturi care pleacă din același vârf cu latura opusă lui, dacă prima latură este mai mică decât îndoitul celei de a doua.

Au rezolvat problema trigonometriceşte D-l ST. CETĂȚEANU, M. C. NICULESCU, P. BOLDESCU.

Primul caz a fost tratat geometriceşte şi de D-l I. H. BADEA (Liceul A. Şaguna, Braşov).

PROBLEMA 5238. *Se consideră exagonul regulat* $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ *de latură* a. *Se prelungesc în același sens laturile exagonului cu lungimea* a *și se obțin astfel punctele:*

$$A_{12}, A_{23}, A_{34}, A_{45}, A_{56}, A_{61}.$$

Să presupunem că fiecare din segmentele de dreaptă $A_1A_2A_{12}$, $A_2A_3A_{23}, \ldots, A_6A_1A_{61}$ *reprezintă câte o grindă orizontală de greutate* G *simplu rezemată cu capetele* $A_{12}, A_{23}, \ldots, A_{61}$ *pe zidărie și cu celelalte capete* $A_1, A_2, \ldots, A_6$ *simplu rezemată în mijlocul grinzilor pe care se află situată. Se așează o greutate* P *în mijlocul lui* A_1A_2. *Se cer reacțiunile în cele douăsprezece puncte de rezemare.*

ALEXANDRU STOENESCU.

Soluție și generalizare. Să extindem problema pentru cazul unui poligon regulat de *n laturi.* Păstrând sistemul de notațiuni din enunț și însemnând reacțiunea dintr'un punct de sprijin chiar cu litera ce reprezintă punctul considerat, să studiem succesiv echilibrul grinzilor date.

Grinda $A_1A_2A_{12}$ este simplu rezemată în A_1 și A_{12} și este supusă forțelor verticale date P și G precum și reacțiunii necunoscute A_2 a grinzii $A_2A_3A_{23}$.

Prin momente luate în raport cu extremitățile sale, obținem:

$$A_1 \cdot 2a = P\left(\frac{a}{2} + a\right) + Ga + A_2 a$$

$$A_{12} \cdot 2a = P \cdot \frac{a}{2} + Ga + A_2 a$$

a fiind lungimea laturii poligonului.

Rezultă:

$$(1) \qquad A_1 = \frac{3P}{4} + \frac{G}{2} + \frac{A_2}{2} \quad ; \quad A_{12} = \frac{P}{4} + \frac{G}{2} + \frac{A_2}{2}.$$

Ca verificare:

$$A_1 + A_{12} = P + G + A_2.$$

Procedăm analog pentru celelalte $(n-1)$ grinzi. Vom observa că în aceste cazuri, grinzile fiind încărcate numai în mijloc, reacţiunile în extremităţi vor fi egale cu jumătatea încărcărilor. Obţinem astfel ecuaţiunile:

$$A_2 = \frac{G}{2} + \frac{A_3}{2} = A_{23} \qquad \text{(echilibrul grinzii } A_2 A_3 A_{23})$$

$$A_3 = \frac{G}{2} + \frac{A_4}{2} = A_{34} \qquad \text{(echilibrul grinzii } A_3 A_4 A_{34})$$

(2)

$$A_{n-1} = \frac{G}{2} + \frac{A_n}{2} = A_{n-1,\,n} \qquad \text{(echilibrul grinzii } A_{n-1} A_n A_{n-1,\,n})$$

$$A_n = \frac{G}{2} + \frac{A_1}{2} = A_{n,\,1} \qquad \text{(echilibrul grinzii } A_n A_1 A_{n,\,1})$$

Rezolvând sistemul (1); (2) obţinem:

$$A_1 = G + \frac{3P}{4}\left(\frac{2^n}{2^n-1}\right) \quad ; \quad A_{12} = G + \frac{P}{2}\left(\frac{2^{n-1}+1}{2^n-1}\right)$$

$$A_2 = G + \frac{3P}{4}\left(\frac{2}{2^n-1}\right) = A_{23}$$

$$A_3 = G + \frac{3P}{4}\left(\frac{2^2}{2^n-1}\right) = A_{34}$$

$$A_{n-1} = G + \frac{3P}{4}\left(\frac{2^{n-2}}{2^n-1}\right) = A_{n-1,\,n}$$

$$A_n = G + \frac{3P}{4}\cdot\left(\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right) = A_{n,\,1}\,.$$

Verificare:

$$A_{12} + A_{23} + A_{34} + \ldots + A_{n,1} = nG + P.$$

În cazul problemei date $n = 6$:

$$A_1 = G + \frac{16}{21}P \quad ; \quad A_{12} = G + \frac{11}{42}P$$

$$A_2 = G + \frac{P}{42} = A_{23} \quad ; \quad A_3 = G + \frac{P}{21}A_{34}$$

$$A_4 = G + \frac{2}{21}P = A_{45} \quad ; \quad A_5 = G + \frac{4}{21}P = A_{56}$$

$$A_6 = G + \frac{8}{21}P = A_{61}.$$

D-l IONESCU BOERU N. GHEORGHE, elev inginer al Şcoalei Politechnice din Bucureşti, dă o soluţie *foarte bună* acestei probleme urmând o cale ceva mai lungă.

D-sa verifică rezultatele obţinute aplicând asupra întregului sistem de grinzi, condiţiunile de echilibru: *proecţiuni pe verticală, momente în raport cu două axe rectangulare situate în planul exagonului.*

La sfârşitul problemei, D-l IONESCU BOERU N. GHEORGHE indică generalizarea pentru cazul unui poligon regulat de n laturi.

AL. ST.

EXERCIŢII

17. Să se afle limita raportului:

$$\frac{\dfrac{x+y}{2} - \dfrac{2xy}{x+y}}{\dfrac{x+y}{2} - \sqrt{xy}}$$

când x şi y tind către aceeaşi valoare.

M. S.

R. Pentru $x = y$ expresia devine nedeterminată, înainte de limită însă se mai scrie succesiv:

$$\frac{\frac{(x+y)^2 - 4xy}{2(x+y)}}{\frac{(x+y)^2 - 4xy}{2(x+y+2\sqrt{xy})}} = \frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x+y}$$

care la limită devine 2.

18. Fie pe o dreaptă omografia

$$x' = \frac{Ax + B}{Cx + D} \tag{1}$$

cu coeficienţii A, B, C, D în progresie aritmetică.

1. Multiplicatorul omografiei este un număr real, negativ.
2. Cunoaşterea multiplicatorului determină coeficienţii.
3. Să se determine punctele duble ale omografiei (1).

C. IONESCU-BUJOR.

R. 1. Să notăm:

$$A = a - 3r \quad , \quad B = a - r \quad , \quad C = a + r \quad , \quad D = a + 3r.$$

Ecuaţia în s a omografiei este:

$$s^2 - 2as - 8r^2 = 0$$

cu rădăcinile:

$$a \pm \sqrt{a^2 + 8r^2},$$

deci multiplicatorul este:

$$k = \frac{a + \sqrt{a^2 + 8r^2}}{a - \sqrt{a^2 + 8r^2}}. \tag{2}$$

2. Notând $\frac{a}{2r} = \lambda$, (2) devine:

$$k = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 2}}{\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 2}}$$

de unde:

$$\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 2}}{2\lambda} = \frac{k}{k+1} \quad , \quad \sqrt{\lambda^2 + 2} = \frac{\lambda(k-1)}{k+1}$$

şi rezultă:

$$\lambda = \frac{k+1}{\sqrt{-2k}}, \tag{4}$$

iar omografia se scrie imediat, întrucât în (1) împărţind numărătorul şi numitorul cu $2r$ — A, B, C, D se exprimă cu λ.

3. Ecuaţia ce dă abscisele punctelor duble este:

$$(a + r)\, x^2 + 6rx - a + r = 0,$$

deci:

$$x = \frac{-3r \pm 2\sqrt{a^2 + 8r^2}}{a + r}$$

(punctele duble sunt reale şi distincte).

Sau:

$$x = \frac{-3 \pm 2\sqrt{\lambda^2 + 2}}{2\lambda + 1},$$

iar în funcţie de k

$$x = \frac{-3\sqrt{-2k} \pm (k - 1)}{2(k + 1) + \sqrt{-2k}}.$$

19. D_1, D_2 şi A, B fiind perechi de puncte ce se corespund într'o involuţie cu puncte duble C, D, dacă

$$(ABCD_1) = \lambda,$$

avem:

$$\frac{\lambda - 1}{\overline{AD}} = \frac{\lambda}{\overline{AD_2}} - \frac{1}{\overline{AD_1}}$$

C. IONESCU-BUJOR.

R. Avem:

$$(ABCD_2) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{şi} \quad (ABCD) = -1.$$

Ori fiind date A, B, C, D_1, D_2, D_3 pe o dreaptă şi

$$(ABCD_1) = d_1 \ , \ (ABCD_2) = d_2 \ , \ (ABCD_3) = d_3,$$

există relaţia

$$\frac{d_2 - d_3}{\overline{AD_1}} + \frac{d_3 - d_1}{\overline{AD_2}} + \frac{d_1 - d_2}{\overline{AD_3}} = 0 \qquad \text{(G. M. XLI, p. 375).}$$

Punând

$$d_1 = -1 \ , \ d_2 = \lambda \ , \ d_3 = \frac{1}{\lambda},$$

găsim

$$\frac{\lambda - \frac{1}{\lambda}}{\overline{AD}} + \frac{\frac{1}{\lambda} + 1}{\overline{AD_1}} + \frac{-1 - \lambda}{\overline{AD_2}} = 0,$$

de unde deducem relaţia enunţului.

20. Intre elementele unui triunghiu există inegalitatea:

$$8abc \sin^2 A \cdot \sin^2 B \cdot \sin^2 C \leqslant p^3.$$

FLORESCU VICTOR.

R. Inegalitatea cunoscută:

$$r \leqslant R/2$$

se mai poate scrie:

$$\frac{S}{p} \leqslant \frac{a}{4 \sin A} = \frac{b}{4 \sin B} = \frac{c}{4 \sin C}$$

de unde:

$$p \geqslant 2a \sin B \sin C = 2b \sin C \sin A = 2c \sin A \sin B$$

de unde se deduce uşor inegalitatea din enunţ.

PROBLEME PROPUSE

4474 [1]). Să se găsească numărul de trei cifre abc şi numărul de patru cifre $mnpq$ ştiind că

$$6 \times abc + 1 = mnpq \quad ; \quad 6 \times acb + 1 = mpqn$$

$$6 \times cba + 1 = mqpn.$$

G-L GH. BUICLIU.

5256. Care sunt triunghiurile la care una din înălţimi este suma celorlalte două?

I. IONESCU.

5257. Dacă suma a trei numere întregi este divizibilă prin *9*, suma cuburilor acelor numere va fi divizibilă prin *3*. Când este divizibilă chiar prin *9*?

M. GHERMĂNESCU.

---

1) Problema 4474 propusă la pag. 240, Vol. XL, se anulează şi se înlocueşte cu problema de faţă.

5258. Să se demonstreze:

1°. Că baza unui sistem de numeraţie, în care *49* este un patrat perfect, este de forma $(n+1)(n+4)$;

2°. Că baza unui sistem de numeraţie, în care *81* este patrat perfect, este un număr triunghiular.

V. THÉBAULT.

5259. ABCDEF fiind un exagon înscris în cercul O, se consideră perpendicularele ridicate pe mijlocul razelor OA, OB şi OC. Aceste perpendiculare intersectează perpendicularele coborîte din O pe AD, BE, CF respectiv în M, N şi P. Să se arate, că punctele M, N, P sunt colineare, dreapta MNP fiind perpendiculară pe dreapta ce uneşte pe O cu I punctul de concurenţă al diagonalelor AD, BE, CF ale exagonului ABCDEF.

THEODOR G. COCEA.

5260. Se dă un patrat ABCD. Fie $A_1B_1C_1D_1$ mijloacele laturilor lui. Se unesc vârfurile patratului cu mijlocul laturilor opuse, obţinându-se astfel în interiorul patratului, un octogon regulat *abcdefgh*. Se cere a se calcula direct, fără a folosi relaţiile cunoscute între elementele unui octogon regulat, suprafaţa acestui octogon în funcţie de latura patratului dat.

ION S. ANTONIU.

5261. Să se separe planul în regiuni, după natura rădăcinilor ecuaţiei:

$$x^2 - 2a(a+b)x + b(a-b) = 0.$$

G. G. CONSTANTINESCU.

5262. Dacă ecuaţia

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

are toate rădăcinile reale, pozitive şi subunitare, avem:

$$1 + a + b + c + d > 0;$$

iar, dacă are toate rădăcinile supraunitare, avem:

$$a+b+c+d+e>0.$$

Generalizare.

LT. C. IONESCU-ȚIU.

5263. Să se determine y pentru ca ecuațiile

$$x^6+x^5+(1-3a)\,x^4+(1-2a)\,x^3$$
$$+(3a^2-3a+1)\,x^2+(a-1)^2\,x-a\,(a-1)^2+1=0$$
$$x^4-(2a-1)\,x^2+x+a^2-2a-y=0$$

să aibă trei rădăcini comune. Cum trebue ales a ca ecuația algebrică de gradul al treilea, care admite aceste rădăcini, să fie cu coeficienți raționali?

TH. ANGHELUȚĂ.

5264. Dacă notăm cu $\left|\overset{3}{\underset{M}{\triangle}}\right|_{a}^{b}$ modulul determinantului magic [1]) de ordinul trei format din toate numerele întregi cuprinse între a și b (inclusiv limitele) luate fiecare o singură dată, avem:

$$\sum_{k=0}^{k=n}\left|\overset{3}{\underset{M}{\triangle}}\right|_{9+8k}^{1+8k}=2^3.3^2.(n+1)\,(4n+5).$$

CERCHEZ MIHU.

5265. Să se rezolve ecuația

$$2\mathrm{tg}\theta=1+\sin 2\theta.$$

EMILIAN MEREUȚĂ.

5266. Fie ABC un triunghiu oarecare, G centrul său de greutate, iar A′, B′, C′ picioarele înălțimilor. Să se arate că cercurile AGA′, BGB′, CGC′ formează un fascicol.

CEZAR COȘNIȚĂ.

5267. Punctul M descrie o dreaptă fixă Δ. Fie MB tangenta dusă din M la un cerc fix O, iar C proiecția lui B pe Δ.

Se cere locul geometric al proiecției lui C pe OM.

G-L GH. BUICLIU.

---

1) Dacă suma elementelor fiecărei linii, coloane și diagonale este același număr, determinantul se numește magic.

5268. In vârfurile A, B, C, D ale patratului ABCD, de latură a, acţionează forţele paralele F, 2F, 3F, 4F de acelaşi sens; iar în punctele E şi M, aşezate respectiv pe taturile AB şi CD $\left(\overline{BE} = \frac{a}{4}\ ,\ \overline{CM} = \lambda a\right)$ acţionează forţele 5F şi kF, paralele cu cele de mai sus, însă în sens contrar.

Să se determine λ şi k aşa fel încât punctul de aplicaţie al rezultantei să fie la intersecţia dreptei ME cu dreapta ce uneşte mijloacele laturilor AD şi BC.

GH. D. SIMIONESCU.

5269. Se consideră un sistem de forţe concurente $F_1, F_2, \ldots, F_n$ aplicate într'un punct M variabil din planul unui cerc, extremităţile forţelor fiind vârfurile unui poligon regulat înscris în cerc.

1. Să se determine proiecţiile rezultantei F pe un diametru ce trece prin unul din vârfurile poligonului şi pe tangenta la cerc în acest vârf. Să se arate apoi că direcţia ei trece printr'un punct fix, că această direcţie nu depinde de numărul n al forţelor, şi să se determine intensitatea rezultantei.

2. Luând ca axe diametrul ce trece prin M şi tangenta la cerc perpendiculară pe diametru să se verifice rezultatele dela No. 1.

3. Să se determine geometric rezultanta F.

RADU BĂDESCU.

5270. Pentru a nu fi văzut de creditorul său, aflat în mişcare uniformă pe o stradă rectilinie, un debitor caută să se ascundă *cât mai bine* în spatele unui chioşc circular.

Se presupun cunoscute elementele geometrice, iuţeala creditorului şi greutatea debitorului.

1°. Să se studieze mişcarea obligatorie de rotaţie a debitorului în jurul chioşcului.

2°. Să se verifice existenţa unei providenţe care pedepseşte pe răii platnici, prin calculul forţelor de inerţie ce caută să trântească la pământ pe debitor.

3°. Să se determine maximele acestor forţe.

ALEXANDRU STOENESCU.

ERATĂ. Problema rezolvată publicată în G. M. Nr. 4, pag. 218, trebue să poarte Nr. 5133, iar nu 5153.

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Abeles I. Florin (4676, 5191, 226, 43); *Aldea Virgil* (5191); *Anastasiu Dan* (5191); *Anchievici N.* (5191); *Bakonyi C. C.* (5191, 203); *Bogdan Gh.* (5244); *Boiangiu D. D.* (5150, 202, 26, 35, 36, 41); *Buznea D. Dinu* (5039, 186, 235, 54); *Cetăţeanu St.* (5213, 26, 32, 43, 51); *Cherţman Mozes* (5004); *Chintescu M. Matei* (5173, 74); *Costescu Gh. I.* (5232); *Cruceru Gh. Const.* (5232, 36, 50); *Diaconescu V. C.* (5191); *Dimitriu I. C. Călin* (4638, 985, 5159, 203); *Drăghicescu P. Paul* (4985, 5183, 226, 28, 36, 43, 44, 50, 51); *Eftimie D. C.* (4993, 5243); *Fila Gh. Eugen* (5186, 87, 251); *Filiti Gr. Gr.* (5191, 232); *Florescu L. V.* (4493); *Gheorghiu E. Oct.* (5131, 43); *Gospodin Tudor* (5223); *Grigoriu A. Dinu* (5186); *Grumăzescu M.* Subloc. (5039, 40, 90, 136, 43, 60, 86); *Iacomi D. M.* (5244); *Ionescu Stelian* (5191); *Mărculescu Origen* (5205, 40); *Mihăilescu C. C.* (5191, 232); *Miroslav T.* (5168, 74, 86, 91); *Moessner A.* (R); *Pantelimon V. C.* (4642, 836, 955, 5051, 222, 223); *Petrescu Iulian* (5235); *Petrescu V. Achile* (5226, 43); *Popa D. Mircea* (4836, 955, 5051, 223, 29, 32, 35, 39, 40, 43, 44, 47, 55); *Popa I. Marin* (5160); *Popa N. Aurel* (5216, 27, 32, 35, 36, 44, 45, 47, 51); *Popescu Adrian* Subloc. (5232, 35); *Racoviceanu Vlad* (5191); *Ripianu D-tru* (5003, 13, 118, 240); *Rohr I. Alex.* (4895, 5192, 214, 23, 32, 35, 43, 51); *Segal J.* (5172); *Şerban A. T.* (5013, 25, 97, 100, 01, 02, 34, 44, 59, 223, 40); *Stamate I. I.* (3819, 67, 965, 4993, 5171, 76, 93, 207, 17, 35, R); *Stoenescu D. Mirel* (5100, 34, 62, 205, 54); *Thébault V.* (P); *Tilică C. Ştefan* (4914, 17, 5004, 20, 172, 83, 222); *Topalescu Gh.* (5235); *Topârceanu I. Gh.* (5191); *Tudoran Lydia* (5232); *Vijelie Gh. Eug.* (4717, 923, 68, 5083, 157, 71, 217, 35); *Weltner R.* (2607).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă*, împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală*, iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică**, ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică* Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*
Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 50 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa :

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon : 3-9803).

C. 59.954.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLV

NUMĂRUL 7. — MARTIE 1940

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNEA" SIBIIU

SUMARUL

1. Antioch Cantemir . . . . . *I. Ionescu.*
2. George Ţiţeica (urmare) . . . . . *Gh. Th. Gheorghiu.*
3. O generalizare a relaţiilor din triunghiul dreptunghiu . . . . . *N. N. Mihăileanu.*
4. Concursul „Gazetei Matematice". . . . *Delegaţia Societăţii.*
5. Premiul de Aritmetică . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
6. Note Matematice: 26 — 28.
7. Chestiuni de examen.
8. Bibliografie.
9. Cereri.
10. Diverse.
11. Probleme rezolvate: 2735, 4654, 4758, 4832, 4887, 4927, 5025, 5152, 5191.
12. Exerciţii: 21.
13. Probleme propuse: 5185, 5271 — 5286.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1940

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **D. Stoica**, Inginer; Cpt. Comandor-Inginer **I. Linteş**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Secretarul General al Ministerului Lucrărilor Publice şi Comunicaţiilor, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1939 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 5184, 85, 89, 93, 95, 96, 97, 200, 04, 08, 09, 11, 12, 18, 20, 21, 24, 25, 30, 37, 42, 46, 48, 49, 53, 56, 59, 62, 64, 67, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

ANTIOCH CANTEMIR

Este aici vorba de fiul cel mai mic al fostului Domnitor al Moldovei DIMITRIE CANTEMIR, de unde şi numele de ANTIOCHE DIMITRIÉVITCH CANTEMIR sub care se întâlneşte prin publicaţii franceze. El îşi ascundea uneori numele sub anagrama KHARITON MAKENTINE.

Asupra acestui CANTEMIR am pus în *Gazeta Matematică* două *Cereri*. Prima are No. 94 din Anul XXVIII, pag. 103 şi are cuprinsul:

„*Se spune că* ANTIOCH CANTEMIR, *fiul lui* DIMITRIE CANTEMIR, *pe când era ambasador al Rusiei la Paris, a scris, sub influenţa lui* MAUPERTUIS, *prieten al său, un tratat de Algebră care a rămas în manuscris. Ar fi interesant ca studenţii noştri din Paris să cerceteze această chestiune*".

A doua *Cerere* are No. 99 şi a fost pusă în acelaşi An la pag. 256, cu următorul cuprins:

„*Se spune că* ANTIOCH CANTEMIR *ar fi fost elev al lui* BERNOULLI. *Când şi la care* BERNOULLI?

La aceste întrebări nu am primit nici un răspuns până acum. In 1938 însă a apărut în Colecţiunea „*Analles de l'Université de Lyon*", o carte intitulată „*Le Prince Cantemir à Paris (1738—1744)*" de către un Profesor dela acea Universitate MARCELLE EHRHARD, în care găsim, — dacă nu în total, — cel puţin în parte răspunsuri la întrebările de mai sus. Autorul se ocupă în special de ANTIOCH CANTEMIR ca Ambasador al Rusiei la Curtea lui LUDOVIC XV al Franţei, însă dă şi date interesante asupra vieţii şi operilor lui.

Prinţul ANTIOCH CANTEMIR s'a născut la Constantinopoli la 10 Septemvrie 1709 pe când tatăl său se refugiase acolo. In anul următor Turcii trimit pe DIMITRIE CANTEMIR Domn în Moldova. In anul 1711 isbucnind războiu între Turci şi Ruşi, el se uneşte cu aceştia din urmă spre a scăpa Ţara de jugul turcesc. După înfrângerea lui PETRU CEL MARE în luptele dela Stănileşti pe Prut, acesta ia în Rusia pe DIMITRIE CANTEMIR cu toată familia, şi încă pe alţi boeri care ereau partizani ai lui şi le dă în Rusia titluri şi proprietăţi. Pe CANTEMIR l-a trimis la un Domeniu căruia i s'a zis, după numele lui, Dimitrovna.

ANTIOCH nu avea nici doi ani când a ajuns acolo căci fuga tatălui său în Rusia s'a făcut în Iulie 1711. Cu modul acesta copilul a trăit şi s'a instruit în Rusia, iar la majorat a luat cetăţenia rusă. Tatăl său, după cum se ştie, a fost unul din marii învăţaţi dela finele secolului XVII şi începutul secolului XVIII; el a contribuit la crearea Academiei din St. Petersburg şi a fost şi membru al Academiei din Berlin. El a observat că dintre toţi copii lui, ANTIOCH îi moşteneşte darul de om de ştiinţă şi a îngrijit mult de cultura lui. Cu profesori greci l-a învăţat limbile greacă, latină şi italiană, cu un profesor rus, traducătorul Academiei ruseşti de ştiinţe, l'a învăţat limba patriei lui adoptive, şi i-a dat şi cunoştinţe mai slabe de limba franceză şi engleză, întrucât intenţiona să-l trimită în Occident pentru complectarea instrucţiunii. Guvernul nu a permis însă acest lucru, pentru ca nu cumva să vină de acolo cu idei europene înaintate; l-a trimis însă la St. Petersburg unde se aduseseră savanţi străini pentru Academia de curând creiată. Acolo a învăţat matematicile cu DANIEL BERNOULLI, fizica cu BOLFINGER, Istoria cu BAYER, şi filosofia cu GROSS.

La etatea de 20 de ani ANTIOCH se manifestase deja ca un mare scriitor în limba rusă, publicând satire, fabule, epigrame, etc. Sunt unii care îl pun ca începătorul literaturii ruse. El a făcut şi traduceri din cărţi străine de ştiinţă ca *„Entretiens à une marquise sur la pluralités des mondes“* a lui FONTENELLE, după ce St. Sinod a suprimat părţile ce nu corespundeau dogmelor religiunii creştine ortodoxe. Cartea i-a fost tipărită de Academia de Ştiinţe din St. Petersburg; aceasta este prima lui scriere cu conţinut ştiinţific. Traducerea ei i-a dat mult de lucru căci limba rusă nu avea pe atunci de loc termeni tecnici şi ştiinţifici, pe care a trebuit să-i creeze el prin analogie cu limba franceză. Prin practica ştiinţelor exacte a căpătat claritate şi logică în expunere. Tot pentru acest motiv, în exprimare pune mai multă soliditate decât foc.

Activitatea literară şi ştiinţifică a lui ANTIOCH, cunoştinţa a numeroase limbi vechi şi moderne au făcut ca el să capete un mare renume în Rusia. De aceea în 1731, când Rusia trebuia să trimită un reprezentant pe lângă Curtea din Londra, Guvernul rus, căutând un om cult care să reprezinte Ţara cu demnitate, nu a găsit pe altul mai nemerit ca ANTIOCH CANTEMIR, de şi el nu avea decât etatea de 22 ani! La începutul acelui an el pleacă la Londra.

Trecând prin Haga şi-a cumpărat o mulţime de cărţi pe care să le citească şi să le studieze în orele libere dela Londra. Acolo a stat aproape continuu timp de 6 ani; o singură dată, suferind de ochi, ca o consecinţă a unui vărsat pe care-l avusese în copilărie, s'a dus la Paris ca să consulte un oculist. Nu a rămas mulţumit nici de doctor, nici de Paris, nici de Franţa, părere pe care şi-a schimbat-o mai în urmă.

Cât a stat la Londra, îndeplinirea îndatoririlor lui nu i-a răpit prea mult timp, căci sarcina de diplomat nu era legată de prea multe obligaţiuni. El spunea chiar că „sunt lăsat în pace şi îi las şi eu". De aceea la Londra a avut timp să se pună în curent cu ştiinţele pozitive citind pe PASCAL, DESCARTES, LEIBNIZ, NEWTON, MAUPERTUIS, apoi studii istorice, literare şi filosofice.

In anul 1738 Rusia voind a stabili relaţiuni bune cu Franţa, trimite pe ANTIOCH CANTEMIR ca ambasador la Paris pe lângă Curtea lui LUDOVIC XV.

(Va urma) I. IONESCU.

GEORGE ŢIŢEICA

II. Lucrări de Matemateci Superioare

(Urmare dela pag. 288)

Dar pe lângă aceste chestiuni, ŢIŢEICA încă din 1899 atacă una din problemele cele mai grele: deformarea suprafeţelor. Origina problemelor ce şi le-a pus ŢIŢEICA în acest capitol a fost o teoremă a lui GUICHARD care spune că dacă facem să se rostogolească o cuadrică de rotaţie pe o suprafaţă aplicapilă Θ, unul din focare descrie o suprafaţă având curba mijlocie constantă. ŢIŢEICA îşi propune mai general, să găsească natura suprafeţei ce se rostogoleşte astfel ca un punct M invariabil legat de ea să descrie o suprafaţă Σ care să aibă în puncte corespunzătoare, atunci când înlocuim pe Θ prin altă suprafaţă aplicabilă pe ea, aceeaşi curbură mijlocie. Teorema lui GUICHARD dă singura soluţie a problemei (6). Aceasta a fost prima problemă de deformare care l-a preocupat pe ŢIŢEICA. In acelaşi an îşi mai pune încă o problemă de aceeaşi natură având însă altă origină.

Normalele unei cuadrice dealungul liniilor lor de curbură formează o congruenţă GUICHARD care după o teoremă a lui RIBAUCOUR taie suprafaţa a doua oară tot după o reţea ce este, împreună cu reţeaua formată din liniile de curbură, armonică unei aceleiaşi congruenţe ciclice (7). Reţeaua ciclică corespunzătoare având invarianţii tangenţiali egali, rămâne invariabilă într'o deformare continuă cu un parametru. Aceasta este problema de deformare pe care ŢIŢEICA îşi propune s'o rezolve plecând dela un caz particular (12). Anume, presupune că suprafeţele aplicabile raportate la reţeaua comună au drept ecuaţii

$$x = Af(u, v, a) \quad , \quad y = Bf(u, v, b) \quad , \quad z = Cf(u, v, c),$$

parametrii a, b, c, A, B, C fiind legaţi prin 5 condiţii. In felul acesta ajunge la următorul rezultat: *toate suprafeţele*

$$[c] \qquad x = A(u+a)^{\frac{3}{2}}(v+a)^{\frac{3}{2}} \quad , \quad y = B(u+b)^{\frac{3}{2}}(v+b)^{\frac{3}{2}},$$

$$z = C(u+c)^{\frac{3}{2}}(v+c)^{\frac{3}{2}},$$

pentru cari expresiile

$$A^2a^i + B^2b^i + C^2c^i \qquad (i = 0, 1, 2, 3, 4),$$

au valori determinate, sunt aplicabile una pe alta.

In acelaşi timp DEMOULIN arată că suprafeţele cari admit o reţea conjugată invariantă într'o transformare continuă, se împart în trei categorii după forma elementului linear al reprezentării sferice a suprafeţei. In lucrările (13) şi (20) ŢIŢEICA complectează rezultatele lui DEMOULIN precizând modul de deformare al suprafeţelor făcând parte din aceeaşi categorie şi dând totodată mijlocul de a efectua această deformare.

Reluând suprafeţele [c], a căror ecuaţie carteziană este

$$[d] \qquad \alpha x^{\frac{2}{3}} + \beta y^{\frac{2}{3}} + \gamma z^{\frac{2}{3}} = 1,$$

ŢIŢEICA arată (16), (67) că în deformare, linia asimptotică $u = v$ rămâne invariabilă ca formă. Mai mult, arată că această deformare se poate face dealungul oricărei linii asimptotice: suprafeţele [c] formează deci un exemplu interesant de astfel de deformare. Folosind acest fapt, ∞^3 suprafeţe [d] se împart în două clase, fiecare având câte ∞^2 suprafeţe aplicabile una pe alta, după cum

$$\alpha^{\frac{3}{2}} + \beta^{\frac{3}{2}} + \gamma^{\frac{3}{2}} = 0 \quad \text{sau} \quad -\frac{1}{m^3}.$$

m fiind o constantă. Cu ajutorul unei schimbări de variabilă convenabil aleasă (23), se arată că suprafeţele din prima categorie au elementul linear de forma

$$[e] \qquad ds^2 = v du^2 + 2u\, du\, dv + dv^2,$$

iar cele din a doua categorie,

$$[f] \qquad ds^2 = u du^2 + 2m\, du\, dv + v dv^2.$$

Rămânea de studiat suprafeţele ce admit unul din aceste elemente lineare. Pentru aceasta ŢIŢEICA ataşează studiului unei suprafeţe S descrisă de un punct $M(x, y, z)$ ce are elementul linear de forma [e], o altă suprafaţă Σ descrisă de punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ definit prin relaţiile

$$x_1 = \frac{x_u}{\sqrt{u}} \quad , \quad y_1 = \frac{y_u}{\sqrt{u}} \quad , \quad z_1 = \frac{z_u}{\sqrt{u}}.$$

Aceste suprafeţe Σ_1, (67), (24), se bucură de proprietatea că dealungul lor

$$R_1 + R_2 = \frac{2q}{p},$$

unde: R_1, R_2 sunt razele principale de curbură, iar p şi $\sqrt{2q}$ respectiv distanţa dela origină la planul tangent şi la punctul suprafeţei. O suprafaţă Σ_1 se mai bucură de proprietatea de a fi podara unei suprafeţe minime. Tot aceste suprafeţe mai sunt în legătură cu o clasă de suprafeţe Σ_2 dealungul cărora avem relaţia

$$R_1 + R_2 = 4p.$$

Dar dacă suprafeţele ataşate suprafeţelor din categoria [e] puteau fi puse în legătură cu suprafeţe cunoscute, suprafeţele din categoria [f] au avut superioritatea că l'au condus pe ŢIŢEICA la o clasă de suprafeţe noui. In adevăr, dacă punem

$$x_1 = x_v \quad , \quad y_1 = y_v \quad , \quad z_1 = z_v,$$

punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ descrie o suprafaţă care se bucură de proprietatea că are raportul $\frac{K}{d^4}$ este constant, K reprezentând curbura totală a suprafeţei în punctul M, iar d distanţa unui punct fix O la planul tangent în M. Aceste suprafeţe au fost numite de către

DEMOULIN şi IONAS *„suprafeţe* ŢIŢEICA". In cele ce urmează vom nota o astfel de suprafaţă prin Tz. Mai târziu, în 1924, CARTAN [1]) arată că aceste suprafeţe se bucură de proprietatea că normalele lor afine trec printr'un punct fix, de unde a rezultat şi numirea de *„sfere afine"*.

In 1907, ŢIŢEICA începe un studiu remarcabil al acestor suprafeţe. Arată că studiul lor se reduce la studiul unui sistem de ecuaţii cu derivate parţiale afin de forma (25), (27)

$$[g] \qquad \begin{cases} \theta_{uu} = a\theta_u + b\theta_v, \\ \theta_{uv} = h\theta, \\ \theta_{vv} = a'\theta_u + b'\theta_v, \end{cases}$$

funcţiunea h, cu ajutorul căreia se pot exprima toţi ceilalţi coeficienţi, fiind o soluţie a uneia din ecuaţiile cu derivate parţiale

$$(\log h)_{uv} = h \quad , \quad (\log h)_{uv} = h - \frac{1}{h^2},$$

după cum suprafaţa era riglată sau nu.

După sistemul $[g]$ se citeşte imediat că o suprafaţă Tz îşi păstrează această proprietate după o transformare afină ce lasă origina neschimbată. Mai mult, ŢIŢEICA a arătat că-şi menţine proprietatea şi după o transformare duală (25), (27). Explicarea acestor proprietăţi este că transformarea afină lasă raportul ce defineşte suprafeţele Tz neschimbat pe când transformarea duală îl inversează (25), (29). In particular, cum sfera este o suprafaţă Tz şi cuadricele cu centru vor fi suprafeţe Tz. Mai dă ca exemplu şi suprafeţele

$$xyz = 1 \quad , \quad z(x^2 + y^2) = 1,$$

şi în general

$$(a_1x + b_1y + c_1z)\,(a_2x + b_2y + c_2z)\,(a_3x + b_3y + c_3z) = 1.$$

ŢIŢEICA nu se mulţumeşte cu aceste proprietăţi şi caută o proprietate esenţial afină care să fie caracteristică suprafeţelor sale, şi pe care o găseşte mai întâiu pentru suprafeţele riglate demonstrând că pentru ca o astfel de suprafaţă să fie Tz trebue

1) CARTAN (C. R., t. 178, 1924, p. 294) necunoscând studiul făcut de ŢIŢEICA asupra acestor suprafeţe le atribue lui BLASCHKE. In lucrarea (71) ŢIŢEICA rectifică această scăpare din vedere.

să aibă liniile flecnodale confundate la infinit (28) (cari sunt caracterizate prin condițiile $b = 0$, $a'' = 0$ (30)). Reciproca acestei teoreme, prin care arată că *orice suprafață riglată ce are liniile flecnodale confundate și aruncate la infinit este o suprafață* Tz, o stabilește în lucrarea (41) publicată puțin mai târziu. In această lucrare ȚIȚEICA își propune să studieze curbele (T) cari se bucură de proprietatea că dealungul lor produsul Td^2 să fie constant, T fiind torsiunea curbei într'un punct, iar d distanța acestui punct la origină. Se vede imediat că aceste curbe, în baza teoremei lui ENNEPER, nu sunt altceva decât liniile asimptotice ale unei suprafețe. Lucrarea este împărțită în trei părți. In prima parte se demonstrează că dacă x, y, z, coordonantele punctului curent, sunt trei integrale ale ecuației diferențiale

$$\theta''' + p\theta'' + q\theta' + r\theta = 0,$$

atunci condiția necesară și suficientă pentru ca curba să fie o curbă (T) este ca să avem relația: $pr + r' = 0$. Rezultă de aci că o curbă (T) rămâne tot curbă (T) dacă i se aplică o transformare afină, care nu schimbă origina, sau printr'o transformare duală (proprietăți ce erau de bănuit). Partea a doua conține studiul transformărilor asimptotice ale unei curbe (T) permițând astfel o clasificare a suprafețelor riglate ce trec printr'o astfel de curbă. Folosind rezultatele precedente, ȚIȚEICA demonstrează în partea a treia proprietatea ce o avea în vedere. Se mai găsesc aci proprietăți ale suprafețelor riglate cari admit numai două linii asimptotice curbe (T). Aceste proprietăți au fost complectate mai târziu (72).

Curbele (T) așa de mult atașate suprafețelor Tz se numesc astăzi *curbe* ȚIȚEICA și au fost notate pentru prima dată cu litera (T) de GINO LORIA.

Odată cunoscută o definiție afină pentru suprafețele Tz riglate, ȚIȚEICA merge mai departe căutând una pentru suprafețele Tz generale. Cu ajutorul punctelor flecnodale nu mai poate găsi nimic, decât că nu pot fi la distanță finită (30). Intreprinde deci o nouă cale pornind tot dela suprafețele riglate. Stabilește mai întâiu propoziția (34): *dacă luăm punctul* O *în planul asimptot al generatoarei* g *a unei suprafețe riglate, atunci și numai atunci raportul* $K : p^4$ *între curbura totală și puterea a 4-a a distanței dela* O *la planul tangent, păstrează aceeași valoare pentru orice*

punct al generatoarei g. In felul acesta se introduce în mod natural o clasă de suprafeţe riglate care se bucură de proprietatea că desfăşurata asimptotică se reduce la un con cu vârful în O. Pentru aceste suprafeţe raportul $K : p^4$ păstrează o valoare constantă dealungul fiecărei generatoare, valoare ce variază dela o generatoare la alta. ŢIŢEICA numeşte aceste suprafeţe: *suprafeţe riglate cu centru* (29), (30). Pentru ca o suprafaţă riglată cu centru să fie suprafaţă Tz trebue ca toate cuadricele osculatoare să aibă centrul în centrul suprafeţei (33).

... „*Passons maintenant au cas des surfaces* S [1]) *générales*, scrie ŢIŢEICA în lucrarea (29). *Voici comment on arrive à la définition cherchée. Prenons une ligne asymptotique quelconque d'une surface et attachons-lui la surface réglée engendrée par les tangentes menées en chaque point* M *de la ligne considérée à l'autre ligne asymptotique qui passe en* M. *On a de cette manière deux séries de surfaces réglées attachées aux deux séries de lignes asymptotiques. La surface considérée est une surface* S *dans le cas et seulement dans le cas où toutes ces surfaces réglées sont a centre commun*"...

In lucrarea (33) au fost găsite toate suprafeţele S de rotaţie, arătându-se totodată că sunt singurele ale căror normale aparţin unui complex linear.

(Va urma) GH. TH. GHEORGHIU.

O GENERALIZARE A RELAŢIILOR DIN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIU

In triunghiul ABC înscris în cercul O, tangente în B, C se intersectează în T; paralelele din A la BT, CT taie pe BC în E şi F.

Vom arăta că dreptele AE, AF dedublează pentru triunghiul ABC, proprietăţile înălţimii AD într'un triunghiu dreptunghiu ABC,

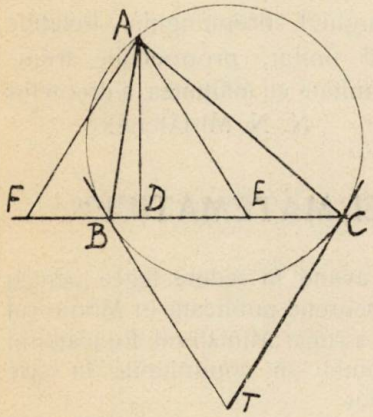
1) Este vorba de suprafeţele Tz.

Mai întâi, din asemănarea triunghiurilor AEF, BTC cu laturile paralele, rezultă că şi AEF e un triunghiu isoscel

$$AE = AF$$

deci AE, AF sunt simetrice faţă de înălţimea AD.

Acum procedăm după metoda clasică pentru triunghiul dreptunghiu.



Observăm că triunghiurile ABE, ABC sunt asemenea; în adevăr

$$\sphericalangle ABE = \sphericalangle ABC$$

$$\sphericalangle BEA = \sphericalangle CBT = \sphericalangle BAC$$

ultimele ca având aceeaşi măsură, triunghiurile cercetate au două perechi de unghiuri egale, deci sunt asemenea; scriem proporţionalitatea laturilor

$$\frac{AB}{BE} = \frac{BC}{AB}$$

deci

$$(1) \qquad AB^2 = BC \cdot BE$$

o latură e medie proporţională între altă latură şi proiecţia tangenţială din vârful comun, al primei pe a doua.

Analog, sunt asemenea triunghiurile

ACF ; ABC deci şi ABE ; ACF ; rezultă

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{CF} = \frac{BE}{AF}$$

deci, ţinând seamă că AE = AF, avem

$$(2) \qquad AE^2 = AF^2 = BE \cdot CF$$

proiectantele tangenţiale care pleacă dintr'un vârf, sunt egale cu media proporţională a segmentelor determinate pe latura opusă.

Analog cu relaţia (1), avem şi

$$AC^2 = BC \cdot CF$$

şi adunând

$$AB^2 + AC^2 = BC\,(BE + CF$$

dar

$$BE + CF = BE + CE + EF = BC + EF$$

deci

$$(3) \qquad BC^2 = AB^2 + AC^2 - BC \cdot EF \text{ [1]}$$

patratul unei laturi este egal cu suma patratelor celorlalte două, mai puţin produsul dintre latură şi segmentul subproiectat tangenţial, pe ea.

In cazul triunghiului dreptunghiu, BT, CT perpendiculare pe BC, sunt paralele şi AE, AF coincid cu AD, deci EF = O. Relaţiile capătă forma clasică din triunghiul dreptunghiu. Relaţiile 1, 2, 3, generalizează deci, în mod unitar, proprietăţile triunghiului dreptunghiu prin complecta afinitate cu înălţimea, a dreptelor AE, AF.

N. N. MIHĂILEANU.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE"

Societatea *Gazeta Matematică* având în vedere legea pentru funcţionarea învăţământului secundar teoretic publicată în Monitorul Oficial No. 256 din 4 Noemvrie 1939 a rugat Ministerul Educaţiunii Naţionale să autorize ţinerea concursului în condiţiunile în care s'a ţinut în fiecare an, până în prezent.

Ministerul Educaţiunii Naţionale, Direcţiunea Invăţământului Secundar, prin adresa No. 19.164/940 B. din 13 Februarie 1940 ne-a dat următorul răspuns :

Ca răspuns la adresa Dvs. No. 140/940, avem onoare a vă face cunoscut că, conform legii, nimeni nu poate face concursuri cu elevii decât Ministerul Educaţiunii Naţionale. „Gazeta Matematică" va trebui să ceară în mod special delegaţie dela Minister pentru a putea organiza concursurile în acest an.

Ministerul va numi o comisiune pentru concurs care trebue să se ţină în condiţiuni stabilite de Minister.

Director,
(ss) **I. BRATU**

Şeful Serviciului,
(ss) **DEM. TEODORESCU**

Ca urmare, Societatea *Gazeta Matematică* în şedinţa dela 22 Februarie 1940 a hotărît ca în anul acesta concursul *Gazetei Matematice* să nu se mai ţină.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII.

1) Relaţia 3) se poate aduce la forma clasică trigonometrică, calculând pe EF

$$EF = 2DE = 2AD \operatorname{cotg} AED = 2ha \operatorname{cotg} A = 2\frac{bc \cos A}{a}.$$

PREMIUL DE ARITMETICĂ

Societatea „Gazeta Matematică“ acordă anual un premiu de 5000 lei, elevului sau elevei, de şcoală secundară, care a desvoltat cea mai mare activitate în domeniul aritmeticei în volumul anului precedent al revistei *Gazeta Matematică.*

In Volumul XLIV (anul 1938—1939) nici un elev sau elevă din şcoalele secundare nu a publicat vreun *studiu de aritmetică* sub formă de articol; sunt numai 4 *Note Matematice* ale D-lui ST. CETĂŢEANU (liceul „Şincai“ Bucureşti), note care sunt complectări ale unor note anterioare publicate de D-l GENERAL GH. BUICLIU.

Activitatea corespondenţilor în domeniul aritmeticei s'a mărginit la rezolvarea unui număr restrâns de probleme propuse.

D-l M. AL. VASILESCU-STABU, premiatul de anul trecut, este liceanul care a desvoltat şi în Volumul XLIV cea mai mare activitate în domeniul aritmeticei. D-sa a tratat bine şi complect problemele 4904, 4999 şi 5017, la problema 5029 a dat o cale bună, însă nu a avut răbdarea să caute toate soluţiunile în număr de 220; la problemele 4678, 4987, 5000 a dat soluţiuni parţiale. La problema 4760 D-sa a dovedit că cunoaşte bine unele chestiuni de *Teoria Numerilor.* In fine D-sa a propus o problemă de aritmetică 5091 şi exerciţiul 6 (pag. 165) tot de aritmetică.

Deşi nu putem spune că suntem mulţumiţi de activitatea corespondenţilor noştri în domeniul aritmeticei, trebue însă să recunoaştem că vina nu este a lor, ci în mare parte a programelor de matematici în liceele noastre. De aceea, deşi regulamentul premiului ne permite să nu dăm premiul când nu apreciem o activitate suficientă în domeniul aritmeticei, totuşi propunem Adunării Generale ca premiul de aritmetică în valoare de 5.000 Lei, să fie dat şi anul acesta tot D-lui M. AL. VASILESCU-STABU, elev la Liceul Militar „D. A. Sturza“ din Craiova.

COMISIUNEA PENTRU PREMIUL DE ARITMETICĂ
G-RAL GH. BUICLIU, ION IONESCU,
CPT. COMANDOR GR. ZAPAN

Acest raport a fost citit şi aprobat în Adunarea Generală dela 8 Februarie 1940.

NOTE MATEMATICE

26. *Considerațiuni practice la alcătuirea și rezolvarea problemelor de matematici.* Sub acest titlu am publicat mai multe articole în *Gazeta Matematică* (Anul XVI, pag. 9 și 121; Anul XVII, pag. 325 și 367; Anul XXXVIII, pag. 44; Anul XLIII, pag. 19) și am vorbit și în *Culegerea de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica rațională.* Ediția II, București 1937.

Comitetul de conducere al Revistei „*Pitagora*" în care se găsește numeroși foști corespondenți și foști premiați ai *Gazetei Matematice*, îmi trimite, ca *Omagiu*, numerele ce apar din acea Revistă, fapt pentru care le exprim și aci mulțumirile mele; îi asigur că nu e număr pe care să nu-mi arunc ochii dela început până la sfârșit.

Privind în numărul de pe Februarie 1940 m'a reținut pe loc Problema III 8, propusă de I. D., rezolvată la pag. 156, în care nu s'a ținut seama de cele ce am scris eu în articolele semnalate la începutul acestei Note. Enunțul Problemei este acesta:

„*Trei turme de oi trebue să treacă Jiul pe un pod plutitor. Prima turmă are 140 oi, a doua 196 și a treia 252 oi.*

„*Câte oi să se ia din fiecare turmă ca cele trei turme să fie trecute în același timp? Câte oi se trec odată și câte treceri se vor face?*"

Soluția ține trei rânduri:

„*Aflăm c. m. m. d. c. al numerelor date și găsim 28. Impărțim numerele la 28 și găsim câturile 5, 7, 9 respectiv pentru cele trei turme. S'au făcut 28 treceri a câte 21 oi*".

Această soluție corespunde unui caz cu totul particular al trecerii turmelor și anume pentru cazul când s'ar cere ca la fiecare trecere să se transporte același număr de oi, dela fiecare turmă, cum s'au trecut la primul transport, condiție care rezultă din soluție, iar nu din enunțul problemei. Cu alte cuvinte, se cere ca trecerile să fie *uniforme*. Practicește, pentru ca să nu se piarză timp cu alegere de oi dela cele trei turme, spre a fi trecute dela un mal la altul, s'ar trece toate oile din turma I afară de 1, apoi toate oile din turma II afară de 1 și apoi oile din turma III cu cele oprite dela turmele I și II; acestea se duc la ultimul transport.

Cu modul acesta cele $140 + 196 + 252 = 588$ oi sunt *„trecute în același timp“*.

Acum se pune întrebarea, câte oi să se ia în fiecare dată? Aici nu putem răspunde fiindcă nu ni s'a dat capacitatea de transport a podului. Podul ar putea să ia odată toate cele 588 de oi în o singură trecere. Altfel trebuiesc făcute mai multe treceri. Care este cel mai mare număr? Observăm că la ultima trecere trebuie puse cel puțin trei oi, câte una din fiecare turmă. Deci unui pod, sau unei luntre ce poate lua trei oi, îi trebuiesc $588 : 3 = 196$ treceri. Deci soluția problemei este 1 — 196 treceri. Necunoscând capacitatea de transport a podului problema nu este complectă și nu se poate rezolva.

Să admitem că dorința propunătorului era ca trecerile să fie uniforme. Ei bine, și atunci trebuia dată capacitatea de transport. In adevăr, soluția dată cere trecerea de 28 ori, câte 5, 7, și 9 dela cele trei turme I, II și III, ducându-se deci câte 21 la fiecare transport. Dar dacă podul poate lua 42 oi, de ce nu s'ar face 14 treceri de câte 10, 14 și 18 deodată? De ce nu s'ar face 7 treceri de câte 20, 28, 36 oi? De ce nu s'ar face 4 treceri de câte 35, 49, 63 oi? Prin urmare și în cazul de treceri uniforme trebue să știm capacitatea de transport a podului.

Conchidem de aci că, nici enunțul problemei, nici soluția dată, nu sunt practice.

I. IONESCU.

27. *Asupra articolului „Extinderi în legătură cu indicatorii“.* D-l FLORESCU L. VICTOR ne trimite o notă făcând aceeași observație, pe care a făcut-o D-l Profesor P. SERGESCU, pentru care îi mulțumim.

I. L.

28. *Asupra problemei 4240.* Originalitatea problemei 4240 (G. M. Anul XLIV. Nr. 6 din Februarie 1939, pag. 315) și faptul că prin rezolvarea ei se evidențiază efectul interesant al inerției în mișcarea de rotație m'au determinat de a prezenta această notă asupra mișcării sferelor.

a) *Mișcarea unei sfere căreia i s'a imprimat o iuțeală inițială unghiulară ω_0 pe un plan orizontal.*

Elementele mecanice cari intervin în timpul mişcării sunt: greutatea G a sferei, reacţiunea N = G a planului, frecarea F şi cuplul de frecare C.

Pentruca sfera să se rostogolească fără să alunece trebueşte ca:

$$F \leqslant f N. \qquad (1)$$

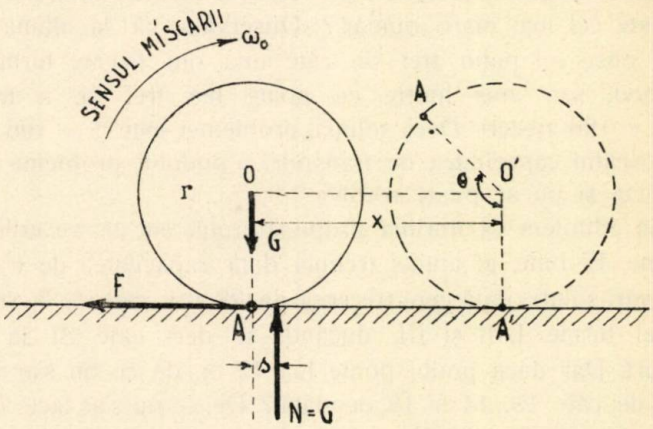


Fig. 1.

In acest caz:

$$C = N \cdot s = G \cdot s \qquad (2)$$

f şi s sunt respectiv coeficienţii de frecare de lunecare şi rostogolire.

Ecuaţiunile dinamice ale mişcării centrului de greutate şi în jurul centrului de greutate ne dau:

$$\frac{G}{g} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -F \quad (3) \quad ; \quad I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = Fr - Gs \qquad (4)$$

în care I este momentul de inerţie al sferei în raport cu axul orizontal de rotaţie trecând prin centrul de greutate.

Ţinând seama că: $x = r\theta$ şi deci:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = r \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

obţinem prin eliminarea lui F între (3) şi (4):

$$\left(I + \frac{G}{g} r^2 \right) \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -Gs.$$

Dar:

$$I + \frac{G}{g} r^2 = I_A$$

I_A = momentul de inerţie al sferei în raport cu axul instantaneu de rotaţie trecând prin A.

Deci:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{G.s}{I_A} . \qquad (5)$$

Rezultatul (5) se putea obţine de altfel direct aplicând ecuaţiunea dinamică în mişcarea de rotaţie a sferei în jurul axului instantaneu A.

Din (5) prin integrare:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega = \omega_0 - \frac{Gs}{I_A} . t$$

$$x = r\theta = r\omega_0 t - \frac{Gsr}{2 I_A} . t^2 .$$

Sfera se va opri la timpul t când $\omega = 0$

$$t = \frac{\omega_0 I_A}{Gs}$$

după ce va parcurge distanţa:

$$x = \frac{\omega_0^2 I_A r}{2Gs} .$$

La acelaşi rezultat puteam ajunge prin aplicarea principiului energiei cinetice în intervalul dela plecarea sferei cu iuţeala iniţială unghiulară ω_0 şi până la oprirea sa,

$$E_1 - E_0 = \mathcal{C}_{1-0} \qquad (6)$$

$$E_1 = 0 \qquad E_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{G}{g} v_0^2 + \frac{1}{2} . I\omega_0^2 .$$

Dar:

$$v_0 = r\omega_0 .$$

Rezultă:

$$E_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{G}{g} r^2 + I\right)\omega_0^2 = \frac{1}{2} I_A \omega_0^2 .$$

Lucrul mecanic este dat numai de cuplul rezistent al frecării de rostogolire Gs:

$$\mathcal{C} = -Gs\theta = -Gs\frac{x}{r} .$$

Introducând aceste valori în (6) regăsim:

$$x = \frac{\omega_0^2 I_A r}{2Gs} .$$

In tot timpul mişcării:

$$F = -\frac{G}{g} r \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{G^2}{g I_A} rs = \text{constant.}$$

Condiţia (1) ca sfera să se rostogolească fără să alunece este prin urmare:

$$\frac{G^2}{g I_A} rs \leqslant f G$$

$$f \geqslant \frac{Grs}{g I_A}$$

condiţie practic îndeplinită din cauza micimii lui s.

Să considerăm acum cele două sfere plecând cu aceeaşi iuţeală iniţială unghiulară ω_0.

Notând cu indicele 1 elementele referitoare la sfera de aur şi cu indicele 2 elementele referitoare la sfera imitaţie vom avea următoarele rapoarte între timpurile de mers şi drumurile parcurse:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{t_1}{t_2} = \frac{I_{1A} \cdot s_2}{I_{2A} \cdot s_1} .$$

Cum $I_{1A} > I_{2A}$, iar s_1 şi s_2 sunt foarte puţin diferiţi:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{t_1}{t_2} > 1$$

prin urmare sfera de aur parcurge o distanţă mai lungă dar într'un timp mai lung decât imitaţia ei.

b) *Mişcarea unei sfere lăsate să cadă liber pe un plan înclinat.*

Problema este complect analoagă celei precedente. Elementele mecanice sunt date în figură.

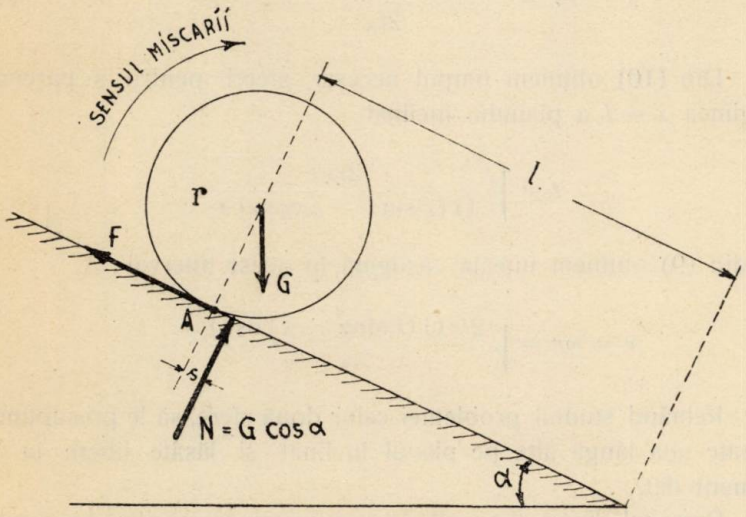


Fig. 2.

Reluând ecuaţiunile generale:

$$\frac{G}{g} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = G \sin\alpha - F \qquad (7)$$

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = Fr - G \cos\alpha \cdot s \qquad (8)$$

$$x = r\theta$$

obţinem în mod identic cazului anterior prin eliminarea lui F între (7) şi (8):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{G(r \sin\alpha - s \cos\alpha)}{I + \frac{G}{g} r^2} = \frac{G(r \sin\alpha - s \cos\alpha)}{I_A}.$$

De unde prin integrare:

$$\omega = \frac{G\,(r \sin\alpha - s\cos\alpha)}{I_A}\,.\,t \qquad (9)$$

$$x = r\theta = \frac{G\,(r\sin\alpha - s\cos\alpha)\,r}{2I_A}\,.\,t^2. \qquad (10)$$

Din (10) obţinem timpul necesar sferei pentru a parcurge lungimea $x = l$ a planului înclinat:

$$t = \sqrt{\frac{2I_A\,l}{G\,(r\sin\alpha - s\cos\alpha)\,r}},$$

iar din (9) obţinem iuţeala câştigată în acest interval:

$$v = \omega r = \sqrt{\frac{2lr\,G\,(r\sin\alpha - s\cos\alpha)}{I_A}}\,.$$

Reluând studiul problemei celor două sfere, să le presupunem aşezate una lângă alta pe planul înclinat şi lăsate libere la un moment dat.

Raportul dintre timpurile în cari vor parcurge planul şi iuţelile ce vor obţine va fi:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{I_{1A}\,(r\sin\alpha - s_2\cos\alpha)}{I_{2A}\,(r\sin\alpha - s_1\cos\alpha)}} > 1$$

adică sfera de aur ajunge mai târziu la baza planului înclinat şi cu iuţeala mai mică decât imitaţia sa.

Luând $s_1 = s_2$:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{I_{1A}}{I_{2A}}}\,.$$

Rezultate identice se obţineau prin aplicarea principiului energiei cinetice; deasemenea, ca şi în problema precedentă, se puteau face observaţiuni interesante asupra frecării F şi condiţiei ca sfera să se rostogolească fără să alunece.

c) Un alt mijloc posibil de identificare este de a realiza cu cele două sfere două pendule, prin prinderea lor de câte un fir de aceeaşi lungime.

Perioadele oscilaţiunilor mici vor fi:

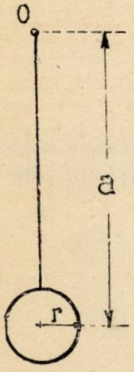


Fig. 3.

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{Ga}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_1 + \frac{G}{g}a^2}{Ga}}$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_2 + \frac{G}{g}a^2}{Ga}}$$

Rezultă:

$$T_1 > T_2$$

adică perioada de oscilaţie a sferei de aur este mai mare decât a imitaţiei sale.

Observaţiuni. 1. Din punct de vedere practic cel mai indicat metod de identificare a sferei de aur este acela al raportului timpurilor din soluţia cu planul înclinat.

2. In soluţia problemei 4240 s'au considerat drept forţe de inerţie:

$$F_1 = I_1\frac{d\omega}{dt} \qquad F_2 = I_2\frac{d\omega}{dt}$$

în care $\frac{d\omega}{dt}$ este iuţeala de rotaţie.

Formulele nu sunt posibile, întrucât în acest caz F_1 şi F_2 ar fi de natura unui moment al cantităţilor de mişcare (L^2MT^{-1}), iar nu de natura unor forţe.

INGINER ALEXANDRU STOENESCU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITEHNICĂ « REGELE CAROL II » DIN BUCUREŞTI

Concursul de admitere în Anul I

(17—20 Octomvrie 1939)

Facultăţile de { Construcţii (A)
Mecanică şi Electricitate (B)
Mine şi Metalurgie (C)

I. FIZICA

1°. Căderea corpurilor: Legi şi Experienţe.
2°. Microscopul.
3°. Principiul lui ARHIMEDE: Diferite aplicaţiuni.
4°. Electromagnetul: Diferite aplicaţiuni.

Observare: Primele două chestiuni sunt obligatorii, din ultimele două, se va trata numai una la alegere, dându-i-se caracterul unei compoziţii ştiinţifice.

II. GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ ŞI GEOMETRIE

Chestiune obligatorie

Se dă un plan (P, P'), paralel cu linia de pământ OX şi o dreaptă verticală (*oz*, *o'z'*), se cere:

a) Să se reprezinte proiecţiile (*m*, *m'*) ale unui punct *oarecare* M, al planului (P, P').

b) Să se afle proiecţiunile (*n*, *n'*) ale punctului N, în care verticala dată (*oz*, *o'z'*) înţeapă planul (P, P').

c) Să se afle dreptele de intersecţie D (*d*, *d'*) şi E (*e*, *e'*) dintre planul (P, P') şi planele bisectoare ale diedrului format din planele de proiecţie H şi V.

Chestiuni facultative

I. Se dă o dreaptă oarecare D (*d*, *d'*) şi un punct M (*m*, *m'*) nesituat pe dreapta D.

Se cere:

1. Să se afle proiecţiunile unei drepte E (*e*, *e'*) care să treacă prin M şi să întâlnească dreapta D şi linia de pământ OX.

2. Se vor executa epurele problemei şi în cazul când dreapta D este orizontală, frontală, verticală, dreaptă de capăt, fronto-orizontală, dreaptă de profil, dreaptă ce întâlneşte linia de pământ OX.

II. Se dă o orizontală D_1 şi o frontală D_2, concurente în spaţiu. Se cere:

1. Să se deseneze urmele αP şi $\alpha P'$ ale planului (P) definit de dreptele D_1 şi D_2.

2. Să se afle intersecţia M (*m*, *m'*) dintre orizontala D_1 şi planul bisector al primului diedru; deasemeni să se afle intersecţia N (*n*, *n'*) dintre frontala D_2 şi planul bisector al primului diedru.

3. Să se demonstreze că în epură, punctele α, *m*, *n* sunt în linie dreaptă; deasemeni, să se arate că punctele α, *m'*, *n'* sunt în linie dreaptă.

Să se explice geometric aceste proprietăţi.

Să se generalizeze.

Chestiune obligatorie

Intr'un plan se dau două puncte A, B şi două drepte oarecari D şi Δ; se cere:

a) Să se determine în acest plan un punct M, care să fie în acelaşi timp egal depărtat de punctele A, B şi de dreptele D şi Δ.

b) Insemnând AB = $2l$, MA = a se cere să se calculeze suprafaţa şi volumul născut de triunghiul AMB, prin rotirea acestuia în jurul lui AB.

c) Să se determine locul geometric al punctelor din spaţiu echidistante în acelaşi timp de puntele A, B şi de dreptele D şi Δ.

Chestiuni facultative

I. Se dau într'un plan două cercuri: O de rază R şi O' de raxă R' ≠ R. Se cere să se ducă o secantă care să intercepteze pe cercul O, o coardă de lungime $\frac{R}{2}$ şi în cercul O', o coardă de lungime $\frac{R'}{2}$.

Să se generalizeze chestiunea în spaţiu.

II. Se dau două plane P şi Q. Dreptele D_1 şi D_2 situate în planul P, întâlnesc planul Q respectiv în punctele M şi N.

Să se demonstreze că orice punct al dreptei MN se află în planul P.

Notă. Elevii vor trata întâi chestiunea *obligatorie* de Geometrie Descriptivă, chestiunea *obligatorie* de Geometrie plană şi în spaţiu şi numai în urmă chestiunile facultative.

La Geometrie Descriptivă epurele se vor executa chiar pe hârtia de scris, *în creion* şi vor fi însoţite de o scurtă explicaţie.

Timp acordat: 4 ore.

III. ALGEBRĂ ŞI TRIGONOMETRIE

1. Se consideră funcţiunea:

$$y = x^5 - 5\cos\alpha \cdot x^4 + 5x + \lambda = f(x)$$

α şi λ fiind nişte parametri reali, şi se cere:

1°. Presupunând $\alpha = 0$ şi $\lambda = 1$ să se construiască curba reprezentativă a funcţiunei, deducând din variaţia ei numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $f(x) = 0$, stabilind aproximativ poziţiile lor pe axa Ox.

2°. Să se determine ce valori trebue să ia α în cazul general, pentru ca y să nu aibă nici maxime nici minime.

3°. Dacă α este tot nul, pentru ce valori ale lui λ ecuaţia $f(x) = 0$ nu are decât o singură rădăcină reală.

2. Un balon sferic de rază $r = 5$ m este văzut de un observator aşezat pe un plan orizontal sub un unghiu $\sigma = 1°28'$, iar unghiul făcut de raza vizuală ce merge la centrul balonului cu planul orizontal este determinat de acelaş observator ca fiind: $\beta = 78°43'$. Se întreabă:

1°. La ce înălţime h se găseşte balonul.

2°. Presupunând că balonul se înalţă pe verticală cu 100 m faţă de poziţia precedentă, sub ce unghiu va fi văzut de acelaş observator, în această nouă poziţie?

(Ambele chestiuni obligatorii, fiecare problemă căpătând o notă. Timp acordat: 4 ore).

IV. GEOMETRIE ANALITICĂ ŞI MECANICĂ

Geometrie Analitică. Se iau două axe rectangulare Ox, Oy şi prin punctele: O (0,0) ; A ($2a$, 0) ; B (0,$2b$) se duce un cerc:

1°. Se va scrie ecuaţia acestui cerc;

Se duce bisectoarea OC a unghiului $\widehat{BOA}$.

2°. Se va scrie ecuaţia acestei drepte OC;

3°. Se vor calcula coordonatele punctului C, unde bisectoarea taie cercul.

Punctul C se proiectează ortogonal pe Ox şi Oy respectiv în punctele C_1 şi C_2.

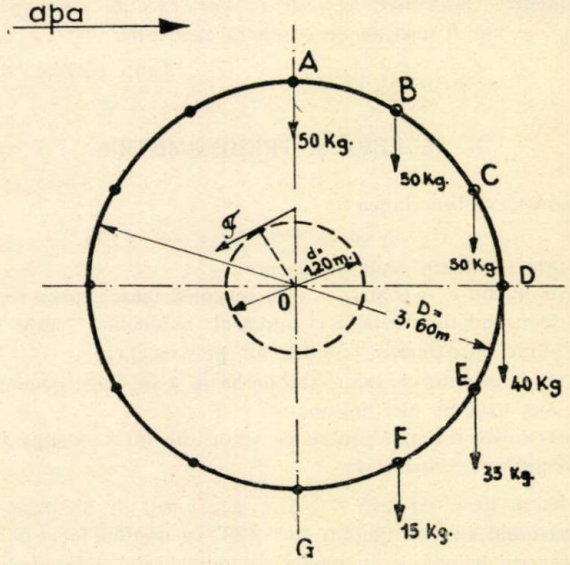
Din punctul C se coboară o perpendiculară CD pe dreapta AB:

4°. Se vor scrie ecuaţiile dreptelor AB şi CD;

5°. Se vor calcula coordonatele punctului D;

6°. Se va arăta că punctele C_1, D şi C_2 sunt în linie dreaptă.

Mecanică. 1. O roată hidraulică cu axa orizontală, având un diametru de 3,60 m, este prevăzută cu 12 cupe aşezate la distanţe egale de periferia roţii.



La un moment dat roata se găseşte în poziţia din figură, iar cupele A, B, C, D, E, F, care conţin apă, sunt încărcate cu greutăţile următoare: 50 kg ; 50 ; 50 ; 40 ; 35 şi 15 kg. Să se determine:

a) Rezultanta forţelor corespunzând greutăţilor apei în mărime, direcţie şi poziţie.

b) Momentul aceloraşi forţe faţă de axa O a roţii.

c) Ce forţă F trebue aplicată tangent la butucul roţii pentruca să oprească roata, ştiind că diametrul butucului roţii este :

$$d = 1{,}20 \text{ m.}$$

2. Din Giurgiu se dă alarma că la ora 8,00 un avion inamic a trecut pe deasupra oraşului cu direcţiunea spre Bucureşti.

La ora 8,03′ un avion românesc decolează din Bucureşti, după alte 2 minute se urcă la înălţimea necesară şi apoi, zburând cu 360 km/oră către Giurgiu, întâlneşte avionul inamic la o distanţă de 24 km de Bucureşti.

Ştiind că distanţa, în linie dreaptă, între Giurgiu şi aerodromul Bucureşti este de 69 km, să se determine :

a) Iuţeala avionului inamic.

b) Ora întâlnirii celor două avioane.

(Toate chestiunile obligatorii. Timpul acordat : 4 ore).

FACULTATEA DE CHIMIE INDUSTRIALĂ (D)

I. FIZICA

Aceleaşi chestiuni ca la Facultăţile A, B şi C.

II. GEOMETRIE ELEMENTARĂ

1. Se dă un paralelogram ABCD, căruia i se împarte diagonala BD prin punctele M şi N în trei părţi egale. Dreapta AM taie latura BC în A_1, iar AN taie latura CD în A_2; deasemeni dreapta CM taie pe pe AB în C_2, iar CN taie pe AD în C_1. Se cere :

1°. Să se arate că patrulaterele AMCN şi $A_2\,MC_2\,N$ sunt paralelograme.

2°. Să se determine rapoartele dintre ariile acestor paralelograme şi aria paralelogramului ABCD.

3°. Cum trebue să fie paralelogramul ABCD pentru ca AMCN să fie un dreptunghiu ? Dar ca $A_2\,MC_2\,N$ să fie dreptunghiu ?

2. Se dă un trapez isoscel ABCD, de baze $AB = 2a$ şi $CD = 2b$, ale cărui diagonale se taie în unghiu drept. Se cere :

1°. Să se arate cum se poate construi un astfel de trapez când se cunoaşte a şi b.

2°. Să se demonstreze că suma ariilor pătratelor construite pe cele două baze, este egală cu suma ariilor pătratelor construite pe laturile oblice ale trapezului.

3°. Fie AD D' A' pătratul construit pe latura AD, în exteriorul trapezului. Să se găsească locul geometric al vârfului D' al pătratului, când baza CD a trapezului se deplasează paralel cu AB, care rămâne fixă.

(Timp acordat: 4 ore).

III. ALGEBRĂ ŞI TRIGONOMETRIE

1. Se dă ecuaţia de gradul al doilea

$$x^2 + 2(3y - 2)x + y^2 - 4y + 20 = 0$$

şi se cere:

1°. Dacă x este necunoscut, iar y un parametru, să se discute realitatea rădăcinilor după valorile parametrului y.

2°. Dacă y este necunoscut, iar x un parametru, să se discute realitatea rădăcinilor după valorile parametrului x.

2. Dacă x este necunoscut, iar p un parametru, să se deslege ecuaţia trigonometrică

$$2(p + 1)\cos 2x + 4p \sin x - 3p - 1 = 0,$$

adică:

1°. Să se deducă ecuaţia de gradul al doilea în raport cu $\sin x$ şi să se calculeze cele două valori ale lui $\sin x$.

2°. Să se determine valorile parametrului p pentru care valorile corespunzătoare ale lui x sunt reale.

3°. Să se calculeze în grade, minute şi secunde, valorile lui x în cazul particular $p = -1/7$.

3. Se dau două numere a şi b; se cere să se determine alte două numere x şi y, ştiind că

numerele a , x , y sunt în progresie aritmetică,

iar

numerele x , y , b sunt în progresie geometrică.

Caz particular: $a = 17/3$, $b = 1/27$.

4. Care este ora exactă, între orele 10 şi 11, când cele două ace ale unui ceasornic au direcţiile perpendiculare.

Problema admite două soluţii şi se cere să se calculeze ambele soluţii.

5. Pornind dela

$$\cos(\pi/4) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \quad \text{şi} \quad \sin(\pi/4) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},$$

să se calculeze, din aproape în aproape,

$$\cos(\pi/8) \ , \ \sin(\pi/8);$$
$$\cos(\pi/16) \ , \ \sin(\pi/16);$$
$$\cos(\pi/32) \ , \ \sin(\pi/32);$$

şi aşa mai departe.

(Timp acordat: 4 ore).

IV. CHIMIA

1. Legea lui AVOGADRO şi importanţa ei.
2. Care este deosebirea între un atom şi un ion.
3. Să se descrie prepararea industrială a acidului sulfuric prin procedeul de contact.
4. Care este proprietatea cea mai importantă a apei oxigenate şi aplicaţiile ei.
5. Ce sunt catalizatorii. (Câteva exemple).
6. Care sunt întrebuinţările practice ale carburii de calciu.
7. Produsele obţinute prin distilarea uscată a cărbunilor de pământ.
8. Ce sunt grăsimile ; importanţa lor.
9. Substanţele albuminoide. (Definiţie, proprietăţi generale tipuri mai importante .
10. Ce sunt şi câte feluri de fermentaţii se cunosc.

(Toate chestiunile obligatorii. Timp : 4 ore).

FACULTATEA DE SILVICULTURĂ (E)

I. FIZICA ŞI CHIMIA

Fizica : 1. Despre presiunea atmosferică (metodele pentru determinarea presiunei.

2. Să se arate cum este format un acumulator cu lame de plumb şi cari sunt reacţiunile ce se petrec la încărcarea şi descărcarea acumulatorului.

3. Care e principiul de bază a microscopului. Să se arate în mod schematic mersul razelor şi formarea imaginilor.

Chimie : 1. Despre aerul atmosferic.

2. Mercurul şi compuşii lui cei mai importanţi.

3. Alcoolul etilic.

(Toate chestiunile obligatorii. Timp : 4 ore).

II. GEOMETRIA ELEMENTARĂ

Aceleaşi chestiuni ca la Facultatea D.

III. ALGEBRĂ ŞI TRIGONOMETRIE

Aceleaşi chestiuni ca la Facultatea D.

IV. BOTANICĂ ŞI ZOOLOGIE

Chestiuni obligatorii:

Botanica. 1. Consideraţiuni generale asupra Gymnospermelor.
2. Funcţiunile rădăcinei.
Se mai poate trata la alegere una din chestiunile:
1. Să se descrie o specie de arbori din pădurile noastre.
2. Zone de vegetaţie.

Chestiuni obligatorii:

Zoologia. 1. Caracterele generale ale păsărilor.
2. Caracterele generale ale insectelor.

Chestiune facultativă

Viermii inelaţi.
Probele de Botanică şi Zoologie se vor nota separat.
(Timpul acordat: 4 ore).

BIBLIOGRAFIE

Artă şi Tehnică Grafică. Buletinul Imprimeriilor Statului. Caetul Nr. 10. Decemvrie 1939. Martie 1940. Bucureşti. Forma şi curba dinamică în artă de MIRCEA ATHANASIU. Tehnica grafică de AL. D. BUNESCU.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 46. Nr. 1. Ianuarie 1940. Menasha Wis. New-York.

Buletinul „I. R. E.". Institutul român de energie. Anul VII. Nr. 4. Decemvrie 1939. Bucureşti. Funcţii periodice şi aplicaţiile lor în fizică (urmare) de E. ABASON.

Journal de Mathématiques Élémentaires, publicat de H. VUIBERT. An. 64. Nr. 9. 1 Februarie 1940, Paris. Asupra produsului omotetiilor de J. P. ROBERT.

Idem. An. 64. Nr. 10. 15 Februarie 1940. Paris.

Pitagora. Revistă de matematici. Anul V. Nr. 5. 10 Februarie 1940. Bucureşti. Natura intrinsecă a legilor opticei geometrice de T. VESCAN. Asupra unor cercuri ataşate unui triunghiu de C. COŞNIŢĂ. Cuartica polară a unei conice în raport cu un fascicol punctual de conice de C. BORŞ. Asupra ecuaţiei bipatrate de O. ENULESCU. Asupra patrulaterului complet de N. MIHĂILEANU, Asupra unei formule a lui BERTRAND de G. G. CONSTANTINESCU.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XIX. Nr. 11. Ianuarie 1940. Produse magice şi panmagice de E. STERN. Transformarea rombică şi antirombică. Transformările (OA, φ) de V. ALACI.

Idem. Anul XIX. Nr. 12. Februarie 1940. Produse magice şi panmagice (urmare) de E. STERN, Coordonate hiperbolice de E. VIŞA.

Suplimentul Gazetei Matematice. Anul VI. Nr. 6. 1 Martie 1940, Bucureşti.

TH. ANGHELUŢĂ. *Curs de Algebră Superioară. Funcţii analitice.* Cu o prefaţă de D-l PAUL MONTEL. Cluj. 1940.

MIHAÏL MANOÏLESCO. *Die theoretische Problematik des Aussenhandels.* Synthese-Beweisführung-Polemik. Extras din „Weltwirtschaftlichen Archiv", Zeitschrift des *Instituts für Weltwirtschaft an der Universität Kiel.* Ianuarie 1940.

MIHAIL ST. BOTEZ. *Sur la zone de convergence des quelques séries syntagmatiques.* (Extras). 1939.

MIHAIL ST. BOTEZ. *Asupra lui* ABEL. (Extras. Pitagora V, 3).

ILIE A. POPA. *Le modèle italien d'un ancien traité d'Arithmétique, Archeion.* Vol. XXI, 1938.

In articolul cu acest titlu D-l I. A. POPA arată că manualul de *Aritmetică* al lui AMFILOCHIE HOTINIUL apărut la Iaşi în 1795 e prelucrat după *Elementi Aritmetici* ale lui ALESSANDRO CONTI, tipărite în mai multe ediţii între anii 1730—80 şi foarte răspândite în Italia. Cartea lui AMFILOCHIE ar fi în multe privinţe superioară modelului, de sub influenţa căruia se emancipează complet către sfârşitul cărţii. D-l POPA dovedeşte cu câteva exemple bine alese cele afirmate de D-sa şi promite un studiu mai detailat al acestei chestiuni.

VICTOR MARIAN.

CERERI

Răspunsuri la Cererile Nr. 94. (Anul XXVIII, pag. 103) şi *Nr. 99.* (Anul XXVIII, pag. 256).

Răspunsurile la aceste chestiuni se găsesc în articolul „ANTIOCH CANTEMIR" din acest Număr al *Gazetei Matematice.*

I. I.

DIVERSE

Comemorarea lui GHEORGHE ŢIŢEICA.

Parastasul de 1 an s'a făcut în ziua de 4 Februarie la Biserica Enei în prezenţa familii, a reprezentanţilor Instituţiunilor Ştiinţifice, culturale, economice, etc. la care a participat defunctul în viaţa lui; a foştilor studenţi ai lui şi a cunoscuţilor.

A doua zi ŢIŢEICA a fost comemorat la *Centrala Caselor Naţionale* unde el fusese Director cultural. Au vorbit D-nii: GENERAL I. MANOLESCU. C. RĂDULESCU MOTRU, DASCOVICI, etc., după care s'au citit pasagii din cuvântările morale pe care ŢIŢEICA le-a ţinut la acea Instituţiune. Comemorarea s'a terminat prin reproducerea după o placă patefonică, a cuvântării pe care ŢIŢEICA a ţinut-o la serbarea de 40 de ani a *Gazetei Matematice*, care a impresionat adânc asistenţa.

In seara zilei de 10 Februarie, ŢIŢEICA a fost comemorat la *Societatea Politecnică din România* unde el a fost Vice-preşedinte. Au vorbit D-l C. BUŞILĂ, Preşedintele Societăţii, D-l ION IONESCU, arătând activitatea lui la acea Societate şi D-l NICOLAE VASILESGU-KARPEN, Rectorul Politecnicei „Regele Carol II", la care ŢIŢEICA fusese Profesor de Analiză.

In după amiaza zilei de 18 Februarie ŢIŢEICA a fost comemorat de *Societatea Română de Ştiinţe* unde el a fost de mai multe ori Preşedinte. Au vorbit D-l D. POMPEIU din partea Academiei Române şi a Facultăţii de Ştiinţe, D-l O. ONICESCU, din partea Societăţii, D-l G. VRÂNCEANU, care a arătat opera geometrică a lui ŢIŢEICA, D-l N. VASILESCU-KARPEN din partea Politecnicei din Bucureşti, D-l GR. STRATILESCU din partea Societăţii Politecnice din România, D-l GR. MOISIL din partea Facultăţii de ştiinţe din Iaşi, D-l D. STOICA din partea *Gazetei Matematice*, D-l I. APOSTOLEANU din partea Secţiei de Ştiinţe agricole a Societăţii de Ştiinţe, D-l Profesor C. POPOVICI a citit telegramele primite printre care şi următoarea din partea profesorilor de matematici dela Universitatea din Cluj:

„*Membrii seminarului de Matematici ai Universităţii Cluj iau parte cu adâncă recunoştinţă la pioasa comemorare a marelui Român şi Geometru* GHEORGHE ŢIŢEICA. *Viaţa sa va fi vecinic pilduitoare de muncă fără preget pentru strălucirea Ţării. Opera neperitoare a ilustrului învăţat va călăuzi generaţiile de cercetători pe drumurile aspre ale matematicilor. Să-i fie memoria sfântă şi în veci binecuvântată.*

(ss) ABRAMESCU, ANGHELUŢĂ, BRATU, CĂLUGĂREANU, IONESCU, SERGESCU".

După ce D-l C. POPOVICI a mai spus câteva cuvinte, seria cuvântărilor a încheiat-o D-l AL. PANTAZI, actualul Preşedinte al Societăţii matematice din Bucureşti.

Sporirea Bibliotecii.

E. COLLIGNON. Traité de mécanique. Paris, 1873.

C. DUMITRESCU. Trigonometria, 1894—1895.

J. ADHÉMAR. Traité des ombres. Ed. III. Paris, 1870.

DARBOUX. Mecanique (22 manuscrise).

LEFEBURE DE FOURCY. Trataţia asupra geometriei descriptive. Tomul I. Bucureşti, 1851.

Donate de D-l M. PORTOCALĂ, Inginer.

T. VESCAN. La théorie des courbes définies comme l'intersection des deux surfaces représentées paramétriquement. Extras. 1939.

ERNEST LEBON: HENRI POINCARÉ. Paris, 1912.

LUCIEN FABRE. Les théories d'EINSTEIN. Paris, 1921.
Donate de D-l T. VESCAN, Profesor.

K. SCHWERING. Theorie und Anwendung der Linien coordinaten. Leipzig, 1884.

FR. GRAEFE. Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie. Leipzig, 1885.
Donate de D-l GENERAL C. FELIX.

L. RIPÉRT. La dualité et l'homographie dans le triangle et tétraèdre. Paris, 1898.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

C. ALASIA. Sugli automorfismi di certi gruppi di operazioni. Livorno, 1907.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2735. *Fie* J *punctul de întâlnire al diagonalelor patrulaterului* ABCD; O *intersecția dreptelor* BC, AD; J' *simetricul lui* J *în raport cu mijlocul lui* AB. *Dreptele* OJ, OJ' *intersectează dreptele* DC, AB *în* M *și* N, *iar dreapta* MN *intersectează pe* AC *în* P. *Fie* Q *intersecția lui* DP *cu paralela dusă prin* B *la* MN.

Să se găsească locul lui Q, *când* A, C, D *sunt fixe, iar* B *descrie* OC, *fixă în întregime.*

D. V. IONESCU.

1. Vom rezolva problema prin metoda vectorială. Notăm vectorii $\overrightarrow{OD}$ și $\overrightarrow{OC}$ cu $\overrightarrow{u}$ și $\overrightarrow{v}$. Vectorii $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$ fiind purtați pe suporturile vectorilor $\overrightarrow{OD}$ și $\overrightarrow{OC}$, vom avea

$$\overrightarrow{OA} = a\overrightarrow{u} \quad , \quad \overrightarrow{OB} = \lambda\overrightarrow{v}.$$

Punctul A fiind fix, a este un număr dat. Punctul B fiind variabil pe segmentul OC, λ este un parametru care variază între 0 și 1. J fiind la intersecția diagonalelor, avem

$$\overrightarrow{OJ} = \lambda\overrightarrow{v} + k(\overrightarrow{u} - \lambda\overrightarrow{v}) = a\overrightarrow{u} + k'(\overrightarrow{v} - a\overrightarrow{u})$$

unde k şi k' sunt două constante astfel alese ca cele două forme lineare în $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ să fie identice. Vom avea

$$\lambda(1-k)=k' \quad , \quad k=a(1-k')$$

de unde rezultă

$$k=\frac{a(1-\lambda)}{1-a\lambda} \quad , \quad k'=\frac{\lambda(1-a)}{1-a\lambda}$$

şi deci

$$\boxed{\vec{OJ}=\frac{a(1-\lambda)\vec{u}+\lambda(1-a)\vec{v}}{1-a\lambda}} \; . \qquad (1)$$

Se exclude cazul

$$1-a\lambda=0$$

când dreptele AC şi BD sunt paralele şi care nu corespunde senzului problemei.

Din egalitatea

$$\vec{OJ'}+\vec{OJ}=\vec{OA}+\vec{OB}$$

se deduce

$$\boxed{\vec{OJ'}=a\lambda\frac{(1-a)\vec{u}+(1-\lambda)\vec{v}}{1-a\lambda}} \; . \qquad (2)$$

Să determinăm acum vectorii $\vec{OM}$ şi $\vec{ON}$. Scriind că

$$\vec{OM}=k\frac{a(1-\lambda)\vec{u}+\lambda(1-a)\vec{v}}{1-a\lambda}=\vec{v}+k'(\vec{u}-\vec{v})$$

avem ecuaţiile

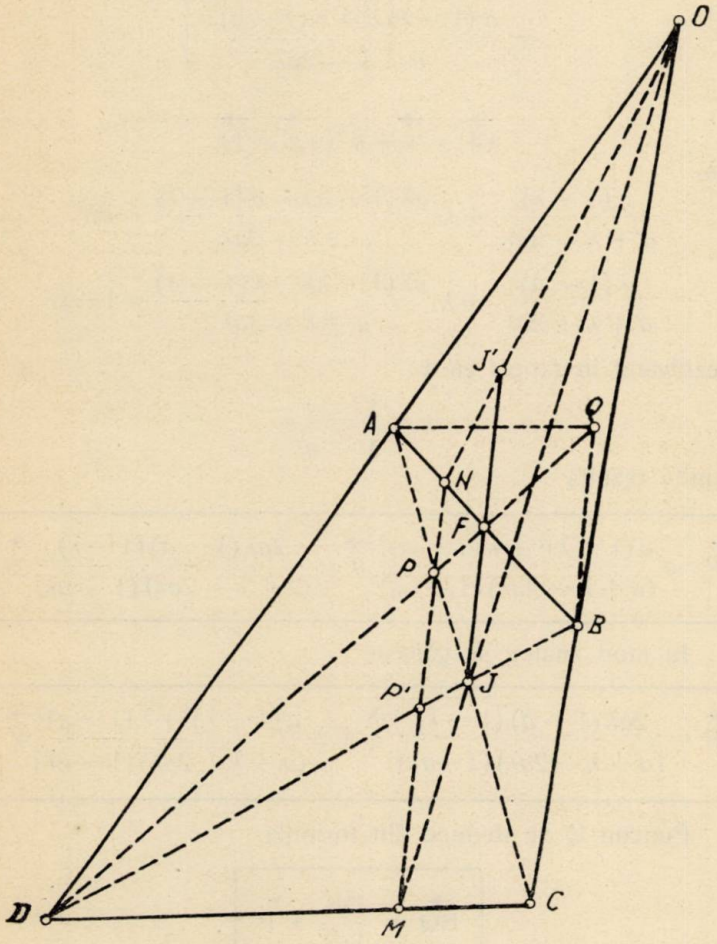
$$k\frac{a(1-\lambda)}{1-a\lambda}=k' \quad , \quad k\frac{\lambda(1-a)}{1-a\lambda}=1-k'$$

din care se deduce

$$k=\frac{1-a\lambda}{a+\lambda-2a\lambda}$$

și deci

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \frac{a(1-\lambda)\overrightarrow{u} + \lambda(1-a)\overrightarrow{v}}{a+\lambda-2a\lambda}} \cdot \qquad (3)$$



și la fel se arată că

$$\boxed{\overrightarrow{ON} = a\lambda \frac{(1-a)\overrightarrow{u} + (1-\lambda)\overrightarrow{v}}{a+\lambda-2a\lambda}} \cdot \qquad (4)$$

Dreapta MN întâlneşte diagonalele AC, BD în P şi P'. Să determinăm aceste puncte. Scriind că avem

$$\overrightarrow{OP} = \frac{a(1-\lambda)\overrightarrow{u} + \lambda(1-a)\overrightarrow{v}}{a+\lambda-2a\lambda} + k\left[a\lambda\,\frac{(1-a)\overrightarrow{u} + (1-\lambda)\overrightarrow{v}}{a+\lambda-2a\lambda} - \frac{a(1-\lambda)\overrightarrow{u} + \lambda(1-a)\overrightarrow{v}}{a+\lambda-2a\lambda}\right]$$

sau

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{v} + k'(a\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}),$$

avem

$$\frac{a(1-\lambda)}{a+\lambda-2a\lambda} + k\,\frac{a\lambda(1-a) - a(1-\lambda)}{a+\lambda-2a\lambda} = ak'$$

$$\frac{\lambda(1-a)}{a+\lambda-2a\lambda} + k\,\frac{a\lambda(1-\lambda) - \lambda(1-a)}{a+\lambda-2a\lambda} = 1-k'$$

şi rezolvând în raport cu k:

$$k = \frac{1-a}{1-a\lambda},$$

de unde rezultă

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = a\,\frac{a(1-\lambda)^2 + \lambda(1-a)^2}{(a+\lambda-2a\lambda)(1-a\lambda)}\overrightarrow{u} + \frac{2a\lambda(1-a)(1-\lambda)}{(a+\lambda-2a\lambda)(1-a\lambda)}\overrightarrow{v}} \quad (5)$$

In mod analog se găseşte

$$\boxed{\overrightarrow{OP'} = \frac{2a\lambda(1-a)(1-\lambda)}{(a+\lambda-2a\lambda)(1-a\lambda)}\overrightarrow{u} + \lambda\,\frac{a(1-\lambda)^2 + \lambda(1-a)^2}{(a+\lambda-2a\lambda)(1-a\lambda)}\overrightarrow{v}} \quad (6)$$

Punctul Q se deduce din formula

$$\boxed{\overrightarrow{BQ} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DP'}}\overrightarrow{P'P}} \quad (7)$$

Făcând calculele găsim

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DP'}} = \frac{(a+\lambda-2a\lambda)(1-a\lambda)}{a(1-\lambda)^2 + \lambda(1-a)^2}.$$

Din (7) rezultă

$$\vec{OQ} = \lambda \vec{v} + \frac{(a+\lambda-2a\lambda)(1-a\lambda)}{a(1-\lambda)^2+\lambda(1-a)^2}\left[a\frac{a(1-\lambda)^2+\lambda(1-a)^2}{(a+\lambda-2a\lambda)(1-a\lambda)}\right.$$

$$+\frac{2a\lambda(1-a)(1-\lambda)}{(a+\lambda-2a\lambda)(1-a\lambda)}\vec{v} - \frac{2a\lambda(1-a)(1-\lambda)}{(a+\lambda-2a\lambda)(1-a\lambda)}\vec{u}$$

$$\left. -\lambda\frac{a(1+\lambda)^2+\lambda(1-a)^2}{(a+\lambda-2a\lambda)(1-a\lambda)}\vec{v}\right]$$

sau făcând calculele

$$\vec{OQ} = \left[a - \frac{2a\lambda(1-a)(1-\lambda)}{a(1-\lambda)^2+\lambda(1-a)^2}\right]\vec{u} + \frac{2a\lambda(1-a)(1-\lambda)}{a(1-\lambda)^2+\lambda(1-a)^2}\vec{v}.$$

adică

$$\vec{OQ} - \vec{OA} = \frac{2a\lambda(1-a)(1-\lambda)}{a(1-\lambda)^2+\lambda(1-a)^2}(\vec{OC}-\vec{OD})$$

sau în definitiv

$$\boxed{\vec{AQ} = \frac{2a\lambda(1-a)(1-\lambda)}{a(1-\lambda)^2+\lambda(1-a)^2}\vec{DC}} \quad . \tag{8}$$

Această formulă arată că Q *se găseşte pe o paralelă dusă din* A *la* DC.

2. Să vedem cum variază poziţia lui Q pe această paralelă atunci când λ variază între 0 şi 1. Pentru aceasta este suficient să se studieze variaţia funcţiunei

$$y = \frac{2a\lambda(1-a)(1-\lambda)}{a(1-\lambda)^2+\lambda(1-a)^2} \tag{9}$$

pentru $0 < \lambda < 1$. Observăm că dacă în (9) schimbăm pe a în $\frac{1}{a}$ avem

$$y_1 = \frac{\frac{2}{a}\lambda\left(1-\frac{1}{a}\right)(1-\lambda)}{\frac{1}{a}(1-\lambda)^2+\lambda\left(1-\frac{1}{a}\right)^2} = -\frac{2a\lambda(1-a)(1-\lambda)}{a(1-\lambda)^2+\lambda(1-a)^2}$$

$$\therefore \qquad \boxed{y_1 = -y} \quad . \tag{10}$$

Relaţiunea (10) arată că dacă *se consideră două patrulatere* ABCD, A_1BCD *unde punctele* A, A_1, D *sunt colineare şi*

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA_1} = \overline{OD}^2$$

punctele Q *şi* Q_1 *construite ca în enunţul problemei sunt simetrice în raport cu mijlocul lui* AA_1.

De asemeni, dacă în (9) se schimbă λ în $\frac{1}{\lambda}$, y se schimbă în $-y$, de unde rezultă că:

Dacă se consideră pe OD *şi* OC *punctele* A, A_1 *şi* B, B_1 *astfel ca*

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA_1} = \overline{OD}^2 \quad \text{şi} \quad \overline{OB} \cdot \overline{OB_1} = \overline{OC}^2$$

punctele Q, Q_1, Q_2, Q_3 *construite ca în enunţul problemei pentru patrulaterele* ABCD, AB_1CD, A_1BCD, A_1B_1CD *sunt vârfurile unui paralelogram în care* A *este mijlocul lui* QQ_1, A_1 *mijlocul lui* Q_2Q_3, *iar dreptele* Q_1Q_2, QQ_3 *sunt paralele cu* OD.

3°. Să revenim la formula (9) şi să studiem variaţia lui y când λ variază între 0 şi 1. Ţinând seamă de observaţiile dela 2°, rezultă că *va fi suficient să presupunem că parametrul* a *ia valori între* -1 *şi* $+1$.

Trinomul

$$u = a(1-\lambda)^2 + \lambda(1-a)^2$$

are pentru $-1 \leqslant a < 0$, o rădăcină pozitivă λ_1 cuprinsă între 0 şi 1 şi o rădăcină pozitivă mai mare ca 1.

Pentru $0 < a < 1$, trinomul are 2 rădăcini negative sau imaginare.

Derivata lui y în raport cu λ este

$$y' = 2a(a-1)\frac{\lambda^2(1-a)^2 - a(1-\lambda)^2}{[a(1-\lambda)^2 + \lambda(1-a)^2]^2}.$$

Dacă $a < 0$, y' păstrează continuu semnul $+$.

Trinomul

$$v = (1-a)^2\lambda^2 - a(1-\lambda)^2$$

are pentru $0 < a < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, o rădăcină negativă şi o rădăcină pozitivă cuprinsă între 0 şi 1.

Pentru $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < a < 1$, trinomul v are o rădăcină pozitivă cuprinsă între 0 şi 1 şi o alta mai mare ca 1.

Deci pentru $0 < a < 1$, derivata are o rădăcină λ_2, cuprinsă între 0 şi 1.

Pentru $0 < \lambda < \lambda_2$, derivata este pozitivă, iar pentru $\lambda_2 < \lambda < 1$, negativă.

Valorile lui λ_1 şi λ_2 sunt:

$$\lambda_1 = \frac{-(a^2 - 4a + 1) + (1-a)\sqrt{a^2 - 6a + 1}}{2a}$$

$$\lambda_2 = \frac{-a + (1-a)\sqrt{a}}{1 - 3a + a^2} = \frac{\sqrt{a}}{1 - a + \sqrt{a}}.$$

Pentru $-1 \leqslant a < 0$, avem următorul tabel de variaţie:

λ	0			λ_1			1
y'		+	+		+	+	+	
y	0		↗	$+\infty/-\infty$	↗		0

cu alte cuvinte, în acest caz punctul Q descrie dreapta paralelă dusă din A la DC dela $-\infty$ la $+\infty$.

Când $0 < a < 1$, avem următorul tabel de variaţie:

λ	0			λ_2			1
y'		+	+	+	0	−	−	−	
y	0		↗		M		↘		0

Valoarea maximului M este

$$M = \frac{2a}{1 + 2\sqrt{a} - a}.$$

Deci în cazul $0 < a < 1$, când punctul B descrie segmentul OC, punctul Q descrie un segment AQ_0 de mărime

$$\overrightarrow{AQ_0} = \frac{2a}{1 + 2\sqrt{a} - a}\overrightarrow{DC}$$

şi revine apoi în A.

De aici rezultă că *dacă se consideră pe segmentul* OC *punctele* B_1 *și* B_2 *care corespund la valorile* λ_1 *și* λ_2, *rădăcinile ecuației*

$$\frac{2a\lambda(1-a)(1-\lambda)}{a(1-\lambda)^2+\lambda(1-a)^2}=m$$

unde

$$0<m<\frac{2a}{1+2\sqrt{a-a}}$$

punctele Q_1 *și* Q_2, *construite ca în enunțul problemei, pornind dela patrulaterele* AB_1CD, AB_2CD, *coincid.*

4°. Vom face acum câteva observațiuni, din formulele demonstrate până aici.

a) Formulele (1), (2), (3), (4) arată că:

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OJ}}=\frac{\overline{ON}}{\overline{OJ'}}=\frac{1-a\lambda}{a+\lambda-2a\lambda}$$

adică dreptele JJ', MN sunt paralele. Avem deci următoarea proprietate:

Dacă într'un patrulater ABCD *se notează cu* O *intersecția laturilor* AD, BC, *cu* J *punctul de întâlnire al diagonalelor, cu* J' *simetricul lui* J *în raport cu mijlocul lui* AB *și în fine cu* M *și* N *intersecțiile lui* OJ' *și* OJ *cu* AB *și* CD, *dreptele* JJ', MN *sunt paralele.*

b) Să schimbăm în (5), (6), (8) pe a cu λ, ceea ce revine a înlocui punctele A și B cu punctele A_0, B_0 obținute ducând paralele prin B și A la CD și luând intersecțiile lor cu OD și OC. Să notăm cu P_0, P_0', Q_0 noile puncte P, P', Q. Vom avea

$$\overrightarrow{OP_0}=\lambda\frac{\lambda(1-a)^2+a(1-\lambda)^2}{(\lambda+a-2a\lambda)(1-a\lambda)}\vec{u}+\frac{2a\lambda(1-a)(1-\lambda)}{(\lambda+a-2a\lambda)(1-a\lambda)}\vec{v}$$

$$\overrightarrow{OP_0'}=\frac{2a\lambda(1-a)(1-\lambda)}{(a+\lambda-2a\lambda)(1-a\lambda)}\vec{u}+a\frac{2a\lambda(1-a)(1-\lambda)}{(\lambda+a-2a\lambda)(1-a\lambda)}\vec{v}$$

$$\overrightarrow{A_0Q_0}=\frac{2a\lambda(1-a)(1-\lambda)}{\lambda(1-a)^2+a(1-\lambda)^2}\overrightarrow{DC},$$

de unde rezultă

$$\overrightarrow{P_0P} = (a-\lambda)\frac{\lambda(1-a)^2 + a(1-\lambda)^2}{(\lambda+a-2a\lambda)(1-a\lambda)}\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{P_0'P'} = (\lambda-a)\frac{2a\lambda(1-a)(1-\lambda)}{(\lambda+a-2a\lambda)(1-a\lambda)}\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{A_0Q_0} = \overrightarrow{AQ}$$

adică *dreptele* P_0P, OD *sunt paralele; dreptele* $P_0'P'$, OC *sunt paralele; dreptele* QQ_0, OD *sunt paralele.*

c) Observaţiunile dela 2° conduc la următoarea proprietate:

Pe o axă Ox *să luăm punctele* A *şi* D, *iar pe axa* Oy *punctele* B_1, C_1, B_1 *astfel încât*

$$\overline{OB}\cdot\overline{OB_1} = \overline{OC}^2$$

şi să notăm cu J, J_1 *intersecţiile diagonalelor patrulaterelor* ABCD, AB_1CD *şi cu* J', J_1' *simetricele lui* J, J_1 *faţă de mijloacele lui* AB *şi* AB_1. *Paralelele duse prin* B *la* JJ' *şi prin* B_1 *la* J_1J_1' *întâlnesc paralela dusă din* A *la* CD *în punctele* Q *şi* Q_1 *simetrice faţă de* A.

D. V. I.

D-l BAL LASCU, licenţiat în matematici, a dat problemei propuse o soluţie identică cu cea dela 1° precedent.

PROBLEMA 4654. *Fie* MN *un diametru fix al cercului* O *şi* A *un punct dat pe acest cerc. Să se construiască un triunghiu isoscel* ABC, *care are un vârf în* A, *un vârf într'un punct* B, *care urmează să fie găsit pe cercul* O *şi al treilea vârf* C, *în proecţia lui* B *pe* MN.

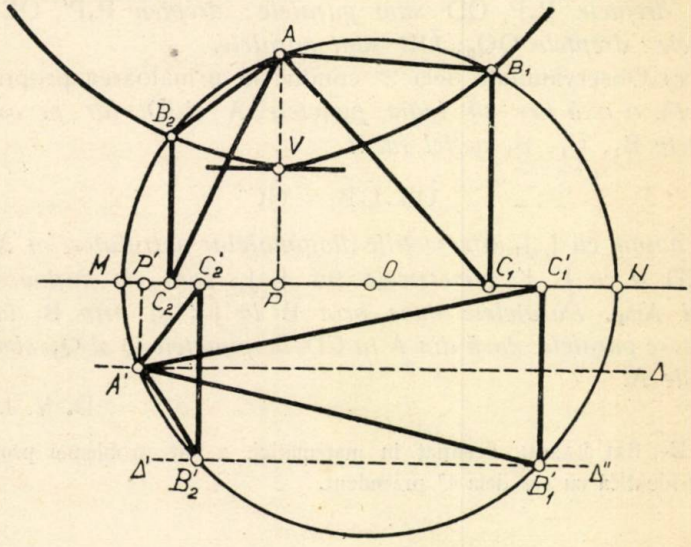
G-L GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-nii: C. SĂNDULACHE (Băseşti, jud. Bacău); V. L. FLORESCU şi N. D. ŞTEFĂNESCU (Lic. Militar, Târgovişte).

Avem de considerat trei cazuri, după vârful din care pornesc laturile egale ale triunghiului isoscel.

Cazul I. Laturile egale pornesc din A. Fie $A'B_1'C_1'$ triunghiul isoscel cerut, având baza $B_1'C_1'$ perpendiculară pe MN. Rezultă că

paralela $A'\Delta$ la MN trece prin mijlocul lui $B_1'C_1'$. De aici construcția următoare: Se duce $A'\Delta$ paralelă cu MN și se ia simetrica $\Delta'\Delta''$ a lui MN față de $A'\Delta$. Intersecțiile lui $\Delta'\Delta''$ cu cercul O dau vârfurile B_1', B_2' iar proiecțiile C_1', C_2' ale lui B_1', B_2' pe MN dau al treilea vârf al triunghiului. Vom avea 2 soluții $A'B_1'C_1'$, $A'B_2'C_2'$ ca în figură, atunci când distanța A'P' la MN este mai mică decât jumătatea razei lui O, o soluție când acea distanță este egală cu jumătatea razei și nici o soluție când A'P' este mai mare decât jumătatea razei.



Cazul II. Laturile egale pornesc din B. Fie B_1AC_1 triunghiul cerut. Deoarece

$$\overline{B_1A} = \overline{B_1C_1}$$

locul lui B_1 este o parabolă având focarul în A și vârful în mijlocul V al lui AP, directoarea parabolei fiind chiar MN. O astfel de parabolă taie totdeauna cercul în 2 puncte B_1, B_2. Deci în cazul II problema are totdeauna 2 soluții diferite B_1AC_1, B_2AC_2 când A este oarecare pe cerc sau 2 soluții egale și simetrice când A este mijlocul arcului MN.

Construcția parabolei B_1VB_2 se face geometric prin puncte.

Cazul III. Laturile egale pornesc din C. Deoarece BC este perpendiculară pe MN și

$$\overline{BC} = CA$$

urmează că A este simetricul lui B față de MN, sau cum A este dat, B se găsește în simetricul lui A față de MN. Dar atunci punctele A, B, C sunt colineare și deci problema nu are soluție în cazul III.

Notă. 1°. Au rezolvat problema parțial considerând numai cazul II D-nii: I. COTIGHER (Elev inginer, București), GAVRIL I. POPOVICIU (Bacalaureat, Urziceni, jud. Sălaj) și M. AL. VASILESCU-STABU (Lic. Lazăr, București).

2°. S'au primit două soluții care difereau *numai* prin culoarea cernelei și prin numele semnatarilor. Incolo erau ***absolut*** identice și examinau numai cazul II. Fiind identitate de soluții, nu pot determina pe adevăratul autor spre a-l cita.

3°. După cum se vede din soluție se poate înlocui în enunț diametrul MN prin o coardă MN.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4758. *Prin punctul* $p(3, 2, 1)$ *să se ducă o dreaptă care să taie dreapta dată* $d(4, 5, -3)(7, 2, 6)$ *în punctul* a *și să înțepe planul* $\beta(4, -8, 8)$ *în* b, *așa fel ca să avem :*

$$pa : ab = 3 : 2.$$

GH. VASILIU.

Soluție dată de D-nii: NEDELCU V. NICOLAE (elev cl. VII-a lic. militar, Cernăuți) și VASILESCU-STABU AL. (elev cl. VII-a lic. Gh. Lazăr, București).

Considerăm figura construită în condițiile enunțului în care planul β este planul bisector 2. Prin $P(p, p')$ ducem planul $\delta\delta'$ paralel cu planul β. Planul $\delta\delta'$ va fi înțepat de dreapta $D(d, d')$ în punctul $Q(q, q')$. Deasemenea planul β va fi străpuns de dreapta D în punctul $C(c, c')$. Prin punctul $C(c, c')$ ducem $CB(c, c'; b, b')$ paralel cu $PQ(p, p'; q, q')$.

Impărțim PQ în 3 părți egale; luăm două părți și le așezăm pe CB începând din C și obținem punctul $B(b ; b')$. Dreapta $PB(p, p'; b, b')$ este dreapta căutată.

Intr'adevăr triunghiurile PAQ și CAB (unde A este punctul în care PB taie pe QC) sunt asemenea și deci

$$\frac{PQ}{CB} = \frac{PA}{AB} = \frac{3}{2}.$$

GH. V.

PROBLEMA 4832. *Să se găsească un număr de patru cifre al cărui cub să fie terminat prin doi întregi, formați fiecare din câte patru cifre egale.* V. THÉBAULT.

Fie $N^3 = \alpha\beta\gamma\delta^3 = Maaaa\,bbbb$ (1)

numărul căutat, M fiind un număr de mai multe cifre.

Observăm că b nu poate fi 2, 4, 6 pentru că numerele terminate în 2222, 4444, 6666 se divid prin 2 dar nu se divid prin 2^3, deci nu pot fi cuburi perfecte.

De asemeni $b \neq 5$ căci un număr terminat în 5 are cubul terminat în 25 sau în 75, In adevăr, din

$$n^3 = (10m + 5)^3 = 1000m^3 + m^2 \times 1500 + m \times 750 + 125$$

se vede că cifra zecilor lui n este aceeași cu cifra zecilor lui

$$m \times 750 + 125. \qquad (2)$$

Dacă m este pereche (1) se termină în 25, dacă m este nepereche (1) se termină în 75.

Rămâne că b trebue căutat între cifrele 0, 1, 3, 7, 8 și 9.

Se vede că avem

$$\alpha\beta\gamma\delta^3 = (100 \,.\, \alpha\beta + \gamma\delta)^3 = (100 \,.\, \alpha\beta)^3 + 3(100 \,.\, \alpha\beta)^2 \,.\, \gamma\delta + 3(100\alpha\beta) \,.\, \gamma\delta^2 + \gamma\delta^3 \qquad (3)$$

care, comparată cu (1), arată că $\gamma\delta^3$ se termină cu 2 cifre egale cu b. Dar

$$\gamma\delta^3 = (10 \,.\, \gamma + \delta)^3 = 1000 \,.\, \gamma^3 + 300 \times \gamma^2 \times \delta + 30 \times \gamma \times \delta^2 + \delta^3.$$

Pentru ca $\gamma\delta^3$ să se termine cu 2 cifre egale cu b, trebue ca

$$30 \times \gamma \times \delta^2 + \delta^3 = \delta^2(30 \times \gamma + \delta) \qquad (4)$$

să se termine cu 2 cifre egale cu b.

Dăm acum lui b pe rând valorile 0, 1, 3, 7, 8, 9, pe care am văzut că le poate avea.

1°. Fie $b = 0$. In acest caz N^3 trebuind să se termine prin un multiplu de 3 zerori, urmează că atât a cât și ultima cifră a lui M, trebue să fie zero, și vom avea

$$\alpha\beta\gamma\delta^3 = \ldots\,000000000$$

dar atunci cifrele β, γ, δ sunt egale cu zero și vom avea soluțiile

$$N^3 = \alpha_i\,000^3 = \alpha_i^3\,000000000$$

unde α_i ia pe rând valorile 1, 2, ..., 8, 9.

2°. *Fie b = 1.* Din (1) şi (3) se vede că *b* este cifra unimilor lui δ^3,—cum singura cifră al cărei cub se termină cu 1 este 1, rezultă $\delta = 1$. Ducând în (4) avem

$$\delta^2 \times (30 \times \gamma + \delta) = 30 \times \gamma + 1$$

care se termină în 11 numai dacă $\gamma = 7$. Introducând aceste rezultate în (3), avem

$$\alpha\beta 71^3 = \alpha\beta^3 \times 10^6 + \alpha\beta^2 \times 2130000 + \alpha\beta \times 1512300 + 357911.$$

Scriind termenii sumei unul sub altul pentru efectuarea operaţiunei adunărei

$$\alpha\beta^3 \times 1000000$$
$$\alpha\beta^2 \times 2130000$$
$$\alpha\beta \times 1512300$$
$$357911$$

se vede că această sumă se termină în 111 numai dacă

$$3 \times \beta + 9$$

se termină cu 1, adică dacă $3 \times \beta$ se termină cu 2, ceea ce are loc când $\beta = 4$. Ducând şi această valoare în (3), şi refăcând calculele avem

$$\alpha\,471^3 = (\alpha \times 1000 + 471)^3 = \alpha^3 \times 10^9 + \alpha^2 \times 10^6 \times 1413$$
$$+ \alpha \times 10^3 \times 665523 + 104487111.$$

Procedând ca mai sus se găseşte că N^3 se termină cu 1111 dacă $3 \times \alpha + 7$ se termină cu 1, deci dacă $\alpha = 8$, dar

$$8471^3 = 6058 \,.\, 6067 \,.\, 1111$$

nu este soluţie.

Procedând la fel pentru celelalte valori ale lui *b*, se găseşte că problema mai are soluţia

$$6942^3 = 3345\ 4444\ 8888$$

pe lângă cele 9 soluţiuni de forma $\alpha_i^3 \times 10^9$.

Au rezolvat problema, fără a găsi şi soluţiile dela 1°, D-nii: O. SACTER şi T. C. ŞTEFAN.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4887. *Să se găsească relația de recurență, care să permită calculul din aproape în aproape, al sumelor:*

$$S_m^k = 1^k (C_m^1)^2 + 2^k (C_m^2)^2 + 3^k (C_m^3)^2 + \ldots + m^k (C_m^m)^2.$$

Să se efectueze acest calcul pentru $k = 1, 2, 3, 4$.

GH. D. SIMIONESCU.

Avem:

$$p^k (C_m^p)^2 = p^k \left(\frac{m!}{p!\,(m-p)!}\right)^2 = m^2 \cdot p^{k-2} \cdot \left[\frac{(m-1)!}{(p-1)!\,(m-p)!}\right]^2 = m^2 \cdot p^{k-2} (C_{m-1}^{p-1})^2$$

de unde rezultă:

$$S_m^k = m^2 \sum_{p=1}^{m} p^{k-2} (C_{m-1}^{p-1})^2 = m^2 \Sigma\, p^{k-2} (C_m^p - C_{m-1}^p)^2$$

$$= m^2 \Sigma\, p^{k-2} [(C_m^p)^2 + (C_{m-1}^p)^2 - 2\, C_m^p\, C_{m-1}^p] \cdot$$

Insă:

$$C_m^p\, C_{m-1}^p = \frac{m-p}{m} (C_m^p)^2 = \left(1 - \frac{p}{m}\right) (C_m^p)^2$$

și înlocuind mai sus găsim:

$$S_m^k = m^2 \Sigma\, p^{k-2} \left[(C_{m-1}^p)^2 - (C_m^p)^2 + 2\frac{p}{m} (C_m^p)^2\right]$$

$$= m^2 \Sigma\, p^{k-2} [(C_{m-1}^p)^2 - (C_m^p)^2] + 2m \Sigma\, p^{k-1} (C_m^p)^2$$

$$\therefore \quad (1) \qquad \boxed{S_m^k = m^2 (S_{m-1}^{k-2} - S_m^{k-2}) + 2m\, S_m^{k-1}}$$

care este relația de recurență cerută.

Se știe că $S_m^0 = C_{2m}^m - 1$, fiind suma patratelor coeficienților binomiali, afară de primul.

a) $k = 1$. S_m^1 se poate calcula direct astfel:

$$S_m^1 = 1 \cdot (C_n^1)^2 + 2 \cdot (C_m^2)^2 + \ldots + (m-1)(C_m^{m-1})^2 + m (C_m^m)^2$$

$$S_m^1 = m (C_m^0)^2 + (m-1)(C_m^1)^2 + (m-2)(C_m^2)^2 + \ldots$$

$$+ 1 \cdot (C_m^{m-1})^2 \text{ (scris invers)}$$

$$\therefore \quad 2S_m^1 = m \sum_{p=0}^{m} (C_m^p)^2 = m\, C_{2m}^m$$

$$\therefore \quad (2) \qquad S_m^1 = \frac{m}{2} C_{2m}^m .$$

b) $k = 2$. Vom avea:

$$S_m^2 = m^2 (S_{m-1}^0 - S_m^0) + 2m\, S_m^1 = m^2 [C_{2(m-1)}^{m-1} - 1 - (C_{2m}^m - 1)]$$

$$+ 2m \cdot \frac{m}{2} C_{2m}^m$$

$$\therefore \quad (3) \qquad S_m^2 = m^2\, C_{2(m-1)}^{m-1} .$$

c) $k = 3$.

$$S_m^3 = m^2 (S_{m-1}^1 - S_m^1) + 2m\, S_m^2 = m^2 \left[\frac{m-1}{2} C_{2(m-1)}^{m-1} - \frac{m}{2} C_{2m}^m \right]$$

$$+ 2m \cdot m^2\, C_{2(m-1)}^{m-1}$$

$$\therefore \quad (4) \quad S_m^3 = \frac{m^2}{2} [(5m-1)\, C_{2(m-1)}^{m-1} - m\, C_{2m}^m] .$$

d) $k = 4$.

$$S_m^4 = m^2 (S_{m-1}^2 - S_m^2) + 2m\, S_m^3 = m^2 [(m-1)^2\, C_{2(m-2)}^{m-2} - m^2\, C_{2(m-1)}^{m-1}]$$

$$+ 2m \cdot \frac{m^2}{2} [(5m-1)\, C_{2(m-1)}^{m-1} - m\, C_{2m}^m]$$

$$\therefore \quad (5) \quad S_m^4 = m^2 [(m-1)^2\, C_{2(m-2)}^{m-2} + m\,(4m-1)\, C_{2(m-1)}^{m-1} - m^2\, C_{2m}^m]$$

Problema a fost foarte bine rezolvată de D-l IACOB GOLDBERG (cl. VIII-a, lic. M. Basarab). D-nii AUREL CORNĂTEANU şi ALEX. I. ROHR (lic. mil. Iaşi) au stabilit relaţia de recurenţă şi au calculat bine pe S_m^1 şi S_m^2, pentru S_m^3 şi S_m^4 având calculul greşit.

PROBLEMA 4927. *Care numere mai mici ca 100 se pot scrie cu aceleaşi cifre în două sisteme de numeraţie diferite?*

(Urmare dela pagina 319) I. IONESCU.

d) Să căutăm soluţiile de trei cifre.

Calea urmată mai înainte e greu de aplicat aci. Vom proceda, pe baza unor criterii, la eliminarea numerelor ce nu pot corespunde.

1. Numerele de forma $m000\ldots0$ în un sistem oarecare nu pot da soluţii căci prin intervertirea de cifre apare 0 la început şi numărul nu mai are acelaşi număr de cifre în ambele sisteme B şi B′. Deci se vor elimina numerele de forma mB^r scrise în sistemul B.

2. Numerele de forma $mmm\ldots m$ nu pot da soluţii căci ele nu se modifică prin intervertire de cifre şi nu pot fi două numere identice în două sisteme diferite. Aceste numere sunt de forma $m \times 11\ldots1 = m(B^r - 1)/(B - 1)$, scrise în sistemul B.

3. Fie $B > B'$. Cifrele $(B-1)$, $(B-2)\ldots B'$ nu se găsesc în sistemul B′, fiind mai mari sau cel puţin egale cu B′. Deci vom elimina toate numerele care au asemenea cifre în sistemul B, căci pe ele nu le putem găsi la numerele scrise în sistemul B′. Aceste numere sunt $N = \mathfrak{M}B + i$ în care $i \geqslant B'$.

4. O cifră a cu care începe un număr în sistemul B trebue să se găsească printre cifrele numărului în sistemul B′ şi viceversa. Cifra a este la urmă, dacă N este de forma $(\mathfrak{M}B+a)$ sau $(\mathfrak{M}B'+a)$. Cifra a este la început la numere $N = (aB^2 + xB + y)$ în care x şi y sunt cifre în sistemul B. Aceste numere sunt cuprinse între aB^2 şi $[(a+1)B^2 - 1]$. Cifra a este la mijloc la numerele (xB^2+aB+y). Ele sunt $N = (xB^2+aB)$ până la $[xB^2+aB+(a-1)]$.

Cu aceste criterii putem rezolva problema pornind dela tabloul dat la început unde găsim în ce sisteme sunt intervale comune şi pe cât se întind aceste intervale. Vom face calculele după grupe de două baze comune.

Numere în sistemele 3 şi 4.

Tabloul ne arată că putem avea soluţii printre numerele 16—26. Criteriul (1) elimină pe 16 şi 18; criteriul (2) pe 21 şi 26; criteriul (3) pe 19 şi 23. Pentru $N = 18 - 26$ avem $a = 2$ pe care nu-l are 20 în sistemul 4 şi $a = 1$ la sistemul 4 pe care nu-l are 24 în sistemul 3. Rămâne de cercetat numerele:

$$N = 17,\ 22,\ 25.$$

In sistemul 3: 122, 211, 221.

In sistemul 4: 101, 112, 121.

Se vede de aci că numai 22 se scrie cu aceleaşi cifre în sistemele 3 şi 4. De aci soluţia *22.*

Numere în sistemul 3 şi 5.

Tabloul ne arată că nu putem lua decât numerele 25 şi 26. Criteriul (1) elimină pe primul şi criteriul (2) pe al doilea. Deci nu avem soluţie în acest caz.

Numere în sistemele 4 şi 5.

In sistemele acestea convin numerele 25—63 după cum arată tabloul. Criteriul (1) elimină numerele 25, 32, 48 şi 50; criteriul (2) elimină numerele 31, 42, 62 şi 63; criteriul (3) elimină pe 29, 34, 44, 49, 54 şi 59. Numerele 25—49 încep cu 1 în sistemul 5, cifră pe care nu o are 35, 47 şi 52 în sistemul 4; numerele 50—63 încep cu 2 în sistemul 5, cifră pe care nu o are 52 în sistemul 4; numerele 32—48 în sistemul 4 încep cu 2, cifră pe care nu o au 33, 41, 45 şi 46; în sistemul 5; numerele 48—63 încep cu 3 în sistemul 4, cifră pe care nu o au 55, 56, 57, 60 şi 61 în sistemul 5. Rămân de cercetat numerele:

N = 26, 27, 28, 30, 36, 37, 38, 58.

In sistemul 4: 122, 123, 130, 132, 210, 211, 212, 322.

In sistemul 5: 101, 102, 103, 110, 121, 122, 123, 213.

Se vede că nu sunt aceleaşi cifre decât la numărul 28 care este deci o soluţie a problemei pentru sistemele 4 şi 5.

Numere în sistemele 4 şi 6.

Tabloul arată că pot fi soluţii printre numerele 36—63. Criteriul (1) elimină pe 36 şi 48; criteriul (2) pe 42, 43 şi 63; criteriul (3) pe 40, 41, 46, 47, 52, 53, 59, 60. Numerele 36—47 au $a = 2$ cifră care lipseşte la 39 şi 45; numerele 48—63 încep cu 3 în sistemul 4, cifră care lipseşte numerelor 49, 50, 60, 61 şi 62 în sistemul 6. Toate numerele încep cu 1 în sistemul 6, cifră care nu este la 44 şi 51 în sistemul 4. Ne rămân de cercetat numerele:

N = 38, 54, 55, 56, 57.

In sistemul 4: 212, 312, 313, 320, 321.

In sistemul 6: 102, 130, 131, 132, 133.

Se vede că nu avem nici o soluţie.

Numere în sistemele 4 şi 7.

In această categorie intră numerele 49—63. Criteriul (1) elimină pe 49; criteriul (2) elimină pe 57 şi 63; criteriul (3) pe

53, 54, 55, 60, 61, şi 62. Numerele încep în sistemul 4 cu 3, pe care în sistemul 7 nu-l au 50, 51, 56 şi 58; ele încep cu 1 în sistemul 7 pe care nu-l are 59 în sistemul 4. Ne rămâne numai *52* care se scrie 310 în sistemul 4 şi 103 în sistemul 7 şi care este deci o soluţie a problemei.

Numere în sistemele 5 şi 6.

In acest caz intră numerele 36—99. Criteriul (1) elimină pe 36, 50, 72 şi 75; criteriul (2) elimină pe 43, 62, 86 şi 93; criteriul (3) elimină pe 41, 47, 53, 59, 65, 71, 77, 83, 89 şi 95. Numerele 51—74 încep cu 2 în sistemul 5, cifră pe care nu o au în sistemul 6 numerele 54, 55, 57, 58, 60, 61, 63, 64, 66, 67, 69 şi 70; numerele 75—99 încep cu 3 în sistemul 5, cifră pe care nu o au numerele 76, 78, 79, 80, 82, 84, 85, 88, 96, 97 şi 98 în sistemul 5. Numerele 36—71 încep cu 1 în sistemul 6, cifră pe care nu-l au numerele 52 şi 68 în sistemul 5, iar numerele 72—99 în sistemul 6 încep cu 2, cifră pe care nu o au numerele 90, 91 şi 94 în sistemul 5. Ne rămân de cercetat numerele:

N = 37, 38, 39, 40, 42, 44, 45, 46, 48,

In sistemul 5: 122, 123, 124, 130, 133, 134, 140, 141, 143,

In sistemul 6: 101, 102, 103, 104, 110, 112, 113, 114, 120,

N = 49, 51, 56, 73, 74, 81, 87, 92, 99.

In sistemul 5: 144, 201, 211, 243, 244, 311, 322, 332, 344.

In sistemul 6: 121, 123, 132, 201, 202, 213, 223, 232, 243.

De aci se vede că numerele *46* şi *87* sunt soluţii căci se scriu 141 şi 322 în sistemul 5 şi 114, 223 în sistemul 6.

Numere în sistemele 5 şi 7.

In acest caz putem găsi soluţii printre numerele 49 - 99. Criteriul (1) elimină numerele 49, 50, 75 şi 98; criteriul (2) elimină pe 57, 62 şi 93; criteriul (3) elimină pe 54, 55, 61, 68, 69, 76, 82, 83, 89, 90, 96 şi 97. Numerele 50—74 în sistemul 5 încep cu 2 pe care nu-l au în sistemul 7 numerele 52, 53, 56, 59, 60, 70, 71, 73 şi 74; numerele 75—99 încep în sistemul 5 cu 3 pe care nu-l au numerele 77, 78, 79, 84, 85, 86, 88, 91, 92, 95 şi 99 în sistemul 6. Numerele 49—97 încep cu 1 în sistemul 7, cifră pe care nu o au numerele 63, 64, 65, 67, 87 şi 94 în sistemul 5.

Ne rămân de cercetat numerele:

$$N = 51,\ 58,\ 66,\ 80.$$

In sistemul 5: 201, 213, 231, 310.

In sistemul 7: 102, 112, 123, 143.

Se vede că numerele *51* şi *66* sunt soluţii căci ele se scriu 201 şi 231 în sistemul 5 şi 102 şi 123 în sistemul 7.

Numere în sistemele 5 şi 8.

Aci avem de examinat numerele 64—99. Criteriul (1) elimină pe 64 şi 75; criteriul (2) elimină pe 73 şi 93; criteriul (3) elimină pe 69, 70, 71, 77, 78, 79, 85, 86, 87, 94 şi 95. Numere 64—74 încep cu 2 în sistemul 2, cifră care lipseşte numerelor 65, 67, 68 şi 72 în sistemul 8; numerele 75—99 încep cu 3 în sistemul 5 cifră pe care nu o au numerele 76, 80, 81, 82, 84, 96, 87 şi 98 în sistemul 8. Numerele 64—99 încep cu 1 în sistemul 8, cifră pe care nu o au numerele 88, 89, 90, 92 şi 99 scrise în sistemul 8. Rămân de cercetat numerele:

$$N = 66,\ 83,\ 91.$$

In sistemul 5: 231, 313, 331.

In sistemul 8: 102, 123, 133.

Se vede de aici că avem soluţia 91 care se scrie 331 în sistemul 5 şi 133 în sistemul 8.

(Va urma) I. I.

PROBLEMA 5025. *Dacă* A, B, C ... L, K *sunt numere complexe de acelaşi modul, să se arate că expresia:*

$$E \equiv \frac{(A+B)(B+C)\ldots(K+L)(L+A)}{A.B.C\ldots L}$$

este un număr real.

ALEXANDRU V. NICULESCU.

Soluţie. Fie

$$A = \rho(\cos a + i \sin a),\quad B = \rho(\cos b = i \sin b)\ldots L = \rho(\cos l + i \sin l).$$

Expresia dată devine după substituire:

$$E \equiv \frac{[\rho(\cos a + i\sin a) + \rho(\cos b + i\sin b)][\rho(\cos b + i\sin b) + \rho(\cos c + i\sin c)]\ldots[\rho(\cos l + i\sin l) + \rho(\cos a + i\sin a)]}{\rho(\cos a + i\sin a)\,\rho(\cos b + i\sin b)\ldots\rho(\cos l + i\sin l)}.$$

Transformăm sumele de sinusuri şi cosinusuri şi dăm factori comuni.

$$E \equiv \frac{\rho^l \times 2^l \cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{b-c}{2}\ldots\cos\frac{l-a}{2}\left(\cos\frac{a+b}{2} + i\sin\frac{a+b}{2}\right)\left(\cos\frac{b+c}{2} + i\sin\frac{b+c}{2}\right)\cdots\left(\cos\frac{l+a}{2} + i\sin\frac{l+a}{2}\right)}{\rho^l(\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)\ldots(\cos l + i\sin l)}.$$

Produsul a mai multe numere complexe se face înmulţind modulele şi adunând argumentele, deci

$$E \equiv \frac{2^l \cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{b-c}{2}\ldots\cos\frac{l-a}{2}\left[\cos\frac{a+b+b+c+\ldots l+a}{2} + i\sin\frac{a+b+b+c\ldots l+a}{2}\right]}{\cos(a+b+c\ldots l) + i\sin(a+b+c+\ldots l)}.$$

Simplificând, obţinem

$$E = 2^l \cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{b-c}{2}\ldots\cos\frac{l-a}{2}$$

care este un număr real.

Soluţii date de D-l O. SACTER.

I. Dacă z este o imaginară de modul 1, figura cu care formăm afixa lui $(1+z)$ este un romb. Rezultă că

$$\arg(1+z) = \frac{1}{2}\arg z.$$

Expresia dată se mai scrie

$$E \equiv \left(1+\frac{B}{A}\right)\left(1+\frac{C}{B}\right)\cdots\left(1+\frac{L}{K}\right)\left(1+\frac{A}{L}\right).$$

Deoarece câturile $\frac{B}{A}, \frac{C}{B} \cdots \frac{A}{L}$ au toate modulele egale cu 1, cantităţile AB ... L având acelaşi modul, putem scrie succesiv:

$$\arg E = \Sigma \arg\left(1+\frac{B}{A}\right) = \frac{1}{2}\Sigma \arg \frac{B}{A} = \frac{1}{2}\Sigma (\arg B - \arg A)$$

$$= \frac{1}{2}[\arg B - \arg A + \arg C - \arg B \ldots + \arg A - \arg L] = 0,$$

deci E este un număr real.

II. Luăm expresia scrisă sub forma

$$E \equiv \left(1+\frac{B}{A}\right)\left(1+\frac{C}{B}\right)\cdots\left(1+\frac{!}{K}\right)\left(1+\frac{A}{L}\right).$$

Notând

$$A = re^{i\alpha} \quad , \quad B = re^{i\beta} \ldots L = e^{i\lambda},$$

avem:

$$\frac{B}{A} = e^{i(\beta-\alpha)} \quad , \quad \frac{C}{B} = e^{i(\gamma-\beta)} \ldots \frac{A}{L} = e^{i(\alpha-\lambda)},$$

deci

$$1+\frac{B}{A} = 1+e^{i(\beta-\alpha)} = 1+\cos(\beta-\alpha)+i\sin(\beta-\alpha) = 2\cos^2\frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$+ 2i\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2} = 2\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\left[\cos\frac{\beta-\alpha}{2}+i\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right]$$

$$= 2\cos\frac{\beta-\alpha}{2}e^{\frac{i}{2}(\beta-\alpha)}.$$

Rezultă că

$$E = 2^l \cos\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\gamma-\beta}{2}\ldots\cos\frac{\alpha-\lambda}{2}e^{\frac{i}{2}(\beta-\alpha+\gamma-\beta\ldots\alpha-\lambda)}$$

$E = 2^l \cos\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\gamma-\beta}{2}\ldots\cos\frac{\alpha-\lambda}{2}$, deci o cantitate reală.

Soluţii apropiate de ale D-lui O. SACTER s'a primit dela D-nii: ORIGEN MĂRCULESCU, HERMANN VICTOR, MOTAŞ CAMIL (lic. Internat, Iaşi), ENESCU D-TRU (lic. Militar, Iaşi) şi TEODORESCU DORIN (lic. N. Filipescu).

Au trimes prima soluție D-rele ANA GEREANU, ANA MODÂLCĂ și D-nii: S-LT. GRUMĂZESCU, BEDREAG MIRCEA, BURGHELEA CEZAR (lic. Militar, Iași), BUZNEA D-TRU (lic. N. Filipescu), CERCHEZ MIHU, CETĂȚEANU STELIAN (lic. Gh. Șincai, Buc.), ISAC SOLOMON (lic. Internat, Iași), MODÂLCĂ EMIL (lic. Traian, T.-Severin), PĂUȚESCU C-TIN (lic. Militar, Chișinău), PETRESCU IULIAN (lic. Gh. Lazăr, Buc.), RIPIANU D-TRU, STOENESCU MIREL (lic. Militar N. Filipescu), TREFILOV MIHAIL (lic. Brăila) și VASILESCU-STABU ALEX. (lic. Gh. Lazăr București).

ALEX. V. NICULESCU.

PROBLEMA 5152. *Să se arate că produsul primelor* 100 *numere întregi se împarte exact cu produsul primelor* 11 *numere ridicat la puterea a noua.*

CPT. C-DOR I. LINTEȘ.

Soluția I-a dată de D-nii: D. D. BOIANGIU (clasa VIII-a T.-Severin), P. V. CAZANACLI (Ismail), M. S. CHERȚMAN (clasa VIII-a Giurgiu), L. DJEBEU, O. E. GHEORGHIU (clasa VIII-a Tulcea), EM. S. MODÂLCĂ (T.-Severin), I. I. STAMATE (student Cluj), M. I. ȘTEFANOVICI (București), GH. S. TOPOLESCU (Tg.-Mureș), M. F. VĂDUVA (Giurgiu) și M. AL. VASILESCU-STABU (București).

Avem:

$$N = (11!)^9 = 2^{72} \cdot 3^{36} \cdot 5^{18} \cdot 7^9 \cdot 11^9.$$

Apoi dacă E(I) înseamnă întregii cuprinși în I, atunci cea mai mare putere a lui a, care împarte produsul $P = 100!$ este:

$$p = E\left(\frac{P}{a}\right) + E\left(\frac{P}{a^2}\right) + \dots$$

Prin urmare avem:

$$P = 2^{97} \cdot 3^{48} \cdot 5^{24} \cdot 7^{16} \cdot 11^9 \cdot Q.$$

In consecință:

$$\frac{P}{N} = \frac{100!}{(11!)^9} = 2^{25} \cdot 3^{12} \cdot 5^6 \cdot 7^7 \cdot Q$$

unde se observă lesne că:

$$Q = 13^7 . 17^5 . 19^5 . 23^4 . 29^3 . 31^3 . 37^2 . 41^2 . 43^2 . 47^2 . 53$$

$$59 . 61 . 67 . 71 . 73 . 79 . 83 . 89 . 97.$$

Soluția II-a dată de D-nii: S. CETĂȚEANU (București), C. D. EFTIMIE, A. G. JILETCOVICI, C. PANTELIMON, C. I. PASCARU, A. N. POPA, M. D. POPA, A. V. PETRESCU, A. I. ROHR și S. R. TURCU (elevi Liceul militar, Iași), I. PETRESCU (Liceul Lazăr, București) și ȘT. C. TILICĂ.

Se știe că produsul a n numere consecutive se împarte cu $n!$, prin urmare dela *1* la *100* avem *9* grupe de câte *11* numere consecutive, deci $100!$ este divizibil cu $(11!)^9$.

Soluția III-a dată de D-l REISCHER L. HERMAN (Iași).

Avem succesiv:

$$C_{100}^{11} = \frac{100!}{11!\ 89!}$$

$$C_{100}^{11} . C_{89}^{11} = \frac{100!}{(11!)^2 . 78!}$$

$$C_{100}^{11} . C_{89}^{11} . C_{78}^{11} = \frac{100!}{(11!)^3 . 67!}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$C_{100}^{11} . C_{89}^{11} . C_{78}^{11} . C_{56}^{11} . C_{45}^{11} . C_{34}^{11} . C_{23}^{11} . C_{12}^{11} . C_1^1 = \frac{100!}{(11!)^9}$$

unde C_m^n reprezintă simbolul combinărilor de m obiecte luate câte n.

Notă. Se știe din G. M. XXIX—473, la soluția problemei: *3132* că avem:

$$\alpha^n! = M\,(\alpha!)^{\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}}.$$

Dacă facem $\alpha = 11$ avem:

$11^2! = 100!\ (101 . 102 \ldots 121) = M\,(11!)^{12} = M\,(11!)^9 . (11!)^3$.

Rezultă că avem:

$$\frac{100!}{(11!)^9} = \frac{(11!)^3}{101 . 102 \ldots 121} = \text{intreg.}$$

Deci și $(11!)^3$ se împarte exact cu produsul $(101 . 102 \ldots 121)$.

I. L.

PROBLEMA 5191. *Ce fel de triunghiu este acela ale cărui laturi sunt proporţionale cu rădăcinile sistemului ?*

$$x+y=7 \quad , \quad x^2+y^2+3xy=61 \quad , \quad 5z-xy=13.$$

IULIAN ALEXIU.

Soluţie dată de D-ra MIOARA I. CRĂCIUNESCU şi D-nii: ALDEA V. MINEA, BODNĂRESCU-HORIA, BREZEANU N. CORNELIU, CÂRDEIU D. GHEORGHE, CETĂŢEANU STELIAN, TRAIAN I. CHIŢULESCU, DOVGAN V. GHEORGHE, EFTIMIE D. C., LEIBOVICI SERGIU, MOISII GH. IULIAN, NADOLU C. GRIGORE, PAICU MIRCEA, REISCHER HERMANN, ROSENZWEIG S. MIRCEA, MIRCEA I. C. ŞTEFANOVICI, ŞTEFĂNESCU D. NIC., EUGEN M. ŞENECHI, ADOLF O. ŞAICHIN, SCURTU I. ION, TOPALESCU GH. şi MIHAIL I. TREFILOV.

Ecuaţia II-a se poate scrie:

$$(\alpha) \qquad (x+y)^2+xy=61.$$

Ecuaţia I a sistemului dat ridicată la patrat dă:

$$(\beta) \qquad (x+y)^2=49.$$

Scăzând (β) din (α):

$$(\gamma) \qquad xy=12.$$

Prima ecuaţie din sistemul dat şi ecuaţia (γ) dau rădăcinile:

$$x=3 \quad , \quad y=4.$$

Din ecuaţia III a sistemului dat se obţine:

$$z=\frac{13+xy}{5}=\frac{13+12}{5}=5.$$

Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghiu, lungimi proporţionale cu rădăcinile sistemului dat. Se poate scrie:

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}=k$$

k fiind un coeficient de proporţionalitate.

Putem scrie:

$$a=3k \quad , \quad b=4k \quad , \quad c=5k.$$

Aceste valori verifică relaţia:

$$a^2+b^2=c^2.$$

Deci triunghiul ale cărui laturi sunt proporţionale cu rădăcinile sistemului dat este un *triunghiu dreptunghiu.*

Au mai rezolvat problema D-nii: VICTOR V. ALEXANDRESCU, DUMITRU D. BOIANGIU, CHERŢMAN S. MOZES, GHEORGHIU E. OCTAVIAN, CONST. I. MOCANU, ADRIAN V. TÂRSU, ŢOCU GH. PETRE, TROFIN I. PETRE şi SEGAL JOE.

I. AL.

EXERCIŢII

21. Să se arată că

$$\frac{(p-1)\,C_{p-2}^{n}}{(p-2)\,C_{p-1}^{n}} - \frac{(n-1)\,C_{n-2}^{p}}{(n-2)\,C_{n-1}^{p}} = \frac{(p-n)(p+n-3)}{(p-2)(n-2)}.$$

M. C. CONSTANTINESCU.

R. Primul membru simplificat, se scrie

$$\frac{p-n-1}{p-2} - \frac{n-p-1}{n-2}$$

astfel încât aducând la acelaşi numitor şi efectuând reducerile posibile, obţinem membrul secund.

PROBLEME PROPUSE

5185[1]). Fie M şi N două puncte izotomice pe latura BC a triunghiului ABC şi M', N' punctele unde AM, AN taie cercul ABC. Să se demonstreze relaţia

$$\frac{\overline{AB}^2 - 2\,\overline{MB}\cdot\overline{MC} + \overline{AC}^2}{\overline{MB}^2\cdot\overline{MC}^2} = \frac{1}{\overline{MM'}^2} + \frac{1}{\overline{NN'}^2}.$$

N. D. ŞTEFĂNESCU.

5271. Să se rezolve ecuaţiile:

$$\sin(\cos x) = \cos(\sin x)\ ,\quad \operatorname{tg}(\operatorname{cotg} x) = \operatorname{cotg}(\operatorname{tg} x).$$

I. IONESCU.

5272. Să se formeze un patrat de 7 cifre, întrebuinţând odată cifra *9* şi de câte două ori pe fiecare din cifrele *4, 6, 8.*

G-L GH. BUICLIU.

---

1) Inlocueşte problema cu acelaşi număr propusă de D-l P. BOLDESCU la pag. 54 din acest an. Problema D-lui P. BOLDESCU este cunoscută, ea se găseşte în *Exercices de Geometrie Moderne* de G. PAPELIER, Fascicola VIII, problema 108 pag. 81.

5273. Două persoane întrebate anul acesta ce vârste au, răspund: *Prima.* „Adună cifrele anului naşterei mele şi îmi vei găsi vârsta". *A doua.* „Inmulţeşte cifrele anului naşterei mele şi îmi vei găsi vârsta".

Se cere vârsta celor două persoane.

ION C. SCHILERU-DILI.

5274. Intr'un sistem de numeraţie B, să se găsească un patrat perfect de forma *abccba.*

T. C. ŞTEFAN.

5275. In triunghiul ABC de ortocentru H, fie M_a mijlocul medianei din vârful A, fie E_1 mijlocul distanţei AH, iar E_2, E_3 mijloacele distanţelor AE_1, E_1H. Să se arate că $\overline{M_a E_2}$ şi analoagele, obţinute prin aceleaşi construcţii pentru celelalte vârfuri, sunt egale. Aceeaşi proprietate pentru $\overline{M_a E_3}$ şi analoagele.

IULIAN PETRESCU.

5276. Să se construiască grafic punctul al cărui triunghiu podar, faţă de un triunghiu dat, este echilateral.

GH. D. SIMIONESCU.

5277. Se consideră triunghiul de referinţă (T), tăiat de transversala (Δ). Dacă se ia simetricul cercului circumscris triunghiului, în raport cu diametrul cercului (Ω) MIQUEL, al sistemei (T), (Δ), trecând prin punctul ω MIQUEL, şi se taie acest cerc cu cercurile lui MIQUEL trecând prin vârfurile triunghiului de referinţă şi prin intersecţiile transversalei (Δ) pe laturile adiacente, se obţine un nou triunghiu (T') omologic cu (T). Să se precizeze centrul şi axul de omologie.

N. N. MIHĂILEANU.

5278. Fie A_1, B_1, C_1 proiecţiile pe laturile unui triunghiu ABC ale unui punct M din planul triunghiului şi ω, ω_1 unghiul lui BROCARD ale triunghiurilor ABC, $A_1B_1C_1$. Dacă $\operatorname{cotg}\omega_1 = \lambda \operatorname{cotg}\omega$, punctul M descrie un *cerc* cu centrul pe dreapta OK şi raza

$$\rho^2 = R^2 \cdot \frac{\lambda^2 \operatorname{cotg}^2\omega - 3}{(1+\lambda)^2 \operatorname{cotg}^2\omega}.$$

ION VASILIU.

5279. Să se calculeze suma

$$S_n = (C_n^0)^2 a_0 + (C_n^1)^2 a_1 + \ldots + (C_n^n)^2 a_n + \ldots$$

în care $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice de ordinul m, iar C_n^i reprezintă numărul combinărilor a n obiecte luate câte i.

EUGEN VIŞA.

5280. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$x + y + z = 3A$$
$$x\cos\theta_1 + y\cos\theta_2 + z\cos\theta_3 = \frac{3}{2}\,B$$
$$x\sin\theta_1 + y\sin\theta_2 + z\sin\theta_3 = \frac{3}{2}\,C$$

ştiind că $\theta_2 = \theta_1 + \frac{2\pi}{3}$ şi $\theta_3 = \theta_1 + \frac{4\pi}{2}$.

I. S. ANTONIU.

5281. Să se rezolve sistemul linear şi omogen:

$$x + y + z + t = 0$$
$$ax + by + cz + dt = 0$$
$$a^2x + b^2y + c^2z + d^2t = 0$$
$$a^5x + b^5y + c^5z + d^5t = 0,$$

unde a, b, c, d sunt rădăcinile ecuaţiei.

$$4u^4 - 20u^3 + 33u^2 + mu + 4 = 0,$$

iar m un parametru. Se vor da soluţiile sistemului după valorile lui m.

TH. ANGHELUŢĂ.

5282. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{\sin^3 x + \cos^3 x + 2}{\sin x + \cos x} = 3(1 - \sin x \cos x).$$

EMILIAN MEREUŢĂ.

5283. Să se arate că expresia:

$$\frac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha + \operatorname{cotg}\alpha}$$

are totdeauna o valoare pozitivă.

LOCOT. IOAN C. SAVIN.

5284. Să se demonstreze că în orice patrulater inscriptibil avem relaţiile:

$$\frac{r_a r_b}{ab} + \frac{r_b r_c}{bc} + \frac{r_c r_d}{cd} + \frac{r_d r_a}{da} = 1,$$

$$\frac{r_a}{-a+b+c+d} + \frac{r_b}{a-b+c+d} + \frac{r_c}{a+b-c+d} + \frac{r_d}{a+b+c-d} = \operatorname{cosec}\varphi,$$

în care am notat cu r_a, r_b, r_c, r_d razele cercurilor situate de aceeaşi parte cu patrulaterul şi tangente respectiv la laturile (d, a, b); (a, b, c); (b, c, d); (c, d, a) şi φ unghiul făcut de diagonale.

MIRCEA ADAM.

5285. Fie M un punct pe o cardioidă, O punctul său de întoarcere, N un punct pe tangenta în M la curbă astfel ca $\overline{ON} = \overline{NM}$ şi P, R punctele unde dreapta ON taie curba.

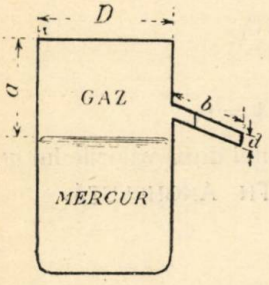
1°. Să se arate că

$$\frac{1}{\overline{OP}} + \frac{1}{\overline{OR}} = \frac{4}{\overline{OM}}.$$

2°. Să se afle locul geometric al punctului N când M se mişcă pe cardioidă.

RĂDUCAN GEORGESCU.

5286. Un experimentator a introdus în un recipient de sticlă transparentă, mercur şi un gaz presupus perfect şi de solubilitate în mercur neglijabilă. După *închiderea ermetică* a recipientului a avut nevoie să cunoască presiunea gazului. Cum a mai putut-o măsura?



Aceeaşi chestiune dacă în loc de mercur ar fi apă.

Discuţiunea rezultatului şi a preciziunii măsurii.

N. V. K.

ERATĂ. 1°. La pag. 324 rândul 5 de jos după N^3 se adaugă, *în cazul problemei de faţă.*

2°. La problema 5262 ultimul rând este $1 + a + b + c + d + e < 0$.

3°. La pag. 282, rândul 22 de sus în loc de *substitussions* să se scrie *substitutions.*

La pag. 283, rândul 2 de jos în loc de *noneuclidiens* să se scrie *noneuclidiennes.*

La pag. 286, rândul 22 de sus în loc de *congruenţă* să se scrie *congruenţa.*

La pag. 287, rândurile 12, 13 şi 14 de sus precum şi la pag. 288 rândul 19 de sus în loc de *Riboucourt* să se scrie *Ribaucour.*

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Abeles I. Florin (4474, 634, 5213, 44, 57); *Andrievici N.* (5219); *Backonyi C. C.* (5235); *Badea A. Ioan* (5260); *Bârlea-Suhăţeanu G. V.* (5257); *Bodnărescu M. Horia* (5214, 35); *Bogdan Gh.* (5244); *Boiangiu D. D.* (4474, 5238, 43, 58, 65); *Buznea D. Dinu* (5006, 142, 60, 205, P); *Cetăţeanu St.* (5033); *Cherţman S. Mozes* (4074, 84, 125, 408, 50); *Chintescu M. M.* (5153); *Constantin P.* (5244, 52); *Costescu Gh. I.* (5033); *Diaconescu V. Const.* (5232, 51, 65); *Drăghicescu P. Paul* (5229, 31, 66); *Dragomir Adrian* (5251); *Fila Gh. Eug.* (5205, 65); *Filiti Gr.* (5251); *Florescu B. I.* (N, P); *Ionescu Berechet* (5265); *Irimescu P.* (5265); *Jiletcovici G. Alex.* (4260, 5265); *Leibovici Sergiu* (5265, 88); *Mateescu A.* (5232, 35); *Metea R.* (5265); *Mihăilescu C. C.* (5260, 65); *Miroslav T.* (5173); *Modâlcă S. E.* (5013); *Negrea A. Mircea-Leonte* (5097, 172, 223, 57, 65); *Pantelimon Const.* (5251); *Petrescu Iulian* (N); *Popa D. Mircea* (5214, 15, 34, 45, 60, 61, 68, N, P); *Racoviceanu Gr. Vlad* (5187, 235); *Ripianu D-tru* (5207); *Rohr I. Alex.* (5261); *Rosenzweig M.* (5265); *Rusu L. M.* (5203, 06, 40); *Saichin O. Adolf* (5257, 58, 65); *Şeibulescu Const.* (5251); *Senki Eugen* (5265); *Şerban C. Const.* (5153, 235, 51); *Şerban T.* (5005); *Solomon M. Marian* (5187); *Ştefanovici M.* (5265); *Stoenescu D. M.* (5172); *Stoica V. Victor* (5229, 60); *Thébault V.* (N, P); *Theodorescu N. Dorin* (5013, 251, 54); *Trefilov I. Mihail* (5168, 98, 201, 31, 50, 51, 63); *Tudoran M. Lydia* (5232, 43); *Turcu R. Sandu* (5229, 51); *Văduva F. Marin* (4074, 548, 5151, 265, E); *Vasilescu-Stabu Al. M.* (5125, 87, 99, 235).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică* Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*

Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 50 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon : 3-9803).

C. 61.103

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLV

NUMĂRUL 8. — APRILIE 1940

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

SUMARUL

1. Antioch Cantemir (urmare) . . . . . *Ion Ionescu.*
2. George Țițeica (urmare) . . . . . *Gh. Th. Gheorghiu.*
3. Produsul a patru numere întregi în progresie aritmetică poate fi un patrat? *I. B. Florescu.*
4. Premiul „Inginer Al. Roșu" . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
5. Note Matematice: 29 — 32.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 291.
8. Diverse.
9. Chestiuni de examen.
10. Probleme rezolvate: 1399, 2959, 3765, 3924, 5008, 5065, 5100, 5122, 5187, 5243.
11. Exerciții: 22 — 26.
12. Probleme propuse: 5287 — 5301.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1940

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Cpt. Comandor-Inginer **I. Linteş**; **D. Stoica**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1939 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 5184, 89, 93, 95, 96, 97, 200, 04, 08, 09, 11, 12, 18, 20, 21, 24, 25, 30, 37, 42, 48, 49, 53, 67, 70, 72, 74, 77, 78, 79, 80, 81, 84, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 300, 01.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL XLV. Nr. 8 *SUPLIMENT* APRILIE 1940

RECREAŢIUNI

1. **Felicitare numerică.** Primesc dela D-l A. MOESSNER o carte poştală ilustrată pe care a scris următoarea urare de Crăciun şi anul 1940:

„*Frohe Weinachten und glükliches Jahr*".

1	9	4	0
9	4	0	1
4	0	1	9
0	1	9	4

Mulţumindu-i pe această cale, adaog la marea d-sale urare ca magia lui 1940 să aducă pace în omenire.

GH. B.

*

2. **Numeraţia latinească.** Pe lângă numeraţiunile în versuri în limbile franceză şi germană publicate în Suplimente anterioare ale *Gazetei Matematice*, adaog pe următoarea numeraţia latinească:

Unus, duo, tres, tu es rex.
Semel, bis, ter, tu es celer
Singuli, bini, terni, cunt quaterni.

I. A. RAICU.

*

3. **Numărul 9 mistic.** La unele descântece se iau 3 fire de păr, iar la altele de 3 ori 9 cărbuni.

La descântecul sau făcutul de dragoste fata numără 9 pari din gard şi pe al nouălea îl leagă.

I. I.

*

4. **Matematica la Caragiale.** Se pare că şi CARAGIALE a avut oare care preocupări matematice; chiar în articolele sale politice şi în cronicile lui dramatice. Astfel în Volumul V din operile sale complecte, comentate de D-l ŞERBAN CIOCULESCU, găsim la pag. 459, următorul sfat:

„*Luaţi o jumătate de afirmaţie a unui ziar opozant şi amestecaţi-o bine cu o desmintire a unuia guvernamental, — iată o reţetă deseori bună pentru a afla adevărul*".

Reţeta se pare că este practică.

In acelaşi volum la pag. 331 găsim altă soluţie pentru o justă apreciere a cronicelor dramatice:

„*Când termometrele criticilor se ridică, unele la 75 deasupra, iar altele coboară la 50 dedesupt de zero, să ştii că şi unele şi altele sunt de*

fabricaţie puţin îngrijită, ori sunt deteriorate; şi atunci ca să afli aproximativ gradul adevărat, trebuie să faci media: 75 plus, 50 minus egal 25 plus, o temperatură foarte plăcută".

Poate că reţeta este bună, dar nu e făcută după principiile matematice. In orice caz, nu se poate pretinde lui CARAGIALE să ştie să facă şi media!"

M. M. M.

Notele marelui dramaturg I. L. CARAGIALE, pe care le-a avut la Liceul „Sf. Petru şi Pavel" din Ploieşti, pe anul şcolar 1866–1867 sunt:

Româna şi Latina: 4 (scris), 7 (oral).
Matematica: 10 (scris), 10 (oral).

Extrasă din „*Profeţi mincinoşi sau opere inedite*" din *Curentul Magazin* Anul I, No. 14, pag. 6.

IONEL I. STAMATE.

Ce concluzie se poate trage din aceste două recreaţii? Răspunsurile în un număr viitor.

I. I.

*

5. **Sate monede.** Unele sate din ţara noastră au nume de monede. Aşa avem Ban în judeţul Salaj, Baniţa în judeţul Buzău, Rubla mare şi Rubla mică în judeţul Râmnicul Sărat.

I. I.

*

6. **Cât lemn conţine un arbore?** Ne-o spune ziarul „*Poşta Ţăranului*" No. 79, An. II în regula următoare:

„Aflăm lungimea circonferenţei la înălţimea pieptului, o împărţim la 3,14 şi ce obţinem ridicăm la patrat; acest patrat îl împărţim la 1000. Cătul este volumul lemnului conţinut de arbore.

De ex. Un ştejar are la înălţimea pieptului lungimea circonferenţei 157 cm. Care este coprinsul?

Răsp. $157 : 3{,}14 = 157{,}000 : 3{,}14 = 50.$

$50 = 2\ 500$, $2\ 500/1\ 000 = 2{,}5\ m^3$."

Bieţii ţărani! De ce nu-i lăsaţi în neştiinţa lor, că măsoară mai uşor şi mai bine!

I. I. ILIUŢĂ-DĂBULENI.

*

7. **O curiozitate a primelor trei numere.** D-l A. MOESSNER îmi semnalează pe o frumoasă carte poştală cu vederi din Nürnberg, următoarea curiozitate aritmetică a primelor trei numere:

$$1 + 2 + 3 = 1 \times 2 \times 3 = \sqrt{1^2 . 2^2 . 3^2} = \sqrt[3]{1^3 . 2^3 . 3^3} = \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3}.$$

Este uşor de observat că membrii III şi IV ai acestor egalităţi nu au nici o particularitate, ei putând fi înlocuiţi prin $\sqrt{1^n . 2^n . 3^n}$, fără ca aceasta să formeze o curiozitate specifică a numerelor 1, 2, 3.

Cartea poştală a D-lui A MOESSNER are data de 28 Sept., numai că D-sa a scris-o sub forma

$$(1+2+4+7+14)\ \text{Sept} = \sqrt{1 . 2 . 4 . 7 . 14}\ \text{Sept}\ 1939,$$

ceea ce nu-i adevărat oricare ar fi însemnarea care s'ar da cuvântului Sept.

GH. B.

*

8. **Enigmă orientală.** In un număr mai vechiu al revistei *La Nature* am găsit următoarea problemă care admite o soluţie matematică:

«Era o dată o caravană de cămile cu care se făcea negoţ între Teopomp şi Prusa de către trei negustori cu numele Zosima, Daniel şi Teofan. Ca slugi la acea caravană erau trei oameni de rând, care au primit prin sfântul botez, aceleaşi nume ca şi negustorii. Unul era hamal, altul conducător al cămilelor şi altul călăuză. Şi pe aceştia deci îi chiamă Zosima, Daniel şi Teofan.

«Acum ascultă Domnule: Hamalul locuieşte într'un sat drept la jumătate de cale între Teopomp şi Prusa. Pe hamalul, şi pe negustorul care locuiesc în Prusa, îi cheamă la fel. La Teopomp locuieşte negustorul cu numele de Teofan. Cel mai apropiat negustor de locuinţa hamalului are un câştig de 9 ori mai mare de cât bietul hamal. Zosima negustorul câştigă la afacerile sale 2222 monede de aur. Călăuza are un ochiu mai puţin de cât Daniel.

«Suntem întrebaţi care este numele conducătorului de cămile».

Soluţia la *Suplimentul* viitor.

I. I.

*

9. **Soluţie originală.** La problema:

«Să se rezolve în numere întregi ecuaţia $x + y^3 = x^3 + y$»,

ce am propus-o în *Suplimentul Gazetei Matematice*, am primit, din partea unui corespondent din Craiova, următoarea soluţie:

„Scriem:

$$1 = (x^3 + y^3)/(x + y^3 = (x \,.\, x \,.\, x + y)/(x + y \,.\, y \,.\, y).$$

Simplificând un x *şi un* y *dela numărător şi numitor avem:*

$$x^2/y^2 = 1 \quad , \quad x/y = 1 \quad , \quad x = y".$$

Intr'adevăr, $x = y$ constitue o soluţie parţială a ecuaţii propuse.

Errore ad veritatem!

V. Gh.

*

10. **O epigramă matematică.** In volumul *« Surâs »* de T. Măinescu găsim epigrama:

„D. C. Argetoianu *candidează cu semnul patratului*".

„Argetoianu *când e dat | Ca latură într'un patrat | Poţi restului să nu-i ştii faţa | Căci el cu el multiplicat | Dă suprafaţa*".

Iar *Revista Fundaţiilor Regale* prin D-l Şerban Cioculescu o găseşte cea mai reuşită dintre epigramele sus zisului poet.

I. D. Diaconescu.

*

11. **La un examen de fine de an.** Profesor de matematică este un advocat care suplineşte pe titularul aflat în o misiune de Stat. D-l avocat este grăbit căci avea termen la Tribunal. Elevii sunt şi ei distraţi şi cu voie bună că vine vacanţa. Şi, în atmosfera, asta, începe examenul:

— Prof. Cu ce este egal $(m^2 + mn + n^2)(m + n)$?

— Elevul: scrie:

$$(m^2 + mn + n^2)(m + n) = m^3 - n^3.$$

— Prof Bine, treci la loc. — Celălalt, să spui cu ce este egal (m^3+n^3) împărţit cu $(m^2 + mn + n^2)$.

Al doilea elev face calculul şi răspunde:

— Elevul. Cu $(m + n)$.

— Prof. Bine. La revedere băieţi. Aţi trecut cu toţii cu succes.

Ce timpuri! Ce moravuri!... Şi când te gândeşti la rigorile *Gazetei Matematice!*

P. N. VASILESCU.

*

12. **Numere rimate şi ritmate.** In Volumul „*Balade vesele şi triste*" al lui G. TOPÂRCEANU, găsim în „*Infernul*":

„*Dar jos te aşteaptă a lui Cain noapte*
Precum a zis Francesca da Rimini,
Infernul, Cântul V, 107...

M. S. CHERŢMAN.

*

13. **Să se stabilească identitatea:**

$$\mathrm{tg}a = \mathrm{tg}(a - b)\,\mathrm{tg}a\,\mathrm{tg}b + \mathrm{tg}b + \mathrm{tg}(a - b).$$

Un elev pleacă dela partea a doua, şi după ce o scrie sub forma:

$$(\mathrm{tg}a - \mathrm{tg}b)\,\mathrm{tg}a\,\mathrm{tg}b + \mathrm{tg}a - \mathrm{tg}b]/(1 + \mathrm{tg}a\,\mathrm{tg}b) + \mathrm{tg}b$$

până acum corectă, face simplificările: $\mathrm{tg}a\,\mathrm{tg}b$ dela numărător şi numitor şi rămâne cu $2\,\mathrm{tg}a - 2\,\mathrm{tg}b + \mathrm{tg}b$; apoi *reduco-simplificare* a lui 2 în primii termeni, în fine reduce pe $\mathrm{tg}b$ şi obţine $\mathrm{tg}a$, c. c. e. d. d. (Autentic).

N. M.

*

14. **Nomenclatura ştiinţifică română.** GHEORGHE SĂULESCU, fost profesor la Iaşi, propusese a se schimba nomenclatura ştiinţifică spre a fi românizată. Astfel:

In loc de	Astronomie	se va zice	*Stelegie.*
„ „ „	Geometrie	„ „ „	*Tearo-mesorie.*
„ „ „	Metafizică	„ „ „	*Peste-fizică.*

I. I.

*

15. **Chiar şi infinitul este nimicnicie!** Aflăm aceasta rezolvând ecuaţia:

$$2x - 101 + 5x + 7 = 3x + 1 + 4x.$$

Punând termenii cunoscuţi în partea a doua obţinem $x = 25/0 = +\infty$. Punând însă cunoscuţii în partea întâia, avem $x = -95/0 = -\infty$. Ecuaţia fiind însă de gradul întâiu, cele două rădăcini găsite trebuie să fie egale; deci $+\infty = -\infty$, sau $+\infty + \infty = 0$ sau $+\infty = 0$.

V. GH.

*

16. **Satisfacţie matematică** In „*Gorila*" de L. REBREANU pag. 560 găsim:

„*Confirmarea atât de promptă a bănuielilor lui îl umplea de satisfacţie întocmai ca rezolvarea unei probleme matematice*".

D. MUSCELEANU.

ANTIOCH CANTEMIR

(Urmare dela pagina 339)

In August 1738 Prinţul ANTIOCH pleacă dela Londra la Paris unde ajunge după 6 zile, şi după 10 ore de traversare a Canalului La Manche.

La Paris, ANTIOCH a trebuit să-şi schimbe felul de viaţă căci obligaţiunile diplomaţilor erau mult mai numeroase ca în Anglia: trebuia să facă şi să primească vizite, să se ducă la mese, baluri, jocuri de cărţi, să se ducă la teatre, spectacole, să îngrijească de tinerii ruşi veniţi pentru studii, etc. Acestea toate îi răpeau timp mult şi îi dedeau multe amărăciuni, fiindcă nu i se puneau la dispoziţiune sumele necesare. Deseori făcea împrumuturi, pe care neputându-le achita la timp, îşi pierduse creditul, aşa că pentru banii de piaţă era nevoit uneori să-şi pue amanet vesela lui de argint. Cum el avea oroare de datorii, starea aceasta de lucruri îl amăra mult. In familiile aristrocratice franceze nu-i plăcea să se ducă; despre ele scrie odată unei Doamne: „*Les jours se passent moitié à ne rien faire et l'autre à faire des riens*".

In orele lui libere, ANTIOCH a citit şi a scris mult. El îşi formase o Bibliotecă interesantă, al cărui Catalog s'a păstrat, s'a ocupat de matematici foarte mult legând o prietenie sinceră cu MAUPERTUIS pe care l-a propus ca membru onorar al Academiei din St. Petersburg şi pensionar al ei, fără a i se plăti ceva, din lipsă de fonduri. Prin intermediul lui ANTIOCH acesta corespundea cu savanţii ruşi europeni dela acea Academie. EULER corespundea de acolo prin ANTIOCH cu matematicianii din Franţa. După plecarea din Rusia a lui BERNOULLI, acesta îşi primea pensia dela Academie tot prin Prinţul CANTEMIR.

ANTIOCH a avut mare grijă de Academia rusă. Prin el, aceasta îşi procura cărţile de care avea nevoie, aparate, instrumente, etc. Astfel a trimis Academiei primele 66 volume din *Journal des Savants*. In definitiv, el a contribuit foarte mult la apropierea intelectuală a Ruşilor de Occident. El era să fie Preşedinte al Academiei după întoarcerea în Rusia.

In timpul cât a stat la Paris, a fost în legătură continuă cu familia lui. In special surorei sale MARIA îi trimitea mereu cărţi de citit în limbele greacă, latină şi italiană, căci ea stând în medii,

care nu erau de rangul ei, trăia mai mult izolată. Ea spunea că *„e mult mai bine fără tovarăşi decât în rea tovărăşie"*.

ANTIOCH a citit şi a meditat mult asupra filosofiei şi religiilor. El spunea că a fi inteligent este a trăi calm şi a fi satisfăcut cu puţin. Pe el îl frământa mult ideia că noţiunea de infinit s'a putut naşte în om, fiinţă cu totul finită! Deasemenea l'a surprins infailibila frumuseţe a ştiinţelor matematice şi universalitatea raţiunii umane: *„Se poate în hemisfera în care suntem, să ştim mai dinainte, ce răspunsuri se va da la anumite chestiuni în extremitatea cealaltă a emisferei; oamenii din toate părţile lumii, orice educaţie ar fi primit, simt involuntar nevoia de a vorbi şi a cugeta de acord unii cu alţii.*

Cu VOLTAIRE nu a dus-o bine. El i-a citit operile şi a tradus câte ceva în limba rusă. Citind *Istoria lui Carol XII*, ANTIOCH găseşte acolo vorbindu-se şi de *Cantemireştii* din Moldova pe care VOLTAIRE îi face de origină greacă. ANTIOCH îi scrie că este greşit în această privinţă şi că familia lui este de origină tătară, stabilită în Moldova în secolul XVI. VOLTAIRE promite că va rectifica la o nouă ediţie, ceea ce nu a făcut decât în parte; el ia însă pe Prinţ în zeflemea spunându-i că, văzând multiplicitatea aptitudinilor lui şi ale tatălui său DIMITRIE CANTEMIR a crezut mai curând că se trag din grecii lui PERICLES decât din tătarii lui TAMERLAN şi caută, ca prin jocuri de cuvinte, să arate cum se poate ajunge dela TAMERLAN la CANTEMIR. Din această cauză ANTIOCH nu îl menaja pe VOLTAIRE ori decâte ori i se prezenta ocaziunea. Auzind că acesta vrea să tipărească o ediţie populară, pe înţelesul tutulor, a filosofiei lui NEWTON, Prinţul CANTEMIR scrie unei Doamne:

„Am auzit prin ştiri din Olanda, că el ne va da un roman al filosofiei lui NEWTON, *cum el a făcut cu viaţa lui Carol XII, şi un roman care va fi pentru înţelesul lumei întregi, după cât promite. Filosofia lui* NEWTON *tratată de* D-l VOLTAIRE, *care de sigur nu ştie de loc Algebră, făcută pentru înţelesul oricui! Nu râdeţi Doamnă, de această idee? Dacă bietul om a făcut să sboare, armate, fără a arăta drumul lor şi impulsul care le-au făcut să acţioneze, judecaţi prin asta, ce va face dânsul, când va vrea să explice mişcările corpurilor cereşti! Mi-e teamă că nu o să mai fim în siguranţă pe pământ!"*.

ANTIOCH a mai scris şi cu alte ocaziuni lui VOLTAIRE, ca de exemplu pentru a-i schimba părerea că populaţiunea Rusii este în descreştere.

In timpul cât a stat la Paris, ANTIOCH a continuat de a scrie literatură rusă; a tradus din HORAŢIU; pe *Anacreon* în versuri: istoria lui JUSTIN. Pentru PETRU CEL MARE a compus o poemă şi a tipărit portretul pentru a-l face cunoscut în lumea cultă din Occidentul Europei.

In 1734 apare la Neapoli „*Il Newtonianismo per le Dame ovvero dialoghi sopra la luce*", pe care el o traduce pentru Ruşi. Imitând pe FONTENELLE, el scrie în limba franceză „*Lettres sur la nature de l'homme*", adresate unei Doamne.

După insistenţa prietenului său MAUPERTUIS, care văzuse că-i place mult algebra, a scris în ruseşte un tratat de Algebră care a rămas în manuscris şi despre care era vorba în cererea No. 94. Ce s'a făcut cu această *Algebră*, M. EHRHARD nu ne spune nimic. Se arată că la moartea lui ANTIOCH CANTEMIR, Impărăteasa ELISABETA a cumpărat cărţile şi manuscrisele ruseşti, greceşti şi latineşti, iar celelalte au fost vândute în Paris. Chestiunea Algebrei lui ANTIOCH nu poate dar să fie închisă.

Prinţul CANTEMIR a fost un om foarte religios. El spunea că *filosofia face pe om virtuos numai în vorbe, religia îl face în fapte.* El a fost şi a rămas creştin ortodox şi a scris şi în testament ca să fie înmormântat ca un astfel de creştin. El se temea mult de moarte, dar către sfârşitul vieţii, spunea: „*Ideia de moarte, care la început m'a speriat, mă consolează azi, considerând că ea vine dela acela care mi-a dat viaţa.*

La începutul anului 1744 ANTIOCH se îmbolnăveşte grav. Băile pe care le făcuse în Franţa nefiindu-i priincioase, se hotărîse să se ducă în Italia, dar îi lipseau banii necesari. El şi-a păstrat însă prezenţa de spirit până în ultimul moment. Prietenul său MAUPERTUIS, pe timpul boalei îl vizita zilnic odată sau de două ori.

In ziua de 11 Aprilie, Sâmbăta Paştilor, şi-a dat sfârşitul, invocând numele lui Dumnezeu şi făcându-şi semnul Crucii pe care nu a putut-o termina!

Şi astfel s'a stins acest fiu de român, care, deşi nu avea nici un pic de sânge de rus în el, şi-a servit noua lui Patrie cu pricepere, cu tot zelul şi a contribuit la ridicarea ei intelectuală.

Un bun prieten al lui, — mai târziu biograful lui — GUASCO, scriind lui MONTESQUIEU despre moartea lui ANTIOCH, primeşte dela acesta o scrisoare în care îi spune: *„tu vei găsi amici pentru a înlocui pe cel ce l-ai pierdut, dar Rusia nu va mai avea un Ambasador de meritul Prinţului* CANTEMIR".

După dorinţa lui ANTIOCH, corpul lui a fost dus la Moscova, unde a fost înmormântat, după un an şi cinci luni dela moarte, în Biserica Sft. Niculae, construită de tatăl său, şi în care a fost înmormântat şi acesta.

* * *

Am dat o desvoltare mai mare acestui rezumat din cartea D-rei MARCELLE EHRHARD, întru cât pentru noi el este un român pe care vitregia timpurilor l'a îndepărtat de Patria lui; unul care a făcut ştiinţe serioase în Orientul Europei la începutul Secolului XVIII şi care pentru prima dată a dat în acest Orient un tratat de Algebră. El este un exemplu strălucit care arată ce ar fi putut produce geniul românesc dacă spiritul românesc s'ar fi putut desvolta în libertate.

ION IONESCU.

GEORGE ŢIŢEICA

II. Lucrări de Matematici Superioare

(Urmare dela pag. 344)

Cam în acelaşi timp cu ŢIŢEICA, DEMOULIN s'a ocupat şi el cu proprietăţi ale suprafeţelor riglate. In lucrarea (31) se găsesc câteva complectări ale rezultatelor lui DEMOULIN. Astfel, ca o generalizare a unei teoreme a geometrului belgian, ŢIŢEICA demonstrează următoarea teoremă: *fie* S *o suprafaţă riglată,* g *una din generatoarele sale,* H *iperboloidul osculator la* S *în lungul lui* g, C_f *o ramură a liniei flecnodale a lui* S, F *punctul flecnodal a acestei linii pe* g, P *punctul de pe muchia de rebrusment al suprafeţei desfăşurabile circumscrisă lui* S *în lungul lui* C_f *şi care corespunde lui* F; *atunci,* P *este polul planului osculator în* F *a*

lui C_f *în raport cu* H. Tot aci mai arată că suprafaţa cu con director de rotaţie care admite ca linii flecnodale linia de stricţiune şi curba dela infinit, este un elicoid riglat ordinar.

Mai târziu, în 1925, ŢIŢEICA studiază o clasă de curbe analoage curbelor (T) ce se bucură de proprietatea că dealungul lor expresia $T\cos^2\theta$, unde T este torsiunea curbei, iar θ unghiul ce face binormala, în punctul corespunzător, cu o direcţie fixă, rămâne constantă (72, 73). Printre alte proprietăţi, se face o clasificare a suprafeţelor riglate ce admit una sau mai multe curbe din clasa menţionată ca linii asimptotice. Astfel se arată (72) că suprafeţele riglate cu plan director dacă au o linie asimptotică din clasa considerată, toate liniile asimptotice ale suprafeţei sunt de aceeaşi natură. In acest caz suprafaţa are liniile flecnodale aruncate la infinit şi confundate cu dreapta dela infinit a planului director. O asemenea suprafaţă se bucură de proprietatea: dealungul ei expresia $K\cos^4\theta$, unde K este curbura suprafeţei, iar θ unghiul pe care-l face normala la suprafaţă cu o direcţie fixă, este constantă.

Ca o generalizare a invariantului Td^2 într'un spaţiu cu mai multe dimensiuni, în 1935, ŢIŢEICA arată că expresia

$$[h] \qquad I = d^{n+1}\frac{(\omega_1^{n-2}\,\omega_2^{n-3}\ldots\omega_{n-2})^{n+1}}{(\omega_1^{n-1}\,\omega_2^{n-2}\ldots\omega_{n-1})^{n-1}},$$

unde d este distanţa dela un punct fix O la spaţiul linear cu $n-1$ dimensiuni osculator în M unei curbe C şi ω_i curburile în M la această curbă, este un invariant faţă de o transformare afină unimodulară şi care lasă invariabil punctul fix O (87). Tot în aceeaşi ordine de idei, în 1936, începe o generalizare a suprafeţelor Tz în spaţiul cu mai multe dimensiuni. Astfel arată (92) că expresia $K : d^{n+1}$ rămâne constantă dealungul varietăţei cuadratice

$$[i] \qquad A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \ldots + A_n x_n^2 = 1,$$

K fiind *curbura totală* a suprafeţei într'un punct M, iar d distanţa dela origină la iperplanul tangent în M. De aceeaşi proprietate se bucură şi suprafaţa

$$[j] \qquad x_1 x_2 \ldots x_n = 1.$$

Mai general, arată că expresia $K : d^{n+1}$, pentru o varietate oarecare

V_{n-1}, este un invariant față de o transformare afină unimodulară care nu schimbă originea. Analog, varietatea

$$[i'] \qquad A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \ldots + A_{n-1} x_{n-1}^2 - 2x_n = 0,$$

se bucură de proprietatea că raportul $K : \cos^{n+1}\theta$ este constant, θ fiind unghiul pe care-l face normala în M cu axa Ox_n. ȚIȚEICA definește aci curbura totală a unei varietăți V_{n-1} ca fiind limita raportului dintre volumul unui poliedru format din n puncte vecine pe varietate și volumul poliedrului format de reprezentarea ipersferică a acestor puncte.

Pe lângă faptul că suprafețele Tz i-au dat prilejul să facă un studiu amănunțit al lor, în legătură cu ele, ȚIȚEICA își pune și alte probleme dintre care cea mai interesantă este *studiul rețelelor* R. Iată-l povestind (74) cum a ajuns la acest studiu.

„*Comme les lignes asymptotiques jouent un rôle essentiel dans la théorie des surfaces* S, *j'ai été naturellement conduit à chercher une transformation de ces surfaces à l'aide des congruences* W, *analogue à celle des surfaces à courbure totale constante ou à celle des surfaces applicables sur une quadrique (38, 39)*".

„*J'ai abordé alors la théorie générale des congruences* W, *à l'aide d'un théorème remarquable de* DARBOUX, *au quel j'ai donné une nouvelle démonstration à l'aide d'une interprétation géométrique dans un espace à cinq dimensions. J'ai fait voir (40, 42) qu'à toute congruence* W *il correspond un réseau tracé sur une variété à quatre dimensions dans un espace projectif à cinq dimensions et réciproquement. Aux deux complexes formés par les tangentes des deux surfaces focales d'une congruence* W *correspondent deux congruences, conjuguées au réseau précédent et formées par des droites appartenant à la variété quadratique. Les deux foyers d'un rayon d'une de ces congruences sont les images des deux tangentes asymptotiques de la surface focale correspondante*".

„*Revenons au système* [g] *et montrons la seconde voie que j'ai suivie en même temps que la précédente. On peut considérer ce système comme définissant les coordonnées projectives d'un réseau plan: c'est la perspective sur un plan des lignes asymptotiques d'une surface* S. *Cette perspective est, d'après un théorème de* M. KOENIGS, *un réseau à invariants égaux, ce qui est du reste visible sur le système* [g]".

„*J'ai été ainsi obligé d'étudier les réseaux à invariants égaux. J'ai complété un autre théorème de* M. KOENIGS, *concernant certaines coniques attachées à un réseau à invariants égaux et en revenant au réseau plan défini par* [g] *j'ai montré qu'il se reproduit après trois transformations de* LAPLACE (32)".

„*De sorte qu'en faisant correspondre à une congruence* W *de notre espace un réseau quadratique d'un espace à cinq dimensions, j'ai été naturellement conduit à considérer d'une manière spéciale les congruences* W *dont l'image est un réseau à invariants égaux* (43)".

„*Un troisième théorème de* M. KOENIGS, *appliqué à un tel réseau et à une des deux congruences quadratiques conjuguées donne un nouveau réseau quadratique à invariants égaux, à partir duquel on peut continuer la même opération. En revenant à notre espace on obtient une suite de* LAPLACE *dont toutes les congruences sont* W. *Un réseau quelconque de la suite est ce qu'on appelle un réseau* R (44). *C'est de cette manière que je suis arrivé à l'étude de réseaux* R".

Chiar în nota de care vorbeşte mai sus (44), ŢIŢEICA dă o transformare pentru reţelele R şi anume arată că printre congruenţele W care admit o reţea R pe una din suprafeţele focale, există o infinitate cari admit şi pe cea de a doua suprafaţă focală tot o reţea R.

Dar ceea ce este mai interesant este că tot aci se găseşte şi studiul unei ecuaţii a lui LAPLACE cu invarianţi egali ce admite şase soluţii legate printr'o relaţie cuadratică. Demonstrează cu această ocazie că există o infinitate de transformări MOUTARD prin care noua reţea se bucură de aceeaşi proprietate. Inainte de a ataca problema generală, ŢIŢEICA studiază cazul a patru soluţii cuadratice, cu alte cuvinte reţele cu invarianţi egali situate pe o cuadrică (46). Găseşte printre alte proprietăţi, două transformări ale reţelelor cu invarianţi egali cuadratice, în reţele de aceeaşi natură. Metoda întrebuinţată în notele precedente pentru cazul unui număr cu soţ de soluţii cuadratice, puţin modificată, este aplicată în lucrarea (47) pentru cazul a cinci soluţii, ceeace revine la studiul suprafeţelor izotermice. O transformare a acestor reţele, în reţele de aceeaşi speţă, conduce la o generalizare a transformării D_m a lui DARBOUX relativă la aceste suprafeţe. Se găseşte aci o interpretare

foarte interesantă în spaţiul cu patru dimensiuni a acestor rezultate. Tot ca o consecinţă, în lucrarea (49) se pune în evidenţă o transformare nouă a reţelelor izotermice, care în spaţiul obişnuit se confundă cu transformarea lui BIANCHI. Grupul acesta de lucrări este închis cu lucrarea (48) în care se rezolvă complect problema găsirei soluţiei particulare R cu ajutorul căreia transformarea lui MOUTARD să dea o nouă ecuaţie LAPLACE cu invarianţi egali şi care ca şi cea iniţială să aibă *n* soluţii legate prin aceeaşi relaţie cuadratică.

Aceste ultime chestiuni, reţelele R precum şi studiul ecuaţiei lui LAPLACE admiţând un număr de soluţii legate printr'o relaţie cuadratică, îşi au origina, după cum am spus mai sus, în studiul suprafeţelor Tz. Tot în acest studiu îşi au origina lucrările (59), (60), (61). In prima, ŢIŢEICA studiază suprafeţele riglate având liniile flecnodale confundate la distanţă finită. Demonstrează cu această ocazie următoarea teoremă: *condiţia necesară şi suficientă pentru ca o suprafaţă riglată să aibă liniile flecnodale confundate, este ca complexul linear osculator suprafeţei dealungul unei generatoare să fie special.* In lucrările (60), (61) consideră suprafeţele ale căror suprafeţe asimptotice riglate R_u şi R_v au liniile flecnodale confundate (fără a fi plane şi aruncate la infinit), arătând legătura ce există între ele şi reţelele conjugate cu invarianţi egali cari se reproduc după 6 transformări ale lui LAPLACE.

Studiul făcut de ŢIŢEICA asupra suprafeţelor Tz are la bază sistemul afin de ecuaţii cu derivate parţiale [*g*]. Pentru a atrage mai mult atenţia asupra foloaselor pe care le aduce această metodă, cu alte cuvinte, întrebuinţarea unui sistem de ecuaţii cu derivate parţiale, în demonstrarea unei proprietăţi infinitezimale ce rămâne invariabilă transformărilor unui grup (transformări ce nu schimbă sistemul ales), face o aplicaţie (45) asupra suprafeţelor izotermice regăsind ecuaţiile cu derivate parţiale ale lui ROTHE şi CALAPSO. Tot în această ordine de idei, arată că sistemul format de prima şi a treia dintre ecuaţiile [*g*] formează un sistem [*g'*] cu ajutorul căruia se poate da o soluţie mai complectă chestiunei pusă de D-l CARTAN: să se găsească suprafeţele care admit o reprezentare geodezică afină pe un plan (71).

In notele (50), (51), (52) ŢIŢEICA introduce noţiunile de *reţele derivate obişnuite* şi apoi *reţele derivate de ordinul r* dând

totodată câteva proprietăţi ale lor. In nota ce urmează (53) introduce noţiunea de *reţele reciproc derivate.* Arată că aceste reţele nu pot fi situate decât într'un spaţiu cu trei dimensiuni fiind ambele izoterm conjugate. Reţelele reciproc derivate sunt reţele R.

In 1913, într'o notă publicată la Paris (54), ŢIŢEICA generalizează o problemă a lui GUICHARD studiind reţelele (x) situate într'un spaţiu cu $2n-1$ dimensiuni cari satisfac condiţiilor

$$\Sigma x^2 = 1 \quad , \quad \Sigma \left(\frac{\partial^i x}{\partial u^i}\right)^2 = 0 \quad , \quad \Sigma \left(\frac{\partial^i x}{\partial v^i}\right)^2 = 0,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Arată că aceste reţele au şirul lui LAPLACE periodic, şi reciproc. Demonstraţiile, şi încă câteva proprietăţi, sunt date în nota (66). Cum aceste proprietăţi sunt în legătură cu o clasă de reţele (M) introduse de DARBOUX pentru a da o generalizare suprafeţelor minime, ŢIŢEICA dă posibilitatea ca dintr'o reţea (M) să se deducă o infinitate de aceeaşi natură (55). Dar tot cu această ocazie îşi propune să studieze mai deaproape reţelele al căror şir al lui LAPLACE este periodic. Proprietăţile găsite, multe şi variate, sunt publicate în rezumat în C. R., în nota (56), iar în ţară în notele (62), (63), (64). El dă separat într'o notă (57) studiul reţelelor cu invarianţi egali care sunt în acelaşi timp perioidice. In aceeaşi ordine de idei în lucrarea (58) se găsesc studiate reţelele R cu şirul lui LAPLACE periodic, având perioada 4.

In 1926, ŢIŢEICA îşi propune (75), (76), (78) studiul unei noui clase de congruenţe. Dacă, într'un spaţiu cu n dimensiuni, considerăm o congruenţă (xy) raportată la desfăşuratele sale, coordonatele focarelor x, y trebue să fie soluţii ale unui sistem de forma

$$x_v = ay \quad , \quad y_u = bx.$$

Congruenţele considerate de ŢIŢEICA, numite de el *congruenţe* GOURSAT, în onoarea celui care le-a considerat prima dată, sunt definite prin condiţia $a = b$. Definiţia aceasta analitică, se arată acolo, poate fi înlocuită cu următoarea definiţie geometrică: *printre cuadricele fascicolului definit prin dreptele* $x_{-1}x$, $x_{-1}y$, y_1y, y_1x *(notaţiile fiind cele obişnuite) există una* Q_1 *ce are în* x_{-1} *cu curba* $u = const.$, *un contact de ordinul al doilea şi la fel*

una Q_2 *ce are în* y_1 *cu curba* $v = const.$, *un contact de ordinul al doilea; congruența este congruență* GOURSAT *atunci și numai atunci când* $Q_1 \equiv Q_2$. Congruențele cari sunt în același timp și cuadratice sunt studiate în special.

In lucrarea (78) se dă o generalizare cu ajutorul sistemului

$$[k] \qquad \frac{\partial x_i}{\partial u_k} = a_{ik} x_k \qquad (i \neq k;\ i,\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

unde se presupune că: $a_{ik} = a_{ki}$. n punte x_i, dintr'un spațiu cu m dimensiuni ale căror coordonate satisfac sistemului $[k]$ formează o configurație G. In cazul $n = 3$ o asemenea configurație fusese deja întâlnită în sistemele triplu ortogonale.

In 1932 ȚIȚEICA se ocupă cu *reprezentarea conformă și cu funcțiunile raționale osculatoare unei funcțiuni analitice* trăgând din studiul acestor două probleme consecințe geometrice interesante. In adevăr, în lucrarea (81) se studiază amănunțit problema locală a corespondenței curburelor curbelor într'o transformare conformă. După ce se stabilește formula

$$K = \frac{k}{|f'(z)|} + \frac{d}{dn}\left[\frac{1}{|f'(z)|}\right],$$

unde $Z = f(z)$ este funcțiunea ce ne dă reprezentarea, k și K curburile curbei (c) și a transformatei (C), arată că: *a)* dacă curbele (c) sunt tangente într'un punct m la o aceeași dreaptă mt, atunci centrele de curbură ale curbelor (c) și (C) formează pe normalele corespunzătoare diviziuni omografice în cari punctele m și M (omologul lui m) se corespund; *b)* dacă mt se rotește în jurul lui m, curbura k rămânând constantă, locul centrelor de curbură ale curbelor (C) este o conică având un focar în M; *c)* dacă curbura k variază conicele precedente au același focar și aceeași directoare. In lucrările (84) și (91) ȚIȚEICA se ocupă cu funcțiunile raționale osculatoare având un singur pol de ordinul n și apoi cazul când au p poluri simple. In primul caz, arată că polul funcțiunei osculatoare funcțiunei $f(z)$, joacă un rol special pentru reprezentarea conformă $Z = f(z)$.

Pe lângă lucrările analizate mai sus ȚIȚEICA a mai publicat și altele fiecare în parte ocupându-se de o chestiune specială.

Astfel în lucrarea (14) face câteva observări relative la notele publicate în C. R., de D-l DAVIDOGLU, asupra rădăcinilor comune a mai multor ecuații. In lucrarea (17) arată că curba după care o suprafață minimă taie ortogonal sfera cu centrul în origină și de rază 1, poate fi considerată ca imagina unei curbe a cărei curbură este constantă.

In 1903, GUICHARD pune în evidență o nouă transformare a suprafețelor cu curbura totală constantă folosind o serie de perechi de soluții ale ecuației $\theta_{uv} = \sin\theta$. ȚIȚEICA arată (19) că aceste soluții se împart în două serii distincte obținute prin transformarea BIANCHI-BÄCKLUND. Lucrările (21) și (22) se referă la o teză de doctorat prezentată la Göttingen, și care se ocupă cu câteva probleme de integrare ale ecuației diferențiale

$$y'' + \lambda A(x) y = 0,$$

λ fiind un parametru, iar $A(x)$ o funcțiune continuă și pozitivă într'un interval dat. Arată că se pot regăsi aceste rezultate folosind metoda lui PICARD. In lucrarea (26) se demonstrează următoarea teoremă: *fiind dată o suprafață* S *și un punct fix* O, *dacă dealungul liniilor asimptotice, avem*

$$s = \pm f(r) + C,$$

s *însemnând arcul asimptoticei măsurat dela un punct fix luat pe curbă, iar* r *distanța punctului mobil la* O, *atunci suprafața* S *este de rotație.* In lucrarea (35) își propune, și rezolvă, următoarea problemă de geometrie infinitezimală: *fiind dată pe o suprafață o rețea de curbe* (u, v), *în ce caz pe tangenta uneia din curbe există un punct care să descrie o suprafață având normala paralelă cu tangenta la cealaltă curbă?* Se găsește elementul linear al acestor suprafețe.

In lucrarea (65) se ocupă cu suprafețele aplicabile. Anume, consideră o pereche de astfel de suprafețe S, S′ având ca prima imagine o varietate cu două dimensiuni cu elementul linear zero într'un spațiu euclidian cu șase dimensiuni; iar drept a doua imagină o varietate cu două dimensiuni situată pe o cuadrică cu șase dimensiuni. Din considerarea acestor două imagini, și folosind o teoremă a lui RIBAUCOUR, găsește o transformare a suprafețelor aplicabile.

Lucrările (69), (70), (84), (86) şi (88) conţin fiecare studiul unei probleme noui relativă la ecuaţia lui LAPLACE. Astfel în lucrarea (69) se introduce noţiunea de *reţele de puncte*. Printr'o reţea de puncte ŢIŢEICA înţelege un şir dublu de puncte P_{ik} ale căror coordonate proiective x_{ik} satisfac ecuaţiei cu diferenţe finite

$$x_{i+1,\,k+1} + a_{ik}\,x_{i+1,\,k} + b_{ik}\,x_{i,\,k+1} + c_{ik}\,x_{i,\,k} = 0,$$

şi studiază asupra acestor reţele câteva probleme analoage problemelor cunoscute dela reţelele continui. In legătură cu şirul lui LAPLACE îşi pune problema (70) de a studia ansamblul de reţele format de acest şir şi de a găsi, atunci când există, figurile limită ale ansamblului. Lucrarea, care a fost prezentată în congresul dela Toronto, conţine două exemple interesante când problema poate fi complect rezolvată. O altă problemă interesantă o formează reţelele cu invarianţi constanţi (84) şi apoi reţelele având raportul invarianţilor constant (86). Pentru acestea din urmă demonstrează următoarea proprietate interesantă: *orice secantă dusă prin x taie conicele lui* KOENIGS *în patru puncte cari au acelaşi raport anarmonic.* Reciproca este adevărată. Lucrarea (88), care nu este altceva decât comunicarea făcută la Oslo, pune în evidenţă că ecuaţia lui LAPLACE poate servi de bază unei geometrii diferenţiale centro-afină. Ca un exemplu, arată că *dacă coordonatele unui punct ce descrie o suprafaţă într'un spaţiu cu n dimensiuni* ($n \geqslant 4$) *satisfac o astfel de ecuaţie atunci putem circumscrie suprafeţei* R_u *născută de tangenta* xx_v *la curba* $u = const.$, *atunci când x descrie curba* $v = const.$, *un con având vârful în origină.*

In lucrarea (77), ŢIŢEICA foloseşte o lucrare a lui B. SEGRE, prin care se arată că dacă coordonatele proiective ale unui punct depe o congruenţă dintr'un S_n, satisfac unui sistem de forma

$$[l] \qquad \begin{cases} x_{uuv} = rx_{uu} + sx_{uv} + px_u + qx_v + mx, \\ x_{vvu} = r'x_{vv} + s'x_{uv} + p'x_u + q'x_v + m'x, \end{cases}$$

atunci suprafaţa este conjugată congruenţei, pentru a face intuitivă transformarea unui sistem de forma [*l*] dată de BOMPIANI. In lucrarea (79) dă o interpretare interesantă a unei teoreme demonstrată de D-l BARBILIAN, într'un spaţiu cu 4 dimensiuni care permite o nouă demonstrare a teoremei şi pune în evidenţă

generalizări, cari la o primă examinare, s'ar părea că n'au nimic comun cu teorema inițială.

Lucrările (89) și (95) sunt consacrate deformărei de ordin superior în sensul lui BOMPIANI. In prima lucrare consideră suprafața

$$x_i = A_i (u + a_i)^{\frac{n}{2}} (v + a_i)^{\frac{n}{2}}, \qquad (i = 1, 2 \ldots, n),$$

situată într'un spațiu euclidian cu n dimensiuni și arată că există printre aceste suprafețe o simplă infinitate care sunt aplicabile una pe alta. In cazul $n = 2p$ aceste suprafețe se pot chiar suprapune. In cazul $n = 2p + 1$ deformarea este propriu zisă, și este de ordin superior, în sensul lui BOMPIANI, păstrând curba $u = v$ rigidă. ȚIȚEICA voia în acest fel să generalizeze cele stabilite de el cu mulți ani înainte asupra suprafețelor tetraedrale. In a doua lucrare, generalizând o teoremă cunoscută, ȚIȚEICA demonstrează următoarea teoremă: *dacă o rețea cuadratică dintr'un spațiu cu* $2q - 1$ *dimensiuni se bucură de proprietatea că primele* $2p$ *transformate ale lui* LAPLACE *într'un sens și într'altul sunt situate pe aceeași varietate cuadratică, putem să facem să-i corespundă într'un spațiu euclidian cu* $q - 1$ *dimensiuni o pereche de suprafețe aplicabile de ordinul p.*

Face apoi cu ajutorul teoremei precedente, o legătură între rețelele periodice cu invarianți egali și deformările de ordin superior.

In lucrarea (91) demonstrează în două moduri o teoremă a D-lui CARATHÉODORY prin care se arată că raportul razelor de curbură ale curbelor la care sunt tangente razele unei congruențe respectiv în cele două focare, este egal cu raportul elementelor corespunzătoare depe suprafețele focale.

Lucrarea (93) are un caracter elementar folosind o metodă dată de KUBOTA pentru a găsi proprietăți ale poligoanelor circumscrise unei conice.

(Va urma) GH. TH. GHEORGHIU.

PRODUSUL A PATRU NUMERE INTREGI IN PROGRESIE ARITMETICĂ POATE FI UN PATRAT?

Această chestiune este o generalizare a Notei D-lui V. THÉBAULT din *Gazeta Matematică*, Anul XXVIII, pag. 126.

Chestiunea pusă în titlul acestui articol o voiu trata pe o cale cât se poate de elementară.

Fie a un număr întreg, $2a$ raţia pereche a unei progresii aritmetice crescătoare. Dacă raţia nu ar fi pereche, înmulţim toţi termenii progresii cu 2. Produsul a patru termeni ai ei se va înmulţi cu 2^4, şi deci, dacă acel produs era un patrat, el va rămâne tot un patrat.

Fie $(x - 3a)$ primul termen al unei progresii aritmetice de patru termeni. Progresia va fi:

$$(1) \qquad \div x - 3a\,,\ x - a\,,\ x + a\,,\ x + 3a.$$

Dacă n este un număr întreg, chestiunea revine la a vedea dacă există întregi x, a, n aşa ca să avem egalitatea:

$$(2) \qquad (x - 3a)\ (x - a)\ (x + a)\ (x + 3a) = n^2,$$

$$(3) \qquad \therefore \quad (x^2 - a^2)\,(x^2 - 9a^2) = n^2.$$

Putem presupune pe x şi a coprimi, căci altfel, dacă ei ar avea un factor comun c, prima parte a egalităţii (3) s'ar divide cu c^4. Atunci n^2 ar trebui să se dividă şi el cu c^4, iar câtul ar fi tot un patrat. Am avea deci tot o egalitate de tipul (3) cu numere mai mici. Să presupunem dar pe x şi a numere coprime. Avem apoi egalitatea:

$$(4) \qquad (x^2 - a^2) - (x^2 - 9a^2) = 2\,(2a)^2 = 8a^2.$$

Fiindcă x şi a sunt coprimi, rezultă că $(x^2 - a^2)$ şi $(x^2 - 9a^2)$ nu pot avea alţi factori comuni decât un divizor al lui 8, adică

pe 1, 2, 4 sau 8. Deci egalitatea (3) nu ar putea fi satisfăcută decât în următoarele patru feluri:

$$\text{I}\begin{cases} x^2 - x^2 = p^2 \,, \\ x^2 - 9a^2 = q^2 \,, \end{cases} \quad \text{II}\begin{cases} x^2 - a^2 = 2p^2, \\ x^2 - 9a^2 = 2q^2, \end{cases}$$

$$\text{III}\begin{cases} a^2 - x^2 = p^2 \,, \\ 9a^2 - x^2 = q^2 \,, \end{cases} \quad \text{IV}\begin{cases} a^2 - x^2 = 2p^2, \\ 9a^2 - x^2 = 2q^2. \end{cases}$$

Să studiem pe rând fiecare din aceste sisteme:

I. $\qquad x^2 - a^2 = p^2 \;\;,\;\; x^2 - 9a^2 = q^2.$

Să punem

(5) $\qquad x - p = \alpha \;\;,\;\; x - q = \beta \;\;,\;\; 9\alpha - \beta = \gamma.$

Dacă eliminăm pe x şi β din (3) şi (5) găsim:

(6) $\qquad a^2 = \alpha(9\alpha - \gamma)\,(\gamma - 8\alpha)/\gamma.$

Dacă α şi γ ar avea un factor comun d, atunci partea a doua a lui (6) s'ar divide cu $d \,.\, d \,.\, d \,./\, d = d^2$ şi deci ar rezulta $a = \mathfrak{M}d$. Divizând toată egalitatea (6) cu d^2 dăm peste o alta de aceeaşi formă însă cu numere mai mici. Putem dar presupune că α şi γ sunt coprime. In acest caz γ şi $(9\alpha - \gamma)$ nu ar putea avea alţi divizori comuni decât pe ai lui γ şi $(9\alpha - \gamma + \gamma) = 9\alpha$. Cum γ şi α sunt coprimi, reese că divizorii lui γ nu ar putea să fie decât unul din divizorii lui 9, adică 1, 3, 9. In acelaşi mod se arată că γ şi $(\gamma - 8\alpha)$ nu ar putea avea ca divizori comuni decât pe 1, 2, 4, 8. De aci conchidem că:

(7) $\qquad \gamma = \pm 2^r \,.\, 3^s \;\;,\;\; r \leqslant 3 \;\;,\;\; s \leqslant 2,$

căci altfel din (6) numai putem scoate pe a întreg.

Vom deosebi două cazuri, după cum $\gamma > 0$ sau $\gamma < 0$.

a) $\gamma > 0$. In (6) partea a doua trebue să fie pozitivă ca fiind egală cu a^2. Va trebui deci să avem:

(8) $\qquad \alpha > 0 \;\;,\;\; 9\alpha - \gamma > 0 \;\;,\;\; \gamma - 8\alpha > 0,$

(9) $\qquad \therefore \;\; (\gamma/9) > \alpha < (\gamma/8).$

Nu putem lua neegalităţile la limită ca egalităţi, căci atunci ese $a = 0$ şi dăm peste soluţia banală:

(10) $\qquad x \,.\, x \,.\, x \,.\, x = (x^2)^2.$

De altfel, $\alpha = 0$ introdus în a doua din condițiunile (8) ne duce la $\gamma < 0$, în contradicție cu ipoteza făcută. Deci α este cel puțin 1. Atunci a treia din neegalitățile (3) ne duce la $\gamma > 8$, iar a doua la $\gamma < 9$. Nu se poate dar să avem $\alpha = 1$.

Pentru ca să avem $\alpha > 1$, condiția (9) ne arată că γ trebue să depășească pe 8. In acest caz relația (7) ne arată că γ nu ar putea fi decât 18, 24, 36, 72. Limitele date de (9) sunt în aceste cazuri:

$$2 < \alpha < 2{,}25 \; ; \; 2{,}66\ldots < \alpha < 3 \; ; \; 4 < \alpha < 4{,}5 \; ; \; 8 < \alpha < 9.$$

Nici una din aceste serii de neegalitătăți nu poate fi satisfăcută de o valoare întreagă a lui α. Deci ipotezele făcute în (8) nu sunt admisibile.

Am mai putea presupune:

$$(11) \qquad \alpha > 0 \;\; , \;\; 9\alpha - \gamma < 0 \;\; , \;\; \gamma - 8\alpha < 0.$$

Dar această ipoteză nu se poate realiza, căci adunând ultimele două neegalități găsim $\alpha < 0$, în contradicție cu prima neegalitate.

Am mai putea lua:

$$(12) \qquad \alpha < 0 \;\; , \;\; 9\alpha - \gamma < 0 \;\; , \;\; \gamma - 8\alpha > 0.$$

Pentru $\alpha < 0$ a doua și a treia neegalitate sunt îndeplinite totdeauna. Să punem:

$$(13) \qquad \alpha' = -\alpha \quad \text{cu} \quad \alpha' < 0.$$

In acest caz egalitatea (6) devine:

$$(14) \qquad a^2 = \alpha'(9\alpha' + \gamma)\,(\gamma + 8\alpha')/\gamma.$$

Inlocuind pe γ cu valoarea lui dată de (7) avem:

$$(15) \quad a^2 = \alpha'\,(3^{2-s}\alpha' + 2^r)\,(2^{3-r}\alpha' + 3^s) \quad (r \leqslant 3 \;\; , \;\; s \leqslant 2).$$

Numărul α' este coprim cu γ și deci este coprim cu 2 și 3, factori ai lui γ. Deci în (15) α' nu are factori comuni cu parantezele. Apoi parantezele sunt coprime între ele, căci după (13) orice factor comun al lui $(9\alpha' + \gamma)$ și $(\gamma + 8\alpha')$ ar divide și diferența acestora care este α', contrar cu cele spuse înainte. Conchidem dar că în (15) partea a doua nu ar fi un patrat perfect decât dacă fiecare din cei trei factori ai ei sunt patrate, adică:

$$(16) \qquad \alpha' = u^2 \;\; , \;\; 3^{2-s}\alpha' + 2^r = v^2 \;\; , \;\; 2^{3-r}\alpha' + 3^s = w^2,$$

$$(17) \quad \therefore \; \alpha' = u^2 \;\; , \;\; 3^{2-s}u^2 + 2^r = v^2 \;\; , \;\; 2^{3-r}u^2 + 3^s = w^2.$$

Aci se vor lua $r = 0 ; 1 ; 2 ; 3$ şi $s = 0 ; 1 ; 2$.

Pentru $r = 0$, $s = 0$; $r = 0$, $s = 2$; $r = 1$, $s = 0$; $r = 3$, $s = 0$ una din relaţiile (17) se reduce la două patrate diferind cu 1; pentru $r = 2$, $s = 0$; $r = 2$, $s = 2$ una din ele se reduce la două patrate diferind cu 4 şi pentru $r = 1$, $s = 2$ şi $r = 3$, $s = 2$ una din ele se reduce la două patrate diferind cu 9. Acestea însă nu sunt cu putinţă decât dacă patratul cel mic este 0, deci $u = 0$ de unde $\alpha' = \alpha = 0$. Dăm peste un caz deja studiat.

Cazurile $r = 1$, $s = 1$ şi $r = 3$, $s = 1$ nu sunt posibile căci un patrat (v^2) nu poate fi ($\mathfrak{M}3 + 2$). Cazul $r = 0$, $s = 1$ nu este posibil căci un patrat (w^2) nu poate fi ($\mathfrak{M}8 + 3$).

Când $r = 2$, $s = 1$ a doua relaţie de mai sus ne dă $w^2 = (2u^2 + 3)$. Aci u nu poate fi ($\mathfrak{M}3 \pm 1$) căci ar eşi $w^2 = \mathfrak{M}3 + 2$, ceea ce nu se poate. Deci $u = 3p$, $w = 3q$ şi relaţia devine $6p^2 + 1 = 3q^2$, relaţie imposibilă căci cere $1 = \mathfrak{M}3$.

Conchidem dar că în cazul $\gamma > 0$, $\alpha < 0$ nu există soluţie

b) $\gamma < 0$. Punem $\gamma = -\gamma'$ cu $\gamma' > 0$. Relaţia (6) devine:

$$a^2 = \alpha(9\alpha + \gamma')(8\alpha + \gamma')/\gamma', \tag{18}$$

Dacă $\alpha > 0$ relaţia aceasta este identică cu (14) care nu ne-a dat nici o soluţie.

Dacă $\alpha < 0$, punem $\alpha = -\alpha'$ cu $\alpha' > 0$ şi găsim:

$$a^2 = \alpha'(9\alpha' - \gamma')(\gamma' - 8\alpha')/\gamma', \tag{19}$$

care este relaţia (6) dela care nu am obţinut nici o soluţie.

Din acest studiu conchidem dar că sistemul I nu admite decât soluţia banală (10).

(Va urma) I. B. FLORESCU.

PREMIUL „INGINER AL. ROŞU“

Subsemnaţii, membri în Comisiunea pentru decernarea premiului «ING. AL. ROŞU», cercetând Volumul XLIV, al *Gazetei Matematice*, pentru alegerea celui mai harnic corespondent elev de liceu, am constatat în urma cercetărilor noastre că activitatea desfăşurată de D-l MIRCEA D. POPA elev clasa VII-a la Liceul militar, „General Makarovici“ din Iaşi, îl aşează pe acesta în rândul întâiu al corespondenţilor *Gazetei Matematice*, elevi de liceu.

D-l MIRCEA D. POPA, s'a desprins din lotul mare al rezolvitorilor de probleme atât prin numărul important de probleme rezolvate ce au apărut în cursul Volumului XLIV cât şi prin calitatea soluţiunilor ce a trimis, menţionăm în acest sens problemele 4203 şi 4875.

Pe copertele numerilor *Gazetei Matematice*, anul XLIV, D-l MIRCEA D. POPA figurează cu 54 probleme rezolvate.

Amintim că la Concursul *Gazetei Matematice* din anul XVLV, D-l MIRCEA D. POPA a fost menţionat pentru „cunoştinţe întinse la complemente de geometrie".

In consecinţă propunem ca premiul «ING. AL. ROŞU» să se acorde pentru anul XLIV D-lui MIRCEA D. POPA elev clasa VII-a la Liceul Militar din Iaşi.

COMISIUNEA
PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „ING. AL. ROŞU"
AL. ROŞU, ING. D. STOICA,
GH. DUMITRESCU, profesor.

Aprobat în şedinţa Adunării Generale dela 8 Februarie 1940.

NOTE MATEMATICE

29. *Probe matematice.* In afară de probele care se fac în scopul de a verifica unele operaţiuni aritmetice, algebrice, etc., cele două cuvinte puse în titlul acestei note au o întrebuinţare la operaţiuni de hotărnicii. In „*Regulamentul hotărniciilor*", adnotat de TH. ILIESCU, advocat, găsim în ediţia II-a la pag. 9:

„*In acţiunea de hotărnicie restituirea unui plus de teren se obţine prin ajutorul unei probe, aşa zise matematice, adică prin facerea dovezii că unul din fonduri nu are întinderea specificată în acte, pe când fondul vecin are o întindere mai mare*".

I. I.

30. *Asupra unei Note din Revista „Pitagora".* In Revista „*Pitagora*" din Martie 1940 s'a publicat o *Notă Matematică* de către D-l CEZAR COŞNIŢĂ sub No. 12, întitulată „*Asupra geodezicelor sferei*". Se demonstrează acolo, cu ajutorul matematicilor superioare,

servindu-se de ecuaţii diferenţiale, teorema că *drumul cel mai scurt dela un punct de pe suprafaţa unei sfere la alt punct al ei este arcul cel mai mic de cerc mare care uneşte cele două puncte.* Teorema aceasta este susceptibilă de o demonstraţie cu totul elementară, cum de exemplu este una dată în *Géométrie élémentaire* par A. M. LEGENDRE, Ediţia XV, pag. 204, Anul 1852.

In această *Notă matematică* autorul a pus în josul paginei următoarea notiţă :

„Această notă trebuia să apară în «Gazeta Matematică» ; ea a fost predată în acest scop unui redactor al «Gazetei Matematice», încă de acum 6 ani. Deoarece ea nu a apărut până acum, o publicăm aci (C. C.).

Ca unul care iau parte neîntrerupt de 45 ani la publicarea *Gazetei Matematice* sunt în măsură să dau un răspuns la această notiţă.

a) Nimeni nu are vreun drept de publicare în *Gazeta Matematică* pentru ca să poată spune că un manuscris trimis pe orice cale *„trebuia să apară“.*

b) In *Gazeta Matematică* nu se publică cu plăcere demonstraţiuni prin matematicile superioare pentru chestiunile ce au fost sau se pot trata în mod elementar. Astfel chestiunea cu care s'a ocupat D-l CEZAR COŞNIŢĂ e în toate cărţile care se ocupă de geometria elementară a sferei. Asemenea note se păstrează să se publice când nu e materie.

c) Intârzieri în publicarea manuscriselor au fost, şi vor fi necontenit, la articole, la note matematice, la probleme propuse şi mai ales rezolvate, şi la recreaţiuni. *Gazeta Matematică* a început cu 16 pagini un Număr, şi acum are 56 pagini şi nu poate satisface cererile de publicare. O nouă sporire ar cere Societăţii *Gazeta Matematică* sacrificii mari băneşti, iar redactorilor un timp prea mare pentru tipărirea în bune condiţiuni. Apoi mărirea prea mare a unui număr ia revistei caracterul ei iniţial de: *„Foaie lunară de matematici elementare şi speciale pentru uzul şcoalelor secundare, speciale şi superioare“* cum a fost scris pe coperta revistei la începutul ei şi cum şi-a menţinut acel caracter de 45 ani de când apare.

d) Intârzieri de tipărire avem chiar şi la manuscrisele de matematici elementare. Astfel articolul D-lui I. B. FLORESCU, pe care am început să-l publicăm în numărul de faţă mi s'a trimis mie direct de mai bine de 7 ani. Imi propusesem să-l revăd puţin,

punând progresiunea sub o formă simetrică şi nu am avut timp să fac acest lucru până acum când, fiind pensionar, nu mai am multe ocupaţiuni ca înainte când ca profesor aveam până la 22 ore de lecţiuni săptămânal.

e) Gazeta Matematică nu este o Revistă în care să se publice repede memoriile şi lucrările matematicianilor spre a lua dată de timpul în care s'au produs. Ea a fost creată pentru alte scopuri şi anume de a prinde tineri în mrejele ştiinţelor matematice, tecnice şi militare. De aceea ea trebue să publice articole şi note elementare, scurte, interesante pentru ei, şi pe care să le priceapă cu cunoştinţele pe care le posedă sau le pot căpăta cu uşurinţă. *Publicaţiunile trebue făcute pentru actualitate, nu pentru posteritate.* De aceea articolele destinate elevilor de liceu se publică cu precădere înaintea celor ce se adresează studenţilor sau matematicianilor.

f) Mi se pare că Revista *„Pitagora"* a eşit din calea pe care şi-a trasat-o. Pe coperta ei se spune că este făcută *„pentru uzul şcoalelor secundare"*. Există în şcoalele noastre secundare vreun elev care să priceapă acea notă ? Apoi, primul articol cere cunoştinţa calculului vectorial, celelalte es din cadrul geometriei analitice liceene, iar notele 14 şi 15 cer cunoştinţe bune de homografie şi de calculul integral.

g) Nu am pretenţia să mă amestec în redactarea altor reviste de cât la *Gazeta Matematică*. Aci nu primesc să mi se spună ce *„trebuia"* să se publice căci *ştiu ce trebue să se publice!*

ION IONESCU.

31. *Numere interesante cu 10 cifre diferite* [1]). In continuarea notelor întrerupte la pag. 241, Vol. XLIV, dăm soluţiile pe care le-am găsit la ecuaţia

$$6 \times N_6 = N$$

unde N_6 conţine 9 cifre diferite în afară de cifra 6, iar N este un număr de 10 cifre diferite.

Cazul când N_6 începe cu 0, este numai formal de 9 cifre, el a fost dat în *Revista Matematică din Timişoara*, Vol. XVI, pag. 129 unde trebue făcute următoarele rectificări:

$6 \times 28\ 731\ 549$ se înlocueşte cu $6 \times 28\ 731\ 594$
Se elimină $6 \times 32\ 548\ 791$, care nu e soluţie.
Se adaugă $6 \times 031\ 578\ 942 = 0\ 189\ 473\ 652$.

1) Urmare la Nota dela pag. 241, Vol. XLIV, *Gazeta Matematică*.

Pentru N_6 începând cu 1 am găsit următoarele 87 soluții:

N_6	N	N_6	N
102 459 873	0 614 759 238	154 027 893	0 924 167 358
102 495 873	0 614 975 238	154 278 903	0 925 673 418
103 245 897	0 619 475 382	154 302 789	0 925 816 734
103 254 789	0 619 528 734	157 028 943	0 942 173 658
103 289 754	0 619 738 524	157 894 203	0 947 365 218
104 298 573	0 625 791 438	157 894 302	0 947 365 812
104 732 859	0 628 397 154	158 729 403	0 952 376 418
104 753 289	0 628 519 734	158 730 294	0 952 381 764
104 857 293	0 629 143 758	158 794 023	0 952 764 138
104 857 923	0 629 147 538	159 402 873	0 956 417 238
104 928 573	0 629 571 438	170 582 943	1 023 497 658
105 248 793	0 631 492 758	170 945 823	1 025 674 938
105 287 493	0 631 724 958	172 094 583	1 032 567 498
105 298 743	0 631 792 458	172 830 459	1 036 982 754
107 285 493	0 643 712 958	172 830 954	1 036 985 724
107 298 543	0 643 791 258	173 094 582	1 038 567 492
107 854 923	0 647 129 538	173 209 458	1 039 256 748
107 985 427	0 647 912 538	173 280 459	1 039 682 754
108 547 329	0 651 283 974	173 280 954	1 039 685 724
108 724 953	0 652 349 718	178 054 329	1 068 325 974
108 749 523	0 652 497 138	178 230 459	1 069 382 754
108 953 247	0 653 719 482	178 230 954	1 069 385 724
108 974 532	0 653 847 192	178 290 543	1 069 743 258
109 524 873	0 657 149 238	178 293 054	1 069 758 324
109 732 854	0 658 397 124	178 305 429	1 069 832 574
109 872 453	0 659 234 718	179 054 283	1 074 325 698
109 874 523	0 659 247 138	179 054 328	1 074 325 968
120 948 573	0 725 691 438	179 283 054	1 075 698 324
123 094 857	0 738 569 142	179 328 054	1 075 968 324
127 304 859	0 763 829 154	179 430 582	1 076 583 492
127 308 549	0 763 851 294	179 432 058	1 076 592 348
127 309 854	0 763 859 124	180 543 279	1 083 259 674
127 530 489	0 765 182 934	180 945 732	1 085 674 392
130 275 489	0 781 652 934	182 057 943	1 092 347 658
130 948 572	0 785 691 432	182 094 573	1 092 567 438
140 895 327	0 845 371 962	182 309 457	1 093 856 742
145 327 089	0 871 962 534	182 730 459	1 096 382 754
145 890 327	0 875 341 962	182 730 954	1 096 385 724
152 078 943	0 912 473 658	182 790 543	1 096 743 258
152 308 794	0 913 852 764	182 793 054	1 096 758 324
152 789 043	0 916 734 258	182 943 057	1 097 658 342
152 789 304	0 916 735 824	183 054 279	1 098 325 674
152 873 094	0 917 238 564	183 057 942	1 098 347 652
153 042 789	0 918 256 734		

G-L GH. BUICLIU.

32. *Asupra problemei 1876.* In această problemă se cerea un polinom de gradul al treilea, $P(x)$, astfel încât

$$P\left(\frac{7x^2 - 9x - 4}{6}\right)$$

să fie divizibil prin $P(x)$.

Iată un nou mod de rezolvare al problemei. Conform enunțului, avem în general

$$(1) \qquad P(ax^2 + 6x + c) = P(x)\ Q(x),$$

unde $Q(x)$ este de asemeni un polinom de gradul al treilea. Egalitatea (1) arată că la o rădăcină x_1 a ecuației $P(x) = 0$ corespunde o alta, x_2, dată de

$$(2) \qquad x_2 = ax_1^2 + 6x_1 + c = \varphi(x_1).$$

Rezultă deci că rădăcinile ecuației $P(x) = 0$ sunt legate prin relația (2) și cum sunt numai trei, ciclul lor este închis, adică avem

$$(3) \quad x_2 = \varphi(x_1)\ ,\ x_3 = \varphi(x_2) = \varphi_2(x_1)\ ,\ x_1 = \varphi(x_3) = \varphi_3(x_1),$$

unde $\varphi_k = \varphi(\varphi_{k-1})$. Avem aceeași proprietate pentru rădăcinile ecuației $Q(x) = 0$.

Rădăcinile ecuației se găsesc deci printre ale ecuației

$$(4) \qquad \varphi_3(x) = x,$$

care este o ecuație de gradul al optulea. Observăm că această ecuație este verificată în primul rând de rădăcinile ecuației

$$(5) \qquad \varphi(x) = ax^2 + bx + c = x.$$

Fie λ și μ aceste rădăcini.

Dacă $P(x) = 0$ admite una din aceste rădăcini $x_1 = \lambda$, se pot întâmpla două cazuri.

a) $P(x) = 0$ mai admite încă una; în acest caz, relațiile (3) arată că și a treia rădăcină este λ sau μ, deci $P(x)$ este de una din formele

$$P(x) = (x - \lambda)^3 \qquad ,\ P(x) = (x - \mu)^3,$$

$$P(x) = (x - \lambda)^2 (x - \mu) \ ,\ P(x) = (x - \lambda)(x - \mu)^2.$$

b) $P(x) = 0$ are o singură radăcină comună cu (5); în acest caz, după (3), avem

$$x_2 = \varphi(x_3) \quad , \quad x_3 = \varphi(x_2),$$

din care deducem, deoarece $x_2 \neq x_3$,

$$a(x_2 + x_3) + b + 1 = 0,$$

aşa că (5) trebue să aibă rădăcini raţionale.

Observăm că nici unul din cazurile de mai sus nu corespunde datelor problemei 1876. Dacă se ia însă $b = 9$, în loc de $b = -9$, suntem în cazul *b*.

Presupunem că $P(x) = 0$ n'are nici o rădăcină comună cu (5); împărţind ecuaţia (4) cu $\varphi(x) - x$, se obţine o ecuaţie de gradul al şaselea

$$\psi(x) = 0, \tag{6}$$

ale cărei rădăcini se împart în două grupe ce satisfac separat relaţiilor (3), grupul rădăcinilor ecuaţiei $P(x) = 0$ şi acela al rădăcinilor ecuaţiei $Q(x) = 0$.

Pentru rezolvarea problemei 1876, generalizată, nu este nevoe să rezolvăm ecuaţia (6): este destul să determinăm coeficienţii ecuaţiei $P(x) = 0$, adică să calculăm expresiunile

$$u = x_1 + x_2 + x_3 \quad , \quad v = \Sigma x_1 x_2 \quad , \quad w = x_1 x_2 x_3,$$

cărora să le punem condiţia de a fi raţionale.

Ori, u se obţine eliminând pe x între ecuaţiile (6) şi

$$u = x + \varphi(x) + \varphi_2(x);$$

procedând cum am arătat la problema 5058, se găseşte o ecuaţie de gradul al doilea în u, care are rădăcinile raţionale dacă realizantul ei este patrat perfect.

Odată determinat u, putem calcula uşor pe v şi w. In adevăr, din (3), care se pot scrie explicit

$$\begin{aligned} x_2 &= ax_1^2 + bx_1 + c, \\ x_3 &= ax_2^2 + bx_2 + c, \\ x_1 &= ax_3^2 + bx_3 + c, \end{aligned} \tag{7}$$

deducem prin adunare

$$u = a\Sigma x_i^2 + bu + 3c;$$

însă

$$\Sigma x_i^2 = u^2 - 2v,$$

deci

$$2av = au^2 + (b-1)u + 3c,$$

din care se deduce că v este raţional odată cu u, a, b, c.

Deasemeni, deducem din (7), înmulţite respectiv cu x_1, x_2, x_3 şi adunate,

$$v = a\Sigma x_i^3 + b\Sigma x_i^2 + 3cu.$$

Insă

$$\Sigma x_i^3 = u^3 - 3uv + 3w \quad , \quad \Sigma x_i^2 = u^2 - 2v,$$

deci şi w se exprimă raţional odată cu u, a, b, c.

Ecuaţia (6) este ceea ce se cheamă o ecuaţie *abeliană*, în care o rădăcină se exprimă raţional în funcţie de o alta. Un caz particular al acestei ecuaţiuni am întâlnit cu ocazia rezolvării problemelor 3503, 4645, ce propusesem tocmai în vederea uşurării rezolvărei problemei 1876 dar, spre regretul nostru, nimeni nu a ştiut să profite de aceste indicaţiuni.

Aşteptăm acum dela corespondenţi efectuarea calculelor indicate, începând dela ecuaţia (6).

Un alt mod de a începe rezolvarea acestei probleme, care duce de altfel tot la cele de mai sus şi face mai bine legătura cu problema 3503 este acela de a lua

$$P(x) = A(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

şi a pune condiţia ca

$$P[\varphi(x)] = A[\varphi(x)-\alpha][\varphi(x)-\beta][\varphi(x)-\gamma]$$

să fie divizibil prin $P(x)$.

M. GHERMĂNESCU.

BIBLIOGRAFIE

GH. EM. FILIPESCU. *Statica grafică şi Rezistenţa materialelor.* Ediţia II-a, tipărită prin îngrijirea D-lor Ingineri D. A. STAN şi I. C. DUMITRESCU, cu o prefaţă de Inginer Inspector General, ION IONESCU. Bucureşti. Tipografia „Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului. Imprimeria Naţională". Bucureşti 1940. Preţul 1200 lei.

Intr'un volum de 793 pagini, formatul 18×11 cm, elegant tipărit şi cartonat, doi dintre foştii asistenţi ai regretatului Profesor GH. EM. FILIPESCU dela Şcoala Politecnică din Bucureşti au reeditat cursul pe care acesta l-a tipărit în anul 1935 şi care se epuizase pe la începutul lui 1938. Desfacerea a 1000 de exemplare a primei ediţii a fost un succes pentru o carte tecnică de specialitate. Inginerii şi elevii-ingineri au găsit într'însa, tratate după metodele cele mai noi şi cu exemplele numerice practice necesare, toate chestiunile care se pun în dimensionarea construcţiunilor.

Capitolele tratate în această carte sunt următoarele: I. Generalităţi. II. Compunerea şi descompunerea forţelor. III. Curbe funiculare. IV. Calculul momentelor statice şi de inerţie ale suprafeţelor. V. Grinzi drepte. VI. Grinzi cu zăbrele plane. VII. Grinzi curbe sau arce. VIII. Grinzi cu zăbrele în spaţiu. IX. Rezistenţe. X. Impingerea pământului. XI. Deformaţii. XII. Legătura între Rezistenţe şi Deformaţii pentru solicitări într'o singură direcţiune. XIII. Legătura între Rezistenţe şi Deformaţii pentru solicitări în mai multe sensuri. XIV. Ipoteze asupra ruperii materialelor. XV. Aplicarea practică a ecuaţiei de echilibru elastic. XVI. Determinarea rezistenţelor în grinzile supuse la forţe axiale. XVII. Determinarea rezistenţelor la grinzile supuse la momente încovoietoare. XVIII. Determinarea rezistenţelor la grinzile supuse la forţe tăietoare. XIX. Determinarea rezistenţelor la grinzile supuse la momente de răsucire. XX. Rezistenţe compuse. XXI. Determinarea rezistenţelor când ele depăşesc limita de proporţionalitate. XXII. Grinzi drepte static determinate. XXIII. Grinzi curbe sau arce. XXIV. Imbinări. XXV. Stabilitatea construcţiilor. XXVI. Lucru mecanic. XXVII. Construcţiuni făcute din bare. XXVIII. Linii de influenţă la sistemele static determinate. XXIX. Eforturi dinamice. XXX. Plăci. XXXI. Plăci subţiri. XXXII. Plăci plane subţiri. XXXIII. Plăci plane groase. XXXIV. Blocuri.

Cartea a fost premiată de Academia Română. Profesorii străini de Rezistenţa materialelor şi Teoria elasticităţii, cărora G. EM. FILIPESCU le-a trimis cartea sa, i-au răspuns cu laude bine meritate, dintre care am reprodus mai multe în „Prefaţa", care i-am scris-o cărţii sale după dorinţa exprimată de D-nii asistenţi cari au editat a doua ediţie.

Cartea se vinde numai la *Gazeta Matematică*, Bucureşti, Calea Griviţei Nr. 158 pe costul de 1200 lei plus cheltuelile de transport afară din Bucureşti. Ea nu se vinde la Librării de oarece dorinţa editorilor a fost ca după scoaterea cheltuelilor de tipărire, să se dea dreptul familiei, iar restul să constitue un fond din care să se dea o bursă lunară unui elev-inginer dela Şcoala Politecnică, unde a fost profesor GH. EM. FILIPESCU.

Fapta D-lor Ingineri D. A. STAN şi I. C. DUMITRESCU, de a reedita pe contul lor cartea, de a face gratuit toată munca ce a cerut tipărirea şi de a-şi lua rizicul unei pierderi, merită toată lauda.

Închei această recenzie cu aceleaşi cuvinte cu care am încheiat „Prefaţa" pe care am scris-o acestei noi ediţii:

„Cartea este bună pentru învăţământ, folositoare pentru ingineri şi deschizătoare de drumuri noi în ştiinţă".

I. IONESCU

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tom. CXXVIII. Fascicola VI. Decemvrie 1939. Buenos-Aires. Asupra cuadraturii cercului de PABLO MONTEL.

Buletinul Institutului Român pentru Betoane, Construcţii şi Drumuri. Anul IV. Nr. 7—12 Iulie-Decemvrie 1939. Bucureşti.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 46. Nr. 2. Februarie 1940. Menasha, Wis., New-York.

Cuvântul Şcoalei. Organ al cercului didactic al profesorilor secundari de Stat din ţinutul Nistru. Director: I. I. MACOVEI. Apare trimestrial. Anul I. Nr. 1. Ianuarie-Martie 1940. Chişinău.

Deutsche Mathematik. Anul IV. Nr. 3. Iunie 1939. Leipzig.

Idem. Anul IV. Nr. 4. August 1939. Leipzig.

Journal de Mathématique Élémentaire, publicat de H. VUIBERT. Anul 64. Nr. 11. 1 Martie 1940. Paris.

Idem. Anul 64. Nr. 12. 15 Martie 1940. Paris.

Pitagora. Anul V. Nr. 6. 10 Martie 1940. Bucureşti. Relaţiuni într'un patrulater de AD. GHEORGHIU. Criterii elementare pentru recunoaşterea naturii conicelor de V. GHIŢESCU. O corespondenţă a punctelor curbei $y = a_0 x^3 + a_1 x^2 + b_2 x + a_3$ de MARG. CARACUDOVICI.

Suplimentul Gazetei Matematice. Anul VI. Nr. 7. 1 Aprilie 1940. Bucureşti. Exerciţii rezolvate. Soluţii primite. Exerciţii propuse.

Ştiinţă şi Progres. Revista ştiinţifică a liceelor militare. Anul VI. Nr. 2. Martie 1940. Tg.-Mureş. Mecanica ondulatoare şi aplicaţiile ei de VALER NOVAC. Probleme propuse.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XX. Nr. 1. Martie 1940. Teoreme de geometrie consecinţe ale aplicaţiunilor trigonometrice patratice de O. N. ŢINO. Funcţiuni pseudo-hiperbolice de EUGEN VIŞA.

TH. ANGHELUTZĂ. Sur une propriété des polynomes (Extras).

O. BORŮVKA. Studies on multiplicative systems. Part. I. (Extras). 1937.

O. BORŮVKA. Studies on multiplicative systems. Part. II. (Extras). 1938. Brno.

G. G. CONSTANTINESCU. Criterii de convergenţa seriilor. Monografiile revistei Pitagora. 1939. Bucureşti.

V. CUPR. Lokalni clanky na kovových elektrodach (Extras). 1938. Brno.

WOLFGANG DOEBLIN. Le cas discontinu des probabilités en chaîne. Brno. 1937.

A. GONZÁLES DOMINGUEZ. Sobre les series de funciones de HERMITE. 1938. Buenos Aires.

A. GONZÁLES DOMINGUEZ. Una nueva demonstracion del teorema limite del Calculo de Probabilidades. Condiciones necesarias y suficientes para que una función sea una Integral de LAPLACE. 1938. Buenos-Aires.

N. GAVRILAN. Curs sistematic şi metodic de aritmetică practică pentru repetarea materiei după programele liceelor şi gimnaziilor de tot felul, şcoalelor normale, precum şi seminariilor. Chişinău. 1940.

GINO LORIA. Le Matematiche in Ispagna e in Argentina. Buenos-Aires. 1940.

B. HOSTINSKY. Cauchyuv Problem pro differenciálni rovnice lineáarni. Brno. 1936.

B. HOSTINSKY. Sur une équation fonctionnelle de la théorie des probabilités. Brno. 1938.

NIKOLA OBRECHKOFF. Sur la sommation absolue par la transformation d'EULER des séries divergentes. Buenos-Aires. 1939.

N. MIHĂILEANU. Raportul Armonic. Monografia Nr. 5. Biblioteca Revistei Pitagora. Bucureşti. 1940.

MICHEL PETROVICH. Remarques arithmetiques sur une équation différentielle du premier ordre. Buenos-Aires. 1938.

BEDRICH POSPISIL. On bicompact spaces. Brno. 1939.

LADISLAV SEIFERT. Contributions à la théorie polaire d'une variété cubique l'espace à quatre dimensions. I. II.

E. VIŞA. Coordonate hyperbolice (Extras) 1940.

CERERI

291. In Programele cunoştinţelor cerute la examenul de *Inginer-Hotarnic*, ataşat *Regulamentului din 1868 pentru facerea şi executarea hotărniciilor*, la ceea ce se zice în topografie *Scara compusă* i se zice *Scara cu talon*. Este evident că nici una, nici alta din aceste numiri nu este bună. Se mai cunosc alte denumiri ale acestor scări ?

I. IONESCU.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

J. RICHARD. Leçons sur les méthodes de la géométrie moderne. Paris. 1908. Donată de D-l ION IONESCU, Inginer.

C. ALASIA. Producto di una serie qualquiera par la exponencial e^{-x}. Donată de D-l ION IONESCU, Inginer.

R. HAUSSNER. Darstellende Geometrie I (Göschen), Berlin, 1920.

R. FORTRAIT. Introduction a l'étude de la Physique Théorique (Fascicola II). Les Vibrations. Paris, 1927.

Y. ROCARD. L'hydrodinamique et la théorie cinetique des gaz. Paris, 1932.

M. RÖTTINGER. Die termodynamischen Grundlagen der Wärmekraft und Kältemaschinen (Göschen). Berlin, 1916.

Donate de D-l T. VESCAN, Profesor.

K. KLEKLER. Die Methoden der Darstellender Geometrie. Leipzig, 1877.

V. SCHLEGEL. System der Raumlehre, I & II Theile. Leipzig, 1872.

Donate de D-l GENERAL C. FELIX.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITEHNICĂ « REGELE CAROL II » DIN BUCUREŞTI

Examenul de Geometrie Analitică

ANUL I

Seziunea Iunie 1939

A. Construcţii

1°. M (x, y) este un punct curent al curbei plane (C), iar A (a, o) un punct fix din planul ei. Prin origina sistemului de referinţă se duce perpendiculara pe tangenta în M la (C). Aceasta taie dreapta MA în punctul S. Se cere:

α) Să se determine curbele (C) astfel ca punctul S să se găsească întotdeauna pe dreapta:

$$x - ka = 0.$$

β) Să se discute natura curbelor (C) în raport cu variaţia lui k.

2°. Se consideră curba de ecuații:

$$x = t - t^2 \quad , \quad y = 2t \quad , \quad z = t^2$$

și se cere să se scrie ecuația planului normal într'un punct oarecare al curbei.

Să se arate că acest plan este mereu paralel cu o direcție fixă.

B. Electromecanică, Aviație și Armament

1°. Tangenta în punctul M (x, y) al unei curbe plane (C) taie axa Oy în T, iar D este piciorul perpendicularei din M pe Ox.

Se cere:

α) Să se determine curbele (C) astfel ca dublul ariei triunghiului OMT să fie cât aria patratului construit pe MD ca latură.

β) Să se construiască una din curbele găsite determinându-i-se asimptota, punctele maxime, minime, etc.

2°. Se consideră curba de ecuații:

$$x = t - t^2 \; ; \quad y = 2t \; ; \quad z = t^2$$

și se cere să se figureze proiecția ei pe planul xoy.

C. Mine și Metalurgie

1°. Se consideră punctele A (a, o) și B (o, a) și parabola tangentă în aceste puncte la axele rectangulare Ox și Oy. Tangenta într'un punct M (x, y) al parabolei taie axa Ox în T, iar perpendiculara din M pe Ox taie bisectoarea II-a a axelor, în M'. Se cere:

α) Să se scrie ecuația parabolei;

β) Să se arate că segmentul MM' este văzut din T sub un unghiu drept oricare ar fi M.

2°. Se consideră curba:

$$x = t - t^2 \; ; \quad y = 2t \; ; \quad z = t^2$$

să se scrie ecuația planului osculator într'un punct oarecare al curbei.

Seziunea Septemvrie 1939

A. Construcții

1°. Să se figureze curba (C) de ecuație:

$$y = x \log \frac{a}{x} \qquad (a > 0, \text{ log nep.})$$

raportată la sistemul rectangular xOy.

Tangenta în $M(x, y)$ la curba (C) taie axele Ox şi Oy respectiv în U şi V; normala în M taie axa Oy în R, proiecţia lui M pe Oy este punctul S; se notează cu M', simetricul lui M faţă de bisectoarea unghiului xOy şi cu N. punctul de întâlnire al bisectoarei cu perpendiculara din M pe Ox.

Să se arate că, oricare ar fi punctul M de pe curba (C):

Triunghiurile UOV şi MRS au aceeaşi arie, iar punctele V, N şi M' sunt colineare.

2°. Schimbarea cea mai generală a sistemului de referinţă în plan.

B. Electromecanică, Aviaţie şi Armament

1°. In raport cu sistemul rectangular xOy, se consideră curba de ecuaţie:

$$y^2 = x^2 \log \frac{a^2}{x^2} \qquad (a > 0, \log \text{ nep.})$$

să se reprezinte.

M (x, y) fiind un punct oarecare al curbei, MT tangenta în M mărginită la Ox, MN normala în M mărginită la Oy, iar A proiecţia punctului M pe Oy, să se verifice că:

$$\text{aria } OMT = \text{aria } AMN.$$

1°. Prin focarul unei parabole se duce o coardă AB. Să se arate că normalele în A şi B sunt perpendiculare între ele.

C. Mine şi Metalurgie

1°. Să se figureze curba (C) de ecuaţie:

$$y = x^3 - 3x + 2$$

raportată la sistemul rectangular xOy.

Pe axa Ox se iau punctele A şi A', astfel ca:

$$2\overline{OA} + \overline{OA'} = 0$$

paralele duse din A şi A' la Oy, întâlnesc curba în M şi M'. Să se verifice că oricari ar fi punctele A şi A', legate prin relaţia dată, dreapta M'M este tangentă în M la curba (C).

2°. Axele fiind rectangulare şi fiind dată elipsa:

$$3x^2 + y^2 = 3$$

să se scrie ecuaţiile celor două tangente paralele cu prima bisectoare.

(Chestiunile obligatorii. Timpul: 3 ore).

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1399. *Fie* P_1 *punctul în care paralela la* Ox *dusă prin* $M_1(x_1, y_1)$ *de pe curba:*

$$y = \lambda x + Ax^{\alpha} \qquad (\lambda = \pm 1,\ \alpha > 1) \tag{1}$$

şi raportată la două axe rectangulare, întâlneşte dreapta

$$y = x$$

şi fie $M_2(x_2, y_2)$ *intersecţia perpendicularei lăsată din* P_1 *pe* Ox, *cu curba* (1). *In general vom deduce pe* $M_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$ *de pe curba* (1) *din* $M_i(x_i, y_i)$ $(i = 2, 3, \ldots)$, *în acelaşi mod în care am dedus pe* M_2 *din* M_1. *Se cere să se studieze natura seriei*

$$x_1^k + x_2^k + \ldots \qquad (k > 0).$$

V. VÂLCOVICI.

Se înţelege că α putând fi orice număr şi operaţiile de generare a mărimilor x_i trebuind să fie reale, va trebui să luăm $x > 0$. (Dealtfel, rarele cazuri când s'ar putea considera x negativ s'ar reduce imediat la cazul $x > 0$).

Cazul I. $\lambda = +1$, $A = -a$, $a > 0$. Vom avea aşa dar,

$$y = x - ax^{\alpha}. \tag{2}$$

Primele două derivate ale lui y în raport cu x:

$$y' = 1 - \alpha a x^{\alpha-1}\ ,\quad y'' = -\alpha(\alpha - 1)\, a x^{\alpha-2} \tag{3}$$

ne spun că curba e tangentă în origină la dreapta $y = x$ $(y' = 1)$ şi că convexitatea ei este tot timpul dirijată în sus $(y'' < 0)$ rămânând sub tangentă. Punctul P de pe curbă având tangenta paralelă la Ox ne este dat de abscisa care anulează derivata y':

$$x = \frac{1}{(\alpha a)^{\frac{1}{\alpha-1}}}. \tag{4}$$

Vom numi ascendentă ramura OP a curbei (O originea axelor de coordonate), iar restul curbei, ramura descendentă.

Se vede că o paralelă la Oy nu poate întâlni curba decât într'un singur punct. Din această cauză, chiar dacă primul punct M_1 se află pe ramura descendentă, celelalte puncte M_i $(i > 1)$ se află pe ramura ascendentă. Pentru a simplifica, vom elimina primul

termen din seria propusă, dacă M_1 se află pe ramura descendentă, cu alte cuvinte, vom presupune că M_1 se află pe ramura ascendentă.

Operaţia din enunţ ne dă

$$y_{i-1} = x_i \qquad (i = 2, 3, \ldots) \tag{5}$$

aşa încât vom avea:

$$y_i = y_{i-1} - a y_{i-1}^{\alpha}. \tag{5'}$$

Se vede din această relaţie că y_n descreşte când n creşte (rămânând bineînţeles pozitiv).

Rezultă că y_n are o limită b

$$\lim_{n=\infty} y_n = b \geqq 0.$$

Evident, b este inferior oricărui y_i:

$$b < y_i \quad (i \text{ întreg pozitiv}). \tag{6}$$

Vom arăta că b nu poate fi mai mare ca zero. In adevăr, să presupunem că b ar fi pozitiv. Cum însă y_n poate fi foarte aproape de b dacă n este deajuns de mare, vom putea presupune că avem:

$$y_n - b < ab^{\alpha}. \tag{7}$$

Făcând în (5') $i = n + 1$ obţinem:

$$y_{n+1} - b = y_n - b - a y_n^{\alpha}$$

sau ţinând seama de (7):

$$y_{n+1} - b < ab^{\alpha} - a y_n^{\alpha}.$$

Cum membrul al doilea al acestei inegalităţi este negativ, b fiind inferior lui y_n, rezultă

$$y_{n+1} < b$$

ceea ce-i în contradicţie cu (6).

Aşa dar, y_n descreşte tinzând către zero, când n creşte tinzând către infinit.

Să scriem relaţia (2) succesiv pentru punctele $M_i(x_i, y_i)$ $i = 1, 2, \ldots, n$ $(y_0 = x_1)$.

$$\left\{\begin{aligned} y_1 &= x_1 - a x_1^{\alpha} \\ y_2 &= x_2 - a x_2^{\alpha} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= x_n - a x_n^{\alpha}. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Adunându-le membru cu membru şi ţinând seama de relaţia (5) obţinem:

$$y_n - x_1 = -a\left(x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_n^\alpha\right)$$

sau

$$x_1 - y_n = a\sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha. \tag{9}$$

Cum primul membru al relaţiei (9) este finit, rezultă că suma $\sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha$ este convergentă fiind egală cu

$$\frac{x_1}{a}.$$

Reluând acum relaţiile (8), să facem produsul lor membru cu membru. Obţinem astfel:

$$y_n = x_1 \prod_{i=1}^{n} \left(1 - a x_i^{\alpha-1}\right).$$

Pentru valori foarte mari ale lui n, y_n este foarte aproape de zero, deci produsul din membrul al doilea tinde către zero. Se ştie că în acest caz suma $a\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1}$ creşte peste orice limită când n tinde la infinit.

In rezumat deci, suma

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^k$$

este finită pentru $k \geqq \alpha$ şi devine infinită pentru $k \leqq \alpha - 1$ întru cât, pentru i destul de mare, fiece termen x_i^k este inferior lui x_i^α pentru $k > \alpha$ şi superior lui $x_i^{\alpha-1}$ pentru $k < \alpha$.

Procedeul întrebuinţat nu ne spune ce se întâmplă pentru k cuprins între $\alpha - 1$ şi α.

Cazul II. $\lambda = +1$, $A = +a$, $a > 0$. Curba corespunzătoare

$$y = x + ax^\alpha$$

se află toată $(x > 0)$ deasupra tangentei $y = x$ din origine. Ordonatele y_i cresc odată cu i fără limită. Rezultă că $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^k$ tinde la infinit pentru $k \geqq 0$.

Cazurile III şi IV. $\lambda = -1$, $A = \pm a$, $a > 0$ se reduc respectiv la cazurile precedente schimbând pe y în $-y$.

Notă. O soluţie parţială a fost dată de regretatul N. G. BOTEA, când era student. V. V.

PROBLEMA 2959. *Să se arate că ecuaţia:*

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - S & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 - S & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 - S \end{vmatrix} = 0$$

în care $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ *sunt cosinusurile directoare, în raport cu sistemul ortogonal* Oxyz *a trei axe ortogonale* Ox', Oy', Oz', *are rădăcina* $S = +1$; *iar în cazul* $\alpha_1+\beta_2+\gamma_3 = +1$ *are rădăcina* $S = +1$ *dublă.*

I. VASILESCU.

Soluţie dată de D-l MARIUS MARGULIUS (Bucureşti).

Desvoltând determinantul, obţinem:

$$-S^3 + (\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) S^2 + (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 + \beta_3\gamma_2 - \beta_2\gamma_3 + \gamma_1\alpha_3 - \alpha_1\gamma_3) S$$
$$+ \alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_2\gamma_2 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 = 0.$$

Sau, dacă însemnăm pentru prescurtare cu δ determinantul:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

putem scrie:

$$S^3 - (\alpha_1+\beta_2+\gamma_3) S^2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2 + \alpha_1\gamma_3 - \alpha_3\gamma_1) S - \delta = 0$$

δ fiind modulul unei substituţii ortogonale, avem $\delta = \pm 1$.

Vom distinge 2 cazuri:

1°. $\delta = +1$. Se ştie că în acest caz avem:

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = \gamma_3 \quad , \quad \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2 = \alpha_1 \quad , \quad \alpha_1\gamma_3 - \alpha_3\gamma_1 = \beta_2.$$

(Précis de géom. analyt. par. G. PAPELIER ch. III. Les formules D'EULER).

Ecuaţia noastră devine:

$$S^3 - (\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) S^2 + (\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) S - 1 = 0$$

sau

$$(S - 1)[S^2 + (1 - \alpha_1 - \beta_2 - \gamma_3) S + 1] = 0.$$

Se vede că ecuaţia admite rădăcina $S = +1$ şi pentru $\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 = +1$ mai admite $S = +i$ şi $S = -i$.

2°. $\delta = -1$. In cazul acesta avem:

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = -\gamma_3 \; ; \; \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2 = -\alpha_1 \; ; \; \alpha_1\gamma_3 - \alpha_3\gamma_1 = -\beta_2.$$

(Vezi loc. cit.).

Ecuaţia se poate scrie:

$$S^3 - (\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3)\, S^2 - (\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3)\, S + 1 = 0$$

sau

$$(S + 1)\,[S^2 - S\,(1 + \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) + 1] = 0.$$

Ecuaţia are în acest caz rădăcina $S = -1$; iar pentru $\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 = 1$ ea devine $(S + 1)\,(S - 1)^2 = 0$ şi avem $S = +1$ rădăcină dublă.

PROBLEMA 3765. *Fiind dat un triunghiu de laturi* a, b, c, *să se ducă o transversală astfel încât segmentele interceptate de laturi să fie egale cu rădăcinile ecuaţiei:*

$$ax^2 - bx + c = 0.$$

(Enunţ rectificat). CĂPITAN I. LINTEŞ.

Observaţiuni preliminare. 1°. In această problemă ori unde este vorba de un segment trebue înţeles „numărul abstract" ce reprezintă măsura segmentului, adică nu trebue să ne gândim la dimensiuni, fiindcă atunci ecuaţia din enunţ nu este *omogenă*. In adevăr dacă am socoti pe *a*, *b*, *c*, *x* ca lungimi, atunci primul termen ar reprezenta un volum, al doilea o arie şi al treilea o lungime şi acestea nu se pot aduna între ele.

2°. Rectificarea enunţului s'a făcut aşa fel ca suma rădăcinilor să dea un *număr* pozitiv.

3°. Problema nu este posibilă pentru orice triunghiu. *Numerele pozitive a, b, c* vor trebui să îndeplinească două condiţiuni: *a)* de a reprezenta lungimile laturilor unui triunghiu şi *b)* de a da pentru ecuaţia din enunţ rădăcini reale. Deci:

$$b < c + a \quad \text{şi} \quad b^2 - 4ac > 0$$

sau sub formă de inegalitate dublă:

$$(1)\quad c+a>b>2\sqrt{ac}\quad\therefore\quad (1')\quad \frac{c+a}{2}>\frac{b}{2}>\sqrt{ac}.$$

Forma (1') arată că triunghiurile care pot da soluții pentru problemă *au jumătatea unei laturi cuprinsă între media aritmetică și media geometrică a celorlalte două.*

4°. Să presupunem triunghiul ABC tăiat de transversala MNP. Problema nu precizează cine sunt rădăcinile ecuației din enunț și din această cauză avem de studiat următoarele șase cazuri:

$$x_1=\overline{MN},\ x_2=\begin{cases}\overline{NP}\\ \overline{MN}\end{cases};\quad x_1=\overline{MP},\ x_2=\begin{cases}\overline{NP}\\ \overline{MN}\end{cases};\quad x_1=\overline{NP},\ x_2=\begin{cases}\overline{MN}\\ \overline{MP}\end{cases}.$$

Vom da ca model de studiu cazul

$$x_1=\overline{MN}\quad,\quad x_2=\overline{NP},$$

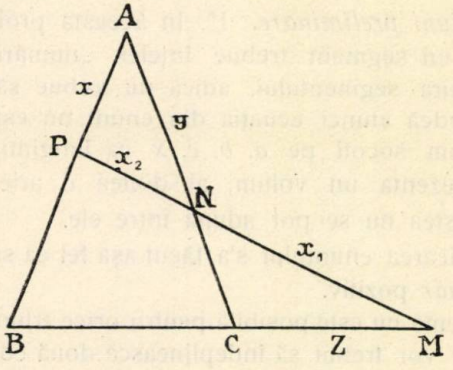
studiul celorlalte cazuri fiind analog.

Soluția. Transversala ne dă pe laturile triunghiului șase segmente din care vom alege trei ca necunoscute, iar celelalte rezultă. Notăm:

$$(2)\qquad \overline{AP}=x\quad;\quad \overline{NA}=y\quad;\quad \overline{CM}=z$$

și atunci:

$$(2')\qquad \overline{PB}=c-x\quad;\quad \overline{BM}=a+z\quad;\quad \overline{CN}=b-y.$$



Din cele *trei* necunoscute este deajuns să determinăm *două* adică să fixăm poziția a două din punctele M, N, P și ele vor defini secanta.

Triunghiul APN tăiat de transversala BCM ne dă, conform teoremei lui MENELAUS:

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BA}} \cdot \frac{\overline{CA}}{\overline{CN}} \cdot \frac{\overline{MN}}{\overline{MP}} = 1 \quad \text{sau} \quad \frac{c-x}{c} \cdot \frac{b}{b-y} \cdot \frac{x_1}{x_1+x_2} = 1.$$

Ţinând seama că $x_1 + x_2 = \frac{b}{a}$ rezultă:

$$(3) \qquad a x_1 (c - x) = c (b - y).$$

Triunghiul CMN tăiat de transversala APB ne dă:

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AN}} \cdot \frac{\overline{PN}}{\overline{PM}} = 1 \quad \text{sau} \quad \frac{a+z}{a} \cdot \frac{b}{y} \cdot \frac{x_2}{x_1+x_2} = 1$$

$$(4) \qquad \therefore \quad y = x_2 (a + z).$$

Ducând valoarea lui y din (4) în (3) obţinem pe x în funcţie de z. Din (3) avem:

$$a x_1 x = a x_1 c + c y - bc = a x_1 c + a c x_2 + c x_2 z - bc$$

$$= ac (x_1 + x_2) + c x_2 z - bc = c x_2 z$$

$$(5) \qquad \therefore \quad x = \frac{c x_2}{a x_1} \cdot z.$$

Orice altă relaţie proectivă nu ne mai poate fi de folos căci nu vom putea găsi valorile *segmentelor* (toate necunoscute) din relaţii în care intră numai *rapoarte*. De exemplu dacă socotim triunghiul ABC tăiat de transversala MNP obţinem:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1 \quad \text{sau} \quad \frac{a+z}{z} \cdot \frac{b-y}{y} \cdot \frac{x}{c-x} = 1$$

în care dacă introducem valoarea lui y din (4) şi valorile lui

$$\frac{b-y}{c-x} \quad \text{şi} \quad \frac{x}{z}$$

din (3) şi (5) obţinem o identitate, deci nu poate fi o relaţie nouă.

Relaţia *metrică* pe care o vom întrebuinţa este:

$$\overline{NP}^2 = \overline{AN}^2 + \overline{AP}^2 - 2\overline{AN} \cdot \overline{AP} \cos A$$

$$\therefore \qquad x_2^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos A.$$

Introducând aci valorile lui y şi x din (4) şi (5) găsim

$$x_2^2 = \frac{c^2 x_2^2}{a^2 x_1^2} \cdot z^2 + x_2^2 (a+z)^2 - 2\frac{c x_2}{a x_1} z \cdot x_2 (a+z) \cos A$$

în care simplificând cu x_2^2, gonind numitorii şi ordonând după puterile lui z găsim ecuaţia:

$$(6) \quad (a^2 x_1^2 + c^2 - 2a x_1 c \cos A) z^2 + 2a^2 x_1 (a x_1 - c \cos A) z + (a^2 - 1) a^2 x_1^2 = 0$$

de care depinde rezolvarea problemei, căci odată determinat z, x şi y se află imediat.

Realizantul ecuaţiei (6) fiind:

$$a^2 x_1^2 (a^2 x_1^2 + c^2 - 2a x_1 c \cos A - a^2 c^2 \sin^2 A)$$

problema va admite două soluţii dacă paranteza e pozitivă şi nici una dacă paranteza e negativă.

Observaţiuni. 1°. Ţinând seama de condiţia (1) se poate vedea ce triunghiuri isoscele sau dreptunghice pot da soluţii. Aşa triunghiurile isoscele ce au $a = c$ nu pot da soluţii, iar cele ce au $b = c > 4a$ pot da.

2°. Un exemplu de triunghiu ce dă rădăcini raţionale pentru ecuaţia din enunţ este cel cu laturile:

$$a = 3 \quad , \quad b = 13 \quad , \quad c = 12.$$

S'a primit o soluţie dela D-l N. ALDEA (absolvent Liceul Militar M-rea Dealu).

PROBLEMA 3924. *Să se construiască un triunghiu cunoscând* BC $= a$ *şi unul din punctele de contact ale acestei laturi cu unul din cercurile tritangente.*

V. THÉBAULT.

Problema este nedeterminată. Fie D punctul de contact dat şi M un punct oarecare pe perpendiculara în D pe BC. Tangentele din B şi C la cercul cu centrul în M şi cu raza MD se întâlnesc în A. Triunghiul ABC este o soluţie. Pentru fiecare punct M, de pe MD, vom avea câte o soluţie. Deci se pot construi o infinitate de triunghiuri cu datele problemei.

Notă. 1°. Au dat această soluție, la data propunerei problemei D-nii: N. N. MIHĂILEANU, Locot. A. STAN și M. MARGULIUS.

2°. Să presupunem că s'ar fi dat două din punctele de contact ale laturei BC cu cercurile tritangente.

Fie D, D', E, F contactele lui BC respectiv cu cercurile I, I_a, I_b, I_c. Se știe că în orice triunghiu

$$CD = DD' = p - c \; ; \; BE = CF = p \; ; \; BD = CD' = p - b$$

de unde se duce

$$b = p - BD = BE - BD = DE \qquad (1)$$

$$c = p - CD = CF - CD = DF. \qquad (2)$$

Rezultă că dacă se dă D sau E se cunoaște și D' sau F, prin urmare când se dau *două puncte de contact de pe* BC trebue să se dea sau D și E sau D' și F, căci altfel problema se reduce la cea din enunțul 3924 și are o infinitate de soluții

Dacă se dă D și E sau D' și F se scoate din (1) și (2) valorile lui AB și AC și deci problema se reduce la construcția unui triunghiu ale cărui laturi se cunosc. In acest caz avem o singură soluție cu condiția ca între segmentele BC, DE, DF să existe relațiile generale de mărime dintre laturile unui triunghiu.

G-L GH. B.

PROBLEMA 5008. *Cevienele triunghiului de referință corespunzătoare mijloacelor segmentelor ce unesc ortocentrul cu vârfurile triunghiului complimentar concură pe dreapta lui* EULER.

Dreptele ce trec prin centrele cercurilor exînscrise triunghiului de referință și prin mijloacele segmentelor ce unesc centrul cercului înscris cu picioarele bisectoarelor exterioare corespunzătoare pe cercul circumscris triunghiului, concură pe dreapta centrelor cercurilor înscris și circumscris.

N. N. MIHĂILEANU.

Soluția I. Fie A, B, C, vârfurile triunghiului, A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor, H ortocentrul și α, β, γ mijloacele segmentelor A_1H, B_1H, C_1H.

Triunghiul complimentar $A_1B_1C_1$ este *omotetic* cu ABC, de centru G (centrul de greutate).

Triunghiul $\alpha\beta\gamma$ este *omotetic* prin enunț, cu $A_1B_1C_1$ de centru H.

Dar *două triunghiuri omotetice cu al treilea sunt omotetice între ele, centrele de omotetie fiind toate colineare.*

Rezultă că şi *triunghiurile* ABC, $\alpha\beta\gamma$, *sunt omotetice cu centrul pe* GH (*dreapta* EULER) şi prima parte a problemei este demonstrată.

Rămâne să facem observaţia că ultima ei parte este *o aplicaţie a celor stabilite în prima, relativ la triunghiul antiortic* $I_a I_b I_c$; în adevăr, centrul cercului înscris, I, este ortocentru în acest triunghiu şi cercul ABC este cercul EULER al lui, şi intersecţiile acestui cerc cu bisectoarele exterioare ale triunghiului ABC — adică laturile triunghiului antiortic — sunt mijloacele laturilor acestui triunghiu $I_a I_b I_c$.

DORIN N. THEODORESCU
Liceul militar Mânăstirea Dealu.

Soluţia II, dată de D-nii: CORNELIU BREZEANU (lic. Mihaiu Viteazu, Bucureşti), CONST. ŞEIBULESCU (lic. Sp. Haret, Bucureşti) şi MIRCEA D. POPA (lic. mil. Iaşi).

Fie încă O, ω centrele cercurilor circumscris şi EULER; α şi ω fiind mijloacele segmentelor HA_1 şi HO, $\alpha\omega$ este paralelă şi egală cu jumătate din OA_1:

dar $$OA_1 = \frac{1}{2} AH$$

deci $$\alpha\omega = \| \frac{1}{4} AH$$

şi $A\alpha$ taie pe $H\omega$ în acelaşi raport, fix; rezultă că analoagele $B\beta$, $C\gamma$ vor trece tot pe acolo.

Restul, ca la prima soluţie.

Observare. 1°. D-l M. AL. VASILESCU-STABU procedează ca la prima soluţie pentru a proba concurenţa şi ca la a doua, pentru a identifica acest punct,

2°. D-l MIHAIL I. TREFILOV aplică teorema MENELAUS în triunghiul HGA_1 şi află simplu, raportul în care $A\alpha$ taie pe HG.

3° D-l CONST. ŞEIBULESCU mai observă că intersecţia ($A\alpha$, $H\omega$) este conjugatul armonic al lui G, faţă de H şi ω.

PROBLEMA 5065. *Se consideră un patrat variabil* ABCD *ale cărui vârfuri consecutive* A *şi* B *descriu laturile unui unghiu drept. Să se observe că centrul patratului se află pe bisectoarea unghiului drept. Presupunând că patratul are o mărime constantă, să se afle şi să se construiască locurile descrise de vârfurile* C *şi* D.

N. ABRAMESCU.

Soluţie dată de D-nii: C. V. PANTELIMON, M. D. POPA, H. L. REISCHER, D. RIPIANU, I. I. SOLOMON, I. STAMATE. Axele Ox şi Oy fiind laturile unghiului drept, să presupunem că pătratul ABCD cu latura $AB = a$ are vârful $A(\lambda, o)$ pe Ox şi $B(o, \mu)$ pe Oy. Deci

$$(1) \qquad \lambda^2 + \mu^2 = a^2.$$

Însemnând cu E centrul pătratului, unghiurile AOB şi AEB fiind drepte, patrulaterul AOBE este inscriptibil, unghiurile $EOA = EBA = \frac{1}{4}\pi$, deci OE este bisectoarea unghiului xOy.

Fie BC′ proiecţia lui BC pe Oy şi AD′ proiecţia lui AD pe Ox. Triunghiurile BCC′, ABO, DAD′ sunt egale, deci

$$C'C = OB = AD' = \mu \quad , \quad C'B = OA = D'D = \lambda.$$

Coordonatele punctelor C şi D sunt respectiv

$$(2)\ \text{C},\ x = \mu,\ y = \lambda + \mu \ ; \quad (3)\ \text{D},\ x = \lambda + \mu,\ y = \lambda.$$

Mai este un pătrat simetricul acestuia în raport cu AB.

Locul descris de C se obţine eliminând pe λ şi μ între ecuaţiile (1) şi (2) şi este elipsa $x^2 + (y - x)^2 = a^2$,

$$(4) \qquad (C)\quad 2x^2 - 2xy + y^2 - a^2 = 0.$$

Eliminând pe λ şi μ între ecuaţiile (1) şi (3), locul lui D este elipsa

$$(5) \qquad (D)\quad x^2 - 2xy + y^2 - a^2 = 0.$$

Se vede că elipsele (C) şi (D) sunt simetrice faţă de bisectoarea întâia, căci (D) se obţine din (C) schimbând pe x şi y cu y şi x.

In ecuaţiile (4) şi (5) lipsind termeni cu x şi y, elipsele au centrele în origine.

Pentru construcţia elipselor, adică a vârfurilor, se poate scrie direct ecuaţia axelor $B(f'^2_x - f'^2_x) = (A - C) f'_x f'_y$ conicei $f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$. Dar, în cazul considerat, se poate obţine uşor, făcând notaţia axelor de coordonate de unghiul θ, $x = X\cos\theta - Y\sin\theta$, $y = X\sin\theta + Y\cos\theta$. Ecuaţia (4) devine

$$S_1X^2 + S_2Y^2 + 2TXY - a^2 = 0,$$

$$(6) \quad S_1 = 2\cos^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta,$$

$$S_2 = 2\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta,$$

$$T = \sin^2\theta - \cos^2\theta - \sin\theta\cos\theta = -\cos 2\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta.$$

Axele de coordonate OX, OY cele noui sunt axele conicei, când lipseşte termenul cu XY, adică $T = 0$,

$$(7) \qquad \cos 2\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta = 0 \quad , \quad \operatorname{tg} 2\theta = -2.$$

De unde

$$\sin 2\theta = \frac{\operatorname{tg} 2\theta}{-\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\theta}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos 2\theta = \frac{1}{-\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\theta}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Am luat în faţa radicalului semnul —, căci $0 < 2\theta < \pi$, $\sin 2\theta > 0$, şi $\operatorname{tg} 2\theta = -2$.

Pentru construirea axelor, se poate calcula θ din ecuaţia $\operatorname{tg} 2\theta = -2$, ceea ce nu este practic. De aceea, se construeşte dreapta $O\Delta$, $y = x\operatorname{tg} 2\theta$, $y = -2x$, în raport cu vechile axe, şi o axă conicei este bisectoarea unghiului $xO\Delta$.

Pentru calculul lui S_1 şi S_2 se poate înlocui $\sin 2\theta$ şi $\cos 2\theta$ în funcţie de $\operatorname{tg} 2\theta = -2$; dar este mai uşor a afla din (6)

$$S_1 + S_2 = 3 \quad , \quad S_1 - S_2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta - 4\sin\theta\cos\theta$$

$$= \cos 2\theta - 2\sin 2\theta = \cos 2\theta\,(1 - 2\operatorname{tg} 2\theta),$$

şi înlocuind

$$\operatorname{tg} 2\theta = -2 \quad , \quad \cos 2\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

avem

$$S_1 - S_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}(1+4) = -\sqrt{5}.$$

De unde

$$S_1 = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) \quad , \quad S_2 = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5}).$$

Ecuaţia redusă a elipsei (C) este

$$\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})\,X^2 + \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})\,Y^2 - a^2 = 0,$$

$$\frac{X^2}{\frac{2a^2}{3-\sqrt{5}}} + \frac{Y^2}{\frac{2a^2}{3+\sqrt{5}}} = 1.$$

Lungimile semiaxelor sunt

$$a\sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{5}}} = a\sqrt{\frac{2(3+\sqrt{5})}{4}} = \frac{a}{2}(\sqrt{5}+1), \quad \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Axele sunt dreptele care trec prin centru, adică originea O, şi fac unghiul θ dat de ecuaţia (7), $\operatorname{tg} 2\theta = -2$, $\operatorname{tg}^2\theta - \operatorname{tg}\theta - 1 = 0$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$, $y = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})\,x$.

Coordonatele vârfurilor se obţin rezolvând ecuaţia elipsei (4) şi a axelor şi sunt (x_1, y_1), $(-x_1, -y_1)$, (x_2, y_2), $(-x_2, -y_2)$,

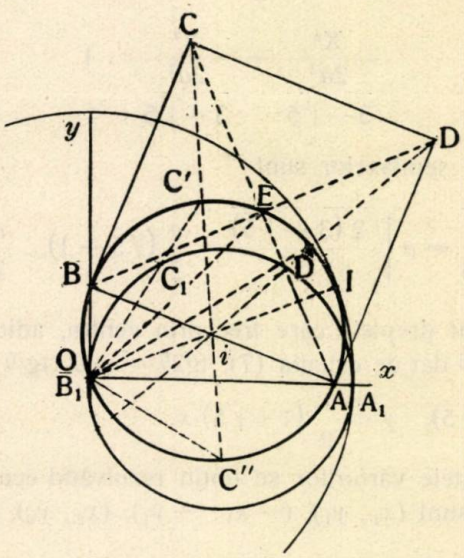
$$x_1 = \frac{2a}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \quad , \quad y_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\,a \quad , \quad x_2 = \frac{-2a}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}},$$

$$y_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\,a.$$

Se poate opera la fel şi pentru elipsa (D). Sau, se obţine ecuaţia axelor, scriind că trec prin centru şi sunt bisectoarele

unghiului format de direcţiile asimptotice. Acestea fiind date de $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$, direcţiile axelor sunt acelea ale bisectoarelor, $B(y^2 - x^2) + (A - C)xy = 0$, care pentru elipsa (D) sunt $-(y^2 - x^2) - xy = 0$, $y = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$. Insă, am văzut că elipsa (D) este simetrica lui (C) în raport cu bisectoarea întâia. Deci, vârfurile se obţin schimbând pe x şi y cu y şi x în coordonatele vârfurilor elipsei (C). Elipsele (C) şi (D) sunt egale.

Observare. Am propus această problemă, ca un exemplu simplu de *mişcarea unei figuri plane de formă invariabilă în planul său, pentru care rulanta şi baza sunt cercuri, rulanta interioară bazei, şi diametrul cercului rulantă egal cu raza cercului bază* [1]). Vom face o expunere elementară a acestor proprietăţi.



Latura AB a patratului ABCD de mărime invariabilă, având vârfurile A pe Ox şi B pe Oy, centrul instantaneu de mişcare la momentul considerat este intersecţia perpendicularelor în A pe Ox şi B pe Oy. Pe planul mobil, rulanta, locul lui I este cercul de diametru $OI = AB = a$, cu centrul i, în mijlocul lui OI. Pe planul fix, baza, locul lui I este cercul cu centrul O şi

1) Pentru desvoltări, să se consulte N. ABRAMESCU, *Geometrie pură infinitesimală* (Editată de Universitatea din Cluj).

raza OI. Rulanta şi baza sunt cercuri, rulanta interioară bazei, diametrul cercului rulantă egal cu raza cercului bază. Mişcarea figurii se face rostogolind rulanta dealungul bazei, rămânând tangente în centrul instantaneu I.

Să luăm ca moment iniţial, acela pentru care segmentul AB este aşezat pe axa Ox, în poziţia A_1B_1, când rulanta este cercul de diametru A_1B_1. La momentul considerat, rulanta este cercul de diametru AB, cu centrul *i*. C fiind un vârf al patratului, dreapta C*i* taie cercul de diametru AB în C' şi C''. In timpul mişcării patratului, adică al rostogolirii cercului rulantă de diametru BA, arcul BC' al acestui cerc a rămas egal cu cel care îi corespundea la momentul iniţial, pe cercul de diametru A_1B_1, adică B_1C_1; astfel că arcele BC' şi B_1C_1 sunt egale pe cercurile egale de diametre AB şi A_1B_1. Rezultă că şi arcele AC' şi A_1C_1 din aceste cercuri sunt egale, ca fiind diferenţe dintre jumătatea lungimii fiecărui cerc şi arcele lor egale BC' = B_1C_1. Deci, unghiurile $A_1B_1C_1$ = AB_1C', ca fiind înscrise în aceste cercuri egale, şi corespunzând la arce egale A_1C_1 = AC'. Urmează că dreptele B_1C_1 şi B_1C' sunt în prelungire, adică *un punct C' însemnat pe cercul rulantă descrie, în mişcarea figurii, un diametru OC' al cercului bază* [1]). Astfel, centrul E al patratului, un punct al cercului rulantă, descrie bisectoarea unghiului xOy.

Acestea fiind stabilite, pentru a vedea ce curbă descrie un punct C (vârful patratului) al figurii, în cazul considerat, unim puncul C cu centrul *i* al cercului rulantă, care taie acest cerc în C' şi C''. Am văzut că punctele C' şi C'' descriu două diametre fixe ale cercului bază, care sunt şi perpendiculare. Diametrul C'C'' = AB având o lungime constantă, ca şi lungimea CC', rezultă că C este un punct fix al unui segment C'C'' de lungime constantă, care se sprijină cu extremităţile C', C'' pe două drepte perpendiculare; deci C descrie o elipsă cu axele OC' şi OC'' şi cu lungimile semiaxelor CC' şi CC''. Normala în C este IC.

Un punct invariabil legat de figura mobilă, în cazul considerat, descrie o elipsă. La fel se vede că D descrie o elipsă cu axele OD' şi OD'', D' şi D'' fiind intersecţiile dreptei D*i* cu cercul de diametru AB. Dreptele C*i* şi D*i* fiind simetrice faţă de E*i*, se vede că arcele C'E = ED', aşa dar axele şi deci şi elipsele sunt egale şi simetrice faţă de bisectoarea OE a unghiului xOy.

PROBLEMA 5100. *Se dă un cerc fix* O *şi un diametru* AB. *Fie* AM *o dreaptă ce taie tangenta în* B *la cercul* O *în* M. *Din* M *se duce cea de-a doua tangentă la cercul* O, *punctul de contact fiind* N. *Dreapta* AM *taie cercul a doua oară în* Q.

Se cere înfăşurata dreptei NQ.

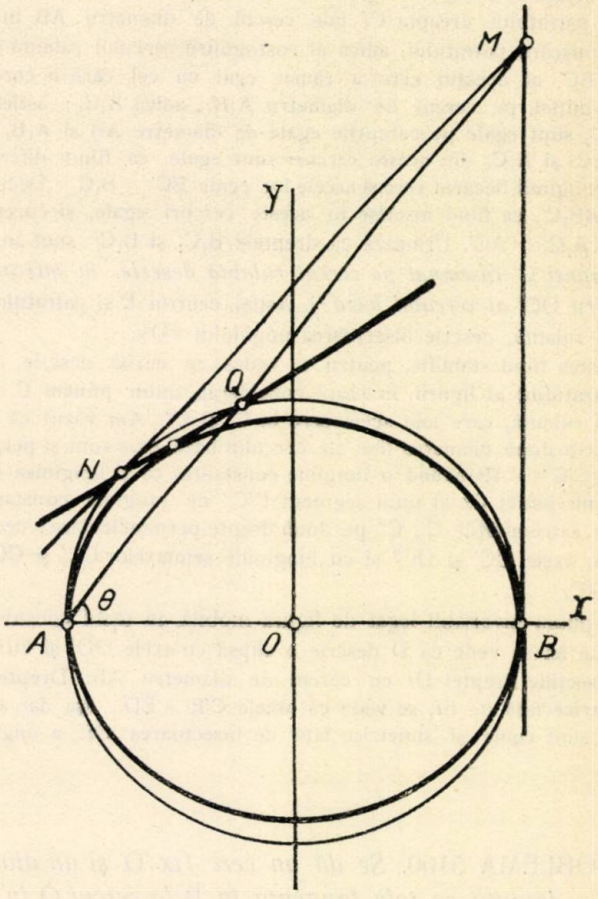
M. NICOLAU.

---

1) Teorema lui LA HIRE.

Soluție dată de D-nii: T. A. ȘERBAN (Școala Politechnică, București); MIRCEA D. POPA (Lic. militar, Iași); MIREL D. STOENESCU și D. RIPIANU.

Luăm ca axe diametrul AB și pe cel perpendicular pe el.



Fie a raza cercului O și m coeficientul unghiular al dreptei AM. Avem

$$A(-a,\ o)\ ;\ B(a,\ o)\ ;\ (AM)\ \ y = m(x + a)$$

de unde se deduce $M(a,\ 2am)$. Polara BN a lui M față de O are ecuația

$$(BN) \qquad x + 2my - a = 0.$$

Din ecuaţia (BN) şi ecuaţia cercului se scoate

$$N\left[a\frac{1-4m^2}{1+4m^2}\,,\ \frac{4am}{1+4m^2}\right].$$

Ecuaţia dreptei (AM) şi a cercului O dau

$$Q\left[a\frac{1-m^2}{1+m^2}\,,\ \frac{2am}{1+m^2}\right];$$

se deduce că ecuaţia dreptei NQ este

$$(NQ)\quad (2m^2-1)\,x-3my+a\,(2m^2+1)=0.$$

Eliminând pe m între această ecuaţie şi derivata ei în raport cu m, găsim că învelitoarea cerută este elipsa

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\frac{8a^2}{9}}-1=0$$

cu axele a şi $\frac{2\sqrt{2}\,a}{3}$.

Notă. 1°. Comparând coeficienţii unghiulari ai dreptelor AN şi AM, D-l M. D. POPA observă că

$$\mathrm{tg}NAB=2\,\mathrm{tg}QAB \qquad (1)$$

şi caută învelitoarea dreptei NQ pentru care avem în general

$$\mathrm{tg}NAB=k\,\mathrm{tg}QAB \qquad (2)$$

găsind elipsa

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\frac{4k}{(k+1)^2}a^2}-1=0.$$

2°. Observaţia D-lui M. D. POPA este interesantă. Determinarea punctelor N, Q pentru care avem relaţiunea (2) se face uşor pe cale geometrică în felul următor: Observ că

$$\mathrm{tg}QAB=BM.$$

Se ia deci pe BM un punct P aşa încât

$$BP=k\,.\,BM.$$

Intersecţiile lui O cu AP şi AM dau punctele N şi Q.

3°. Proprietatea (1) în cazul problemei 5100 se demonstrează deasemeni foarte simplu pe cale geometrică. Fie P intersecţia lui AN cu BM. Triunghiul BNP este dreptunghic şi are mijlocul ipotenuzei în M, dar prin construcţie

$$\text{tgMAB} = \text{tgQAB} = \text{BM} = \frac{1}{2}\,\text{BP} = \text{tgPAB} = \text{tgNAB}.$$

4°. Problema 5100 este înrudită cu problema 1437 pe care am propus-o anterior în *Revista Matematică din Timişoara* unde i s'a dat şi soluţia la pag. 118, Vol. XVIII. In problema 1437 ceream locul intersecţiei lui MN cu tangenta în Q la cerc. Acel loc este elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{9a^2}{8}} - 1 = 0.$$

G-L GH. B.

PROBLEMA 5122. *In intervalul de numere dela 1000 la 2000, câte numere sunt prime cu 1939?*

CPT. C-DOR I. LINTEŞ.

Soluţia I-a dată de D-nii: P. CAZANACLI (Ismail), ST. CETĂŢEANU (Bacalaureat-Bucureşti), EM. S. MODÂLCĂ (T.-Severin) şi GH. TOPOLESCU (Lic. Militar. Tg.-Mureş).

Cum $1939 = 7 \times 277$, urmează că trebue să eliminăm din intervalul de numere dela 1000 la 2000 toate numerele divizibile cu 7 sau 277.

Dela 1 până 1000 se află 142 numere divizibile prin 7 şi 3 prin 277.

Dela 1 la 2000 sunt 285 numere divizibile prin 7 şi 7 prin 277.

Deci, dela 1000 la 2000 sunt $285 - 142 = 143$ numere divizibile cu 7 şi $7 - 3 = 4$ numere divizibile cu 277.

Dintre acestea trebue să eliminăm multiplii care conţin şi pe 7, adică din cei patru multipli rămân numai primii trei valabili, ultimul fiind multiplu de 7.

Aşa dar, nu vom considera decât 3 numere divizibile cu 277 în intervalul dela 1000 la 2000.

In consecinţă, vor fi în total $143 + 3 = 146$ numere neprime cu 1939 în intervalul dela 1000 la 2000. Atunci numărul numerelor prime vor fi:

$$1000 - 146 = 854.$$

Soluția II-a dată de D-l M. AL. VASILESCU-STABU (cl. VII-a Lic. „Gh. Lazăr", București) și M. FL. VĂDUVA (Lic. „Maiorescu", Giurgiu).

Aplicând formulele date în G. M. XLI, pag. 280, cu notațiunile de acolo avem:

$$F_{2000-1000}(1939) = 2000-1000-[285-142+7-3]+[1-0] = 854.$$

Observație. Suma numerelor prime cu 1939 din acest interval va fi:

$$S_{2000-1000}(1939) = \frac{1}{2}[2000.2001 - 1000 \times 1001]$$

$$- \frac{7}{2}[285 \times 286 - 142 \times 143]$$

$$- \frac{277}{2}[7 \times 8 - 3 \times 4]$$

$$+ \frac{1939}{2}[1 \times 2 - 0 \times 1]$$

$$= 1282131.$$

Iar produsul numerelor va fi:

$$P_{2000-1000}(1939) = \frac{3!\,142!\,2000!}{7!\,285!\,1000!} \cdot \frac{1}{7^{142} \cdot 277^3}.$$

Notă. D-nii S. PETRESCU și AL. I. ROHR au dat 845 soluții și D-l P. DRĂGHICESCU și REISCHER H. 855 soluții.

I. L.

PROBLEMA 5187. *Se consideră patratele* $BCB_a C_a$, $ACA_b C_b$, $BAB_c A_c$ *construite pe laturile triunghiului* ABC, *în exterior. Fie* Q *al patrulea vârf al paralelogramului* $AA_b QA_c$, *în care* $A_b A_c$ *este o diagonală și* β, γ *intersecțiile dreptelor* AB_a, AC_a *cu* BC. *Să se arate că triunghiurile* BQC, $BA\gamma$, $CA\beta$ *au același ortocentru.*

N. N. MIHĂILEANU.

Soluție. Triunghiurile AQA_b și ABC sunt egale având laturile AA_b, QA_b egale și perpendiculare cu AC, AB; deci și AQ este egală și perpendiculară pe BC sau egală și paralelă cu CC_a.

Figura $AQCC_a$ este un paralelogram. Rezultă că dreptele CQ, AC_a sunt paralele și înălțimile din B în triunghiurile BQC, BA_γ se confundă. Cum, de altfel, ortocentrul se află și pe înălțimea comună din A, el este același pentru cele două triunghiuri. Analog și pentru triunghiul CA_β.

Bune soluții date de D-nii: D. D. BOIANGIU (lic. T-Severin), STELIAN CETĂȚEANU (student, București), CONST. CRISTEA (clasa VI-a lic. mil. Chișinău), T. MIROSLAV (lic. mil. Chișinău), VLAD GR. RACOVICEANU, CONST. ȘEIBULESCU (lic. Sp. Haret, București), I. I. STAMATE (student, Cluj), NICOLAE D. ȘTEFĂNESCU (Șc. Of. Geniu, București), MIRCEA I. ȘTEFANOVICI (lic. Sf. Andrei, București), MIHAIL I. TREFILOV (lic. N. Bălcescu, Brăila) și M. AL. VASILESCU-STABU (lic. mil. Craiova).

Observații. 1. S'a primit și soluții insuficiente.

2. D-nii I. I. STAMATE și M. A. VASILESCU-STABU au însoțit soluția de numeroase observații în legătură cu alte proprietăți ale figurii, de altfel cunoscute, configurația patratelor construite pe laturi fiind foarte cercetată și mai ales în *Gazeta Matematică*. Sugestia autorului a fost problema din [Culegere de Probleme de Geometrie, Cap. I, 33].

PROBLEMA 5243. *Să se găsească un număr format din cifre diferite astfel încât, înlocuind fiecare cifră a sa prin rădăcina sa pătrată, să se obțină un număr egal cu produsul a trei numere consecutive de câte două cifre.*

AL. STOENESCU.

Soluție dată de D-ra LYDIA M. TUDORAN (clasa V-a Școala Centrală de fete „Marica Brâncoveanu", București) și D-l D. D. BOIANGIU (clasa VIII-a B Liceul „Traian", Turnu Severin).

Din enunț rezultă că cifrele ce formează numărul căutat sunt pătrate perfecte.

Răspund la această proprietate cifrele 0; 1; 4 și 9.

Rădăcinile lor sunt respectiv 0; 1; 2 și 3.

Numărul cel mai mare cuprinzând o singură dată aceste cifre este:

$$3210 < 14 \times 15 \times 16.$$

Ne rămâne deci de studiat numai următoarele patru produse de trei numere a câte două cifre:

$$10 \times 11 \times 12 = 1320$$

$$11 \times 12 \times 13 = 1716$$

$$12 \times 13 \times 14 = 2184$$

$$13 \times 14 \times 15 = 2730$$

cu singura soluţie:

$$10 \times 11 \times 12 = 1320.$$

Numărul căutat este:

1940

reprezentând anul curent. AL. ST.

EXERCIŢII

22. Să se găsească patratele perfecte de 6, 8 şi 10 cifre, ştiind că numărul format din prima jumătate de cifre, cu numărul format din a doua jumătate de cifre, adunate dau la un loc respectiv, 999; 9.999; 99.999.

TUDOR STOICESCU.

R. Procedeul este acelaşi pentru grupa de 8 cifre sau 10, ca şi la grupa patratelor perfecte de 6 cifre.

Fie $\overline{abcdef}$ numărul căutat de 6 cifre, în care, după enunţ, avem condiţia:

$$\overline{abc} = 999 - \overline{def}.$$

Dacă notez

$$N = \overline{abcdef} = 1000\,\overline{abc} + \overline{def} = 1000\,(999 - \overline{def}) + \overline{def} = 999000 - 999\,\overline{def}$$

$$= 999\,(1000 - \overline{def});$$

am ajuns la concluzia:

$$\overline{abcdef} = 999\,(1000 - \overline{def});$$

însă

$$999 = 3^2 \cdot 3 \cdot 37,$$

deci

$$\overline{abcdef} = 3^2 \times (3 \times 37 \times x)^2 = 110 : 889 \times x^2.$$

Ca expresia $110889 \times x^2$ să fie patrat perfect de 6 cifre, x va trebui să ia valorile: 1, 2 şi 3 la ceea ce corespund patratele:

$$110.889 \quad , \quad 443.556 \quad , \quad 998.001.$$

Raţionament analog ne conduce la patratele de 8 cifre:

$$11108889 \quad ; \quad 44435556 \quad ; \quad 99980001 \, ;$$

iar de 10 cifre:

$$111108889 \quad ; \quad 4444355556 \text{ şi } 9999800001.$$

23. Fie a, b, c, cele trei laturi ale unui triunghiu, a fiind cea mai mare; fie deasemenea a_1, b_1, c_1 cele trei laturi ale unui al doilea triunghiu, a_1 fiind cea mai mare. Aceste laturi verificând relaţia:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^3 - 2(a^2 + b^2 + c^2)(a^4 + b^4 + c^4) - 8a^2b^2c^2 = a_1^2 - b_1^2 - c_1^2$$

să se arate că dacă primul triunghiu este dreptunghic, al doilea va fi tot triunghiu dreptunghic. Reciproca este adevărată?

TUDOR STOICESCU.

R. Se observă că putem scri:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^3 - (a^2 + b^2 + c^2)(a^4 + b^4 + c^4) - 8a^2b^2c^2$$

$$= (b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) \, ;$$

factorul $b^2 + c^2 - a^2$ fiind nul, când se presupune triunghiul cu latura cea mare a dreptunghic, egalitatea precedentă face ca membrul al doilea să fie nul, adică $a_1^2 = b_1^2 + c_1^2$, deci şi al II-lea triunghiu este dreptunghic.

Pentru ca reciproca să fie adevărată, va trebui ca nici unul din factorii

$$c^2 + a^2 - b^2 \quad \text{sau} \quad a^2 + b^2 - c^2$$

să nu poată deveni niciodată zero; ori aceşti factori pot lua diverse valori astfel:

$$c^2 + a^2 - b^2$$

cuprinse între

$$(a - b)^2 + a^2 - b^2 \quad \text{şi} \quad (a + b)^2 + a^2 - b^2$$

adică între

$$2a(a - b) \quad \text{şi} \quad 2a(a + b),$$

iar $a^2 + b^2 - c^2$ cuprins între

$$(b - c)^2 + b^2 - c^2 \quad \text{şi} \quad (b + c)^2 + b^2 - c^2$$

adică între

$$2b(b - c) \quad \text{şi} \quad 2b(b + c) \, ;$$

ori nici unul dintre aceşti factori nu cuprind între limitele lor valoarea zero; rezultă că al treilea factor $b^2 + c^2 - a^2$ trebue să fie zero, adică $b^2 + c^2 = a^2$. Adică reciproca este adevărată, căci factorul $b^2 + c^2 - a^2$ este cuprins între limitele

$$2c(c - a) \quad \text{şi} \quad 2c(c + a)$$

care cuprinde şi valoarea zero, a fiind mai mare ca c prin ipoteză.

24. Se dă un cerc O, un punct A în planul său şi altul M pe el. Prin A se duce o secantă variabilă care taie cercul în B şi C; se uneşte M cu B şi C; dacă EF sunt mijloacele lungimilor MB şi MC, să se găsească locul geometric al mijlocului segmentului EF.

TUDOR STOICESCU.

R. Segmentul EF unind mijloacele laturilor triunghic MCB este paralel la BC şi prelungirea lui trece prin punctul fix P, care-i mijlocul distanţei MA; locul lui E şi F este omoteticul locului lui B şi C, unde M este centrul de similitudine, iar raportul $\frac{1}{2}$, adică cercul O' de diametru OM; P fiind fix, locul mijlocului coardei EF, care-i dusă în O', este sau arcul de cerc de diametru O'P cuprins în cercul O, dacă P este exterior lui O', sau un cerc complect când P este în interiorul lui O'.

25. Să se rezolve sistemul

$$xy\,(xy-1)\,(x+y)=6$$
$$x^2+y^2+x^2y^2+xy+x+y=14.$$

S-LT. ADRIAN POPESCU.

R. Considerând necunoscutele x şi y ca rădăcinile ecuaţiei

$$z^2-pz+q=0 \tag{1}$$

avem ecuaţia

$$p^3+p^2-14p+6=0$$

ale cărei rădăcini sunt 3, $-2\pm\sqrt{6}$ şi din ecuaţia

$$q^2-q=\frac{6}{p}$$

deducem valorile corespunzătoare ale produsului xy, astfel încât coeficienţii ecuaţiei (1) sunt determinaţi şi obţinerea necunoscutelor x şi y numai întâmpină nici o dificultate.

26. Să se verifice identitatea

$$\left[1+\frac{h^4}{5!}+\frac{h^8}{9!}+\ldots+\frac{h^{4n}}{(4n+1)!}+\ldots\right]\cos a$$
$$-\left[\frac{h}{2!}+\frac{h^5}{6!}+\ldots+\frac{h^{4n+1}}{(4n+2)!}+\ldots\right]\sin a=\frac{\sin a\,\cos h}{h}.$$

MIHAIL ST. BOTEZ.

R. Formula lui TAYLOR ne permite să scriem

$$\sin(a+h)=\sin a+\frac{h}{1!}\cos a-\frac{h^2}{2!}\sin a-\frac{h^3}{3!}\cos a+\frac{h^4}{4!}\sin a+\ldots$$

$$\sin(a-h)=\sin a-\frac{h}{1}\cos a+\frac{h^2}{2!}\sin a-\frac{h^3}{3!}\cos a+\frac{h^4}{4!}\sin a-\ldots$$

cari introduse în

$$\sin(a+h)-\sin(a-h)=2\sin a\,\cos h$$

ne dă, după efectuarea simplificărilor, identitatea propusă.

PROBLEME PROPUSE

5287. Care sunt patratele de patru cifre scrise numai cu două feluri de cifre ?

I. IONESCU.

5288. In ce sisteme de numeraţie patratul unui număr de n cifre identice este egal cu diferenţa dintre un număr de $2n$ cifre şi altul de n cifre identice, ştiind că $n \geqq 2$.

STELIAN CETĂŢEANU.

5289. Să se determine o limită superioară a numărului divizorilor întregilor de n cifre.

G. G. CONSTANTINESCU.

5290. Să se demonstreze că:

1°. Dacă în o bază de numeraţie B, *primele* sau *ultimile* două cifre ale patratului numărului de două cifre aa sunt egale, atunci şi *ultimile* sau *primele* două cifre ale acelui patrat sunt egale.

2°. Dacă în un sistem de numeraţie B, numărul $aabb$ este patratul unui număr cd, format de două cifre diferite, atunci $(B+1)$ nu este nici odată număr prim.

V. THÉBAULT.

5291. Să se găsească un patrat perfect de patru cifre $abcd$ multiplu de 9, a cărui rădăcină este inversatul sumei $ab + cd$.

G-L GH. BUICLIU.

5292. Fie A_1, B_1, C_1 punctele unde o dreaptă (Δ) taie laturile unui triunghiu ABC. Paralelele din B_1 la AB şi din C_1 la AC se întâlnesc în A_0. Analog se obţine punctele B_0 şi C_0:

1°. Punctele A_0, B_0, C_0 sunt pe o dreaptă (Δ_0);

2°. Dacă (Δ_0) este o dreaptă SIMSON, dreptele (Δ) şi (Δ_0) sunt perpendiculare.

ION C. VASILIU.

5293. In triunghiul ABC γ_i, γ', ω_i, η_i $(i = 1, 2, 3)$ sunt respectiv distanţele dela *punctul lui* GERGONNE, *asociatele acestuia* (γ_i' înseamnă distanţa asociatului din unghiul A la latura BC, etc.), *centrul cercului circumscris triunghiului antiortic, punctul lui* NAGEL, la laturile lui. Să se arate că

$$\sum \frac{1}{\gamma_i'} = \frac{1}{r}\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2 \quad ; \quad \sum \frac{1}{\gamma_i'} = \frac{2R+r}{r^2}$$

$$\sum \frac{1}{\gamma_i} - \sum \frac{1}{\eta_i} = \frac{2}{r} \quad ; \quad \sum \omega_i = r^2 \sum \frac{1}{\eta_i},$$

R, r, p fiind notaţiile uzuale.

M. AL. VASILESCU-STABU.

5294. Să se rezolve ecuaţia

$$x^4 + 2ax^3 + 2bx + ab = 0.$$

GH. POPESCU-BOTOŞANI.

5295. Să se rezolve sistemul:

$$\left(\frac{x}{y}+1\right)\left(\frac{x}{z}+1\right) = a(x^2-1) \; ; \; \left(\frac{y}{z}+1\right)\left(\frac{y}{x}+1\right) = b(y^2-1);$$

$$\left(\frac{z}{x}+1\right)\left(\frac{z}{y}+1\right) = c(z^2-1).$$

S-LT. ADRIAN POPESCU.

5296. Să se formeze ecuaţiile de gradul al treilea, ireductibile, ale căror rădăcini, x_1, x_2, x_3, să satisfacă relaţiile

$$x_1 = x_2^2 - 8 \quad , \quad x_2 = x_3^2 - 8 \quad , \quad x_3 = x_1^2 - 8.$$

Să se verifice că aceste ecuaţii rămân neschimbate prin transformarea

$$y = x^2 - 8.$$

Să se cerceteze realitatea rădăcinilor x_1, x_2, x_3.

TH. ANGHELUŢĂ.

5297. Să se determine α aşa fel ca forma patratică

$$F \equiv x^2 + 16y^2 + 5z^2 + 12t^2 + 2\alpha xy + 2\alpha zt + 4xz - 6yt$$

să se descompună într'o sumă de trei patrate distincte, care să se determine. Să se determine apoi valorile lui x, y, z în funcţiune de t, pentru care $F \equiv 0$.

M. GHERMĂNESCU.

5298. Să se rezolve sistemul

$$\sum_{k=1}^{3} k \sin(k+1)\, x_k = a\,; \quad \sum_{k=1}^{3} k \cos(k+1)\, x_k = b\,; \quad 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0.$$

Caz particular $a = b = 2$. Să se verifice soluţiile obţinute.

MIHU CERCHEZ.

5299. Intr'un triunghiu oarecare însemnând cu β_a, β_b, β_c, β'_a, β'_b, β'_c lungimile bisectoarelor interioare şi exterioare, iar celelalte notaţii fiind cele obişnuite, să se demonstreze relaţiile:

1. $$\frac{\cos\frac{1}{2}A}{\beta_a} + \frac{\cos\frac{1}{2}B}{\beta_b} + \frac{\cos\frac{1}{2}C}{\beta_c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\,;$$

2. $$\frac{\sin\frac{1}{2}A}{\beta'_a} - \frac{\sin\frac{1}{2}B}{\beta'_b} + \frac{\sin\frac{1}{2}C}{\beta'_c} = 0.$$

VIRGIL GHIŢESCU.

5300. Se consideră pe un cerc fix cu centrul în O un punct variabil M şi tangenta AT într'un punct fix A la acest cerc. Un cerc variabil, care are centrul în M şi rămâne tangent dreptei AT, întâlneşte dreapta OM în P şi P'. Să se găsească locul geometric al punctelor P şi P'.

EMIL MORŢUN.

5301. Se dă o iperbolă echilateră cu vârfurile în A şi A' şi se duce un cerc (Γ) tangent axei transverse în A'.

1°. Să se determine raza cercului (Γ) astfel încât să fie tangent iperbolei şi să se arate că proiecţia punctului de contact pe axa transversă se poate găsi printr'o construcţie grafică.

2°. Să se găsească locul geometric al intersecţiei coardelor comune iperbolei şi cercului (Γ), când acesta este variabil.

GH. D. SIMIONESCU.

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam N. (5283); *Aldea V. V.* (5232, 51, 73, 82, 83); *Alexandrescu C.* (5283); *Andonie St. I.* (5265, 73, 82, 83); *Angheliche R.* (5273, 83); *Arabu A. I.* (5282, 83); *Badea I.* (5273, 83); *Bakonyi C. C.* (5236, 57, 58, 82, 83); *Bârzu Gh. V.* (5244); *Boiangiu D. D-tru* (5260, 62, 73, 82, 83); *Bojiu C. D.* (5283); *Buznea D. Dinu* (5136, 53, 251, 83); *Cârdeiu D. Gh.* (5282, 83); *Caulea V. I.* (5283); *Cocea G. Th.* (P); *Constantin Pantelimon* (4571, 859, 907, 5235, 46, 47, 57, 58, 59, 60, 62, 65, 66); *Cristea C.* (5232, 44, 51, 57); *Diaconescu D. I.* (5283); *Diaconescu V. C.* (5273, 83); *Dombrowski Gh.* (5283); *Dovgan V. Gh.* (5282); *Drăghicescu P. P.* (5185, 56, 57, 59, 65, 66, 71, 73, 75, 82, 83); *Eftimie D. C.* (5244, 57); *Fila Gh. Eug.* (5240, 59, 66, 82, 83); *Filiti Gr. Gr.* (5282); *Florescu B. I.* (N, P); *Florescu L. Victor* (5268, 69, E); *Gheorghiu E. O.* (5282, 83); *Gheorghiu M.* (5283); *Herescu D. C.* (5283); *Herlea V. V.* (5265, 83); *Horia Ioan* (5283); *Ianculescu I. E.* (5283); *Ioan C. Zamfir* (5257, 58); *Ionescu B.* (5283); *Ionescu D. Stelian* (5282, 83); *Irimescu S. P.* (5283); *Jaravete P.* (5283); *Jiletcovici G. A.* (5282); *Krauss R.* (5283); *Leibovici S.* (5159, 235, 71, 73, 83); *Maica Gogâţa Drosida* (5265, 82, 83); *Marcean N.* (5283); *Marian M. S.* (5229, 35); *Metea Romulus* (5240, 82); *Mircea D. Gh.* (5283); *Mircea I. Gh.* (5265); *Mocanu I. Const.* (5213, 19, 62, 65); *Moisii Gh. I.* (5282, 83); *Moraru L.* (5283); *Moscovici E. N.* (5251, 65, 82, 83); *Nedelea I.* (5283); *Negrea A. Mircea* (5185, 252, 73, 82, 85); *Niculescu C. M.* (5060, 67, 243, 51, 65, 73, 82, 83); *Nubert C. R.* (5283); *Offney Kurt* (5283); *Paicu Gh. M.* (5283); *Papadopol Elena Dumitra* (5282); *Pârvu V. Ad.* (5265); *Pascaru I. C.* (5275, 82, 83); *Pavlovschi Şt.* (5282); *Petrescu Iul.* (5214, 64, 83, P); *Petrescu R. Gh.* (5251, 57, 83); *Popa D. M.* (3467, 4738, 804, 25, 985, 5036, 50, 80, 109, 16, 24, 89, 202, 27, 31, 46, 52, 56, 57, 58, 59, 62, 66, 69); *Popa N. A.* (4474, 5256, 57, 58, 60, 65); *Ripianu D-tru* (4931, 69, 5179); *Rohr I. Alex.* (5033, 273, 75, 76, 82, 83, R); *Rollea C. V.* (5251, 65, 83); *Rosenzweig S. M.* (5275, 82, 83); *Rusu L. Mircea* (5186, 265, 66, 73, N); *Şcodrano Al.* (N); *Scurtu I.* (5282, 83); *Segal Joe* (4667, 765, 923, 5065, 171, 75, 87, 215, 35, 45, 51, 75); *Senchi M. E.* (5283); *Slătinescu V. C.* (5283); *Stamate I. I.* (5282, 83); *Ştefanovici I. M.* (5282); *Stoika V. V.* (5273); *Ţocu Gh. P.* (5275, 82, 83); *Tofan Gh. M.* (5282, 83); *Topârceanu Gh.* (5265, 83); *Trefilov I. M.* (5154, 256, 65, 82, 83); *Tudoran M. Lydia* (5257, 60); *Turcu R. S.* (5275, 82, 83); *Vâlceanu D. A.* (5283); *Vasiliu I. P.* (5265, 82, 83); *Vijelie Gh. Eug.* (5251, 57); *Virgil D. A.* (5283); *Vişan T.* (5283); *Vlădescu Gh.* (5283); *Walter I. P.* (5283); *Zamfir C. S.* (5256); *Zavoti C. C.* (5265, 83).

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică* Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*
Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 50 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

C. 62.747

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLV

NUMĂRUL 9. — MAI 1940

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNII SIBIIU

SUMARUL

1. Două bilete în original ale lui Le Verrier . . . . . *Virgil Ghițescu.*
2. George Țițeica (urmare și sfârșit) . . . *Gh. Th. Gheorghiu.*
3. Dimitrie Isopescul . . . . . *Ilie Popa.*
4. Formarea câtului și restului a două polinoame când împărțitorul este descompus în factori de gradul întâi. . *Th. Angheluță.*
5. Produsul a patru numere întregi în progresie aritmetică poate fi un patrat? *Ion B. Florescu.*
6. Premiul „Inginer H. Capriel" . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
7. Raport asupra premiului de algebră din 1939 . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
8. Note Matematice: 33 — 38.
9. Bibliografie.
10. Cereri: 292 — 293.
11. Diverse.
12. Probleme rezolvate: 1092, 4479, 4650, 4927, 5063, 5101, 5120, 5159, 5175, 5235, 5251, 5256.
13. Exerciții: 27.
14. Probleme propuse: 4667, 4914, 5302 — 5316.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1940

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Cpt. Comandor-Inginer **I. Linteş**; **D. Stoica**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1939 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 5184, 89, 93, 96, 97, 200, 04, 08, 09, 11, 12, 20, 21, 24, 25, 30, 37, 42, 48, 53, 70, 72, 74, 77, 79, 80, 81, 84, 86, 88, 89, 90, 92, 93, 94, 95, 96, 98, 301, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

DOUĂ BILETE ÎN ORIGINAL ALE LUI LE VERRIER

Celebrul astronom francez URBAIN-JEAN-JOSEPH LE VERRIER, o glorie universală, născut la 1811, mort la 1877, se ştie că contează în ştiinţă ca descoperitor, prin calcul, al planetei Neptun. Lucrările sale întreprinse în urma îndemnurilor superiorului său dela Observatorul din Paris, astronomul-director FRANÇOIS ARAGO, deşi posterioare cu aproape un an faţă de lucrările în vederea aceluiaş ţel, ale astronomului englez ADAMS, au meritul de a fi cele mai exacte.

Dăm în facsimil două bilete, scrise de LE VERRIER, ambele (sau poate numai unul) unui prieten, Mr. RUOLES. Deţinem aceste bilete dela o casă de antichităţi din Paris, *Maison Quéreuil.*

(Facsimilul biletului, numerotat deasupra cu Nr. 9).

Transcriere:

„Mon cher ami,

Je trouve ta lettre à mon retour d'une excursion à Orléans. Je vois avec regret que tu t'es laissé envahir tout un mois. Catte s'est-il trop ou trop peu occupé de toi. Ne s'est-il point assez ou s'est-il trop occupé de son confident d'Orgères [1]*)?*

Ma première sortie sera pour toi.

12 février 1860 *105 rue de Grenelle*

Tout à toi,

U. J. LE VERRIER.

(Facsimilul biletului, numerotat deasupra cu Nr. 47).

Transcriere:

„Mon cher ami,

Ton affirmation marche grâce à la règle de l'autre.

Nous avons passé le No. 1700.

Mr. CALLON *1309 que tu as présenté n'a pas encore donné le sien. Dis-leur donc de se libérer une fois pour toutes.*

Ton

U. J. LE VERRIER.

M. RUOLES.

1) Localitate în Eure-et-Loire.

Data este scrisă cu altă cerneală şi mai pronunţat. Numărul 9 este scris cu cerneală roşie.

Ne exprimăm dorinţa de a vedea apărută o carte cu descrierea vieţii acestui mare învăţat şi descoperitor astfel cum au apărut multe volume în acest gen, în ultimul timp [1]).

VIRGIL GHIŢESCU.

Fotocopiile originalelor

9

Mon cher Ami,

Je trouve ta lettre à mon retour d'une excursion à Orléans.

Je vois avec regret que tu t'es laissé envahir tout un mois. Cette fois-il trop ou trop peu occupé de toi. Ne s'est-il point assez ou s'est-il trop occupé de son Confrère d'Orgère?

Ma première sortie sera pour toi 10 rue de Grenelle.

Tout à toi.

U. J. Le Verrier

12 février 1860.

1) Ar fi de dorit ca un corespondent al *Gazetei Matematice*, care ar sta mai mult timp la Paris să compare aceste scrisori ale lui LE VERRIER cu manuscrise de ale lui aflate la unele Instituţiuni spre a se putea afirma autenticitatea lor.

I. I.

2 Septembre 1864

47

Monsieur

Ton association marche grâce à la règle de l'antic. Nous avons passé le 2° 1700.

Mr Callou 1309 que tu as présenté n'a pas encore donné le sien. Dis-lui donc de se libérer une fois pour toutes

Tout

M. Le Verrier

Mr Rudel

GEORGE ŢIŢEICA

II. Lucrări de Matematici Superioare

(Urmare dela pag. 405)

Cartea „*Géométrie différentielle projéctive des réseaux* (97) conţine o introducere şi trei părţi.

In introducere, după obiceiul său, ŢIŢEICA dă posibilitatea celui care citeşte, chiar dacă este profan, să înţeleagă cele expuse în capitolele următoare, cu multă uşurinţă. Astfel, după ce se spune ce se înţelege printr'un spaţiu linear şi un spaţiu cuadratic dintr'un spaţiu cu mai multe dimensiuni, se dau câteva noţiuni asupra complexelor, congruenţelor, seriilor şi ansamblelor lineare, insistându-se în special asupra reprezentărei unei drepte într'un spaţiu cu cinci dimensiuni, folosind coordonatele lui KLEIN. Se mai găsesc aci noţiuni sumare asupra coordonatelor pentasferice şi asupra curbelor situate într'un spaţiu proiectiv cu mai multe dimensiuni, insistându-se în special asupra spaţiilor osculatoare şi dualităţei. Apoi, după ce spune câteva cuvinte despre suprafeţele riglate dintr'un spaţiu cu trei dimensiuni, termină introducerea cu proprietăţi ale suprafeţelor într'un spaţiu cu mai multe dimensiuni.

Prima parte conţine patru capitole şi are de scop studiul reţelelor. In primul capitol, după ce se face un istoric, se dă definiţia unei reţele într'un spaţiu proiectiv cu n dimensiuni, făcându-se să intervină ecuaţia lui LAPLACE. Cap. II are drept titlu „transformarea reţelelor“ şi începe prin transformările lui LAPLACE, introducând aci şi noţiunea de congruenţă. Urmează un studiu amănunţit al reţelelor şi congruenţelor conjugate şi armonice unele faţă de altele, folosindu-se peste tot de scheme ce ajută mult pe cititor în urmărirea textului. Cap. III conţine studiul reţelelor cu invarianţi egali. Capitolul începe prin proprietatea caracteristică a reţelelor cu invarianţi egali de a avea conicele lui KOENIGS ataşate reţelelor (x_1) şi (x_{-1}) confundate, dă apoi transformarea lui KOENIGS-MOUTARD, teorema lui BIANCHI precum şi o sumă de teoreme aupra acestor reţele speciale. In Capitolul ce urmează întitulat „reţele cuadratice“ locul de frunte îl ocupă teorema permutabilităţei fondată pe transformarea lui RIBAUCOUR. Dar cea mai mare parte a capitolului este consacrată reţelelor cu invarianţi egali dându-se în special transformările lui DARBOUX şi BIANCHI.

Partea a doua conţine studiul şirului lui LAPLACE. In Cap. V este vorba de proprietăţi generale ale acestui şir. După ce se dă definiţia, se consideră şiruri LAPLACE [y] înscrise într'un şir dat [x] cu alte cuvinte şiruri ale căror reţele sunt conjugate congruenţelor şirului iniţial. Un astfel de şir mai este numit şi *şir derivat.* Se definesc apoi şiruri derivate de diferite ordine. Invers, şirul [x] se zice că este circumscris şirului [y]. Tot aci se găsesc şiruri transformate „polare reciproce". Capitolul se termină cu proprietăţi ale şirului lui LAPLACE, provenit dintr'o reţea cuadratică. In Cap. VI sunt studiate şirurile lui LAPLACE terminate într'un sens sau în ambele sensuri. Sunt considerate în special şirurile terminate provenite dintr'o reţea cu invarianţi egali. Cap. VII conţine şiruri LAPLACE periodice. Arată că şirul polar al unui şir periodic este tot periodic, considerând în particular şirurile autopolare. Găseşte condiţia ca un şir înscris sau circumscris unui şir periodic să fie tot periodic. In Cap. VIII sunt considerate în special şiruri LAPLACE periodice provenind dintr'o reţea cu invarianţi egali. Cu această ocazie se extinde în spaţiul cu n dimensiuni o teoremă a lui WILCZYNSCKI relativă la astfel de reţele. Capitolul se termină cu o transformare a acestor şiruri. Cap. IX se referă la şiruri LAPLACE autoproiective. Prin astfel de şiruri ŢIŢEICA înţelege un şir în care două reţele (x_i) şi (x_{m+i}) se deduc una dintr'alta printr'o proiectivitate. Se caută condiţia ca un şir înscris într'un şir autoproiectiv să fie de aceeaşi natură şi apoi se arată că şirul dedus prin dualitate dintr'un şir autoproiectiv este tot autoproiectiv. Rezultă că unui şir autoproiectiv întotdeauna i se poate circumscrie un şir autoproiectiv.

Partea a treia conţine aplicaţii ale reţelelor. Astfel, Cap. X conţine proprietăţi relative la liniile de curbură ale unei suprafeţe dintr'un spaţiu cu trei dimensiuni. După ce se face un scurt istoric şi se dă definiţia, se foloseşte faptul că liniile de curbură au drept imagine într'un spaţiu cu patru dimensiuni o reţea cuadratică pentru a se stabili o serie de proprietăţi. Folosind această imagine teorema lui RIBAUCOUR ne dă o transformare care menţine liniile de curbură. Capitolul este încheiat cu câteva consideraţiuni asupra sistemelor ciclice RIBAUCOUR. In Cap. XI se găsesc proprietăţi ale suprafeţelor isotermice. Folosind imaginea liniilor de curbură dată la capitolul precedent, arată că o suprafaţă este isotermică dacă

imaginea liniilor sale de curbură este o rețea cu invarianți egali. Rezultă de aci, aplicând proprietățile acestor rețele, o serie de proprietăți printre care cele mai importante sunt transformările lui DARBOUX și CHRISTOFFEL. Se mai găsesc aci studiate suprafețele ce au liniile de curbură sferice. In Cap. XII sunt studiate suprafețele raportate la liniile lor asimptotice. Scopul adevărat al acestui capitol îl formează suprafețele Tz despre care am vorbit mai sus. Cap. XIII conține proprietăți ale congruențelor W. După ce se dă o reprezentare a congruențelor W, după GUICHARD, folosind formulele lui LELIEUVRE, se folosește imaginea dată de DARBOUX după care o congruență W din spațiul nostru are într'un spațiu cu cinci dimensiuni drept reprezentare o rețea cuadratică. Urmează studiul rețelelor R despre care am vorbit mai sus. Cap. XIV conține studiul unor probleme speciale care au fost deja analizate de noi (60), (61), (62), (66) și (67).

A doua broșură scrisă de ȚIȚEICA a părut în „*Mémorial des sciences mathématiques*“ și este întitulată „*Introduction à la géométrie différentielle projective des courbes*“. Dau mai jos, în traducere, recenzia făcută în „*Zentralblatt für Mathematik*“ (Bd. I, pag. 164), de D-l E. ČECH:

„In geometria diferențială proiectivă nu s'au studiat amănunțit, până acum [1]), decât curbele plane și cele din spațiul cu trei dimensiuni; aceste cercetări sunt destul de sărace în rezultate geometrice cu aplicațiuni. Autorul crede cu dreptate că trebuesc mai întâiu studiate în deaproape proprietățile geometrice diferențiale intuitive ce sunt imediate, pentru a putea trece apoi cu succes mai departe. In introducere se consideră într'un spațiu proiectiv cu mai multe dimensiuni R_n, varietăți lineare punctuale, cu care ocazie pe lângă spațiile cu un număr finit de dimensiuni se introduc și spații proiective funcționale. „Punctele“ acestui spațiu funțional sunt funcțiuni continui determinate, abstracție făcând de un factor constant $a(\alpha) \neq 0$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$; un „iperplan“ al spațiului funcțional este totalitatea „punctelor“ $x(\alpha)$ care satisfac unei ecuații integrale de forma

$$\int_0^1 a(\alpha)\, x(\alpha)\, d\alpha = 0.$$

1) Recenzia este făcută în 1931.

In Cap. I se definesc curbele reale şi curbele analitice precum şi varietăţile lor osculatoare. In Cap. II se introduce ecuaţia diferenţială lineară care defineşte o curbă într'un R_n. Principiul dualităţei conduce la ecuaţia diferenţială adjunctă; cu această ocazie se ia în considerare şi cazul unei curbe conţinută într'un R_p $(p < n)$. In Cap. III se defineşte derivata de ordinul r, D_r, a curbei D_0, ca fiind curba descrisă de un punct oarecare al planului osculator cu r dimensiuni, la curba D_0. Invers, curba D_0 se numeşte antiderivata de ordinul r a curbei D_r. Determinarea antiderivatelor nu cere nici o cuadratură, aceasta rezultă în mod simplu din faptul că în virtutea principiului dualităţei curbele D_0 şi D_r îşi pot schimba rolul. In Cap. IV se transpun aceste noţiuni în spaţiul funcţional proiectiv; determinarea antiderivatelor se face aci prin cuadraturi. In Cap. V se deduc repede şi elegant câteva proprietăţi foarte interesante ale unei grupe de prime antiderivate ale unei curbe date. In Cap. VI se consideră perechi de curbe (x) şi (y) în R_n unde (y) este derivata de ordinul r a lui (x) şi în acelaşi timp (x) este derivata de ordinul s a lui (y) $(r+s=n+1)$. Se rezolvă complect, fără cuadraturi problema lui KOENIGS, (cazul cel mai simplu: $n=3$, $r=s=2$). In cazul general se arată că soluţia depinde de o funcţiune de o variabilă arbitrară. In Cap. VII se consideră curbele Q_n^0 cari se află pe o ipercuadrică F_2 din R_n precum şi în general curbele Q_n^p ale căror spaţii osculatoare cu p dimensiuni se află pe F_2 (trebue ca $p \leqslant \frac{n}{2} - 1$). Remarcabile sunt autopolarele Q_{2q}^{q-1}. Determinarea lui Q_n^p se face (mai ales după BOREL) fără caudraturi. In Cap. VIII se dau transformări cu ajutorul cărora din curbe Q_n^p deducem curbe de aceeaşi natură; ca aplicaţie se dă o soluţie pur geometrică a problemei lui KOENIGS întâlnită la Cap. VI. In Cap. IX se consideră curbele traectorii ale curbelor proiective (curbe anarmonice). In Cap. X se cercetează două configuraţii speciale cu doi parametrii u, v formate cu ajutorul spaţiilor osculatoare a două curbe date. Cartea, conţinând lecţiile pe cari autorul le-a ţinut la Sorbona în Ianuarie 1926 nu cere cunoştiinţe preliminare, se citeşte uşor şi poate fi recomandată cu insistenţă începătorilor. Totuşi chiar cunoscătorii vor găsi în ea multe sugestii".

Generalizând o teoremă a D-lui CARTAN, în 1931, ȚIȚEICA merge mai departe cu clasificarea curbelor cuadratice (80). Astfel arată că fiind dată o curbă specială de speța p, într'un spațiu proiectiv cu n dimensiuni atunci ne putem aranja să avem: $(x, x) = 0$, $(x', x') = 0, \ldots, (x^{(p)}, x^{(p)}) = 0$, $(x^{(p+1)}, x^{(p+1)}) = 1$, $(x^{(p+2)}, x^{(p+2)}) = 0$, unde $(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2$. Expresia $(x^{(2p+3)}, x^{(2p+3)})$ este un invariant relativ, și dacă este diferit de zero zicem că curba este de *prima clasă;* dacă este nul, iar $(x^{(2p+4)}, x^{(2p+4)}) \neq 0$ (care este tot un invariant relativ) zicem că curba este de *clasa doua*, ș. a. m. d. Ca aplicații se consideră suprafețele riglate nedesfășurabile. In cazul $n = 5$, $p = 0$, $(x''', x''') = 0$, $(x^{IV}, x^{IV}) \neq 0$ suprafețele au linii flecnodale confundate, iar dacă și al doilea invariant este nul suprafața este o cuadrică. Se regăsesc în particular suprafețele Tz. In lucrarea (82), ȚIȚEICA revine asupra rezultatelor din lucrarea precedentă făcând unele precizări de natură geometrică folosind spațiile osculatoare într'un punct al curbei. Mai târziu, în lucrarea (94), ȚIȚEICA se ocupă în special de curbele (x) ale căror curbe polare, în raport cu cuadrica pe care sunt trasate, se găsesc pe aceeași cuadrică. Cu această ocazie arată că aceste curbe intervin în deplasarea cu un parametru din spațiul cu trei dimensiuni. Studiul acestei imagini a deplasărilor cu un parametru formează subiectul lucrării (96).

Conținutul lucrărilor este interesant prin fond cât și prin forma lui. Deaceea, pentruca această dare de seamă a operei lui GEORGE ȚIȚEICA să fie complectă, voiu mai adăuga câteva cuvinte asupra părței formale. In ceea ce privește aportul științific adus de el în geometria afină, în geometria diferențială proiectivă a curbelor și rețelelor, după cum se vede din toate cele spuse mai sus, este atât de covârșitor, încât chiar din timpul vieței, matematicienii timpului, prin stima și considerațiunea ce i-o acordau, i-au scris numele definitiv în istoria matematicilor.

Din lista așa de bogată a lucrărilor lui se vede că în cei 41 ani ce s'au scurs dela publicarea primei lucrări până la ultima, care coincide cu anul morței sale, a avut o activitate continuă. In adevăr, chiar în intervalul 1917—23, care coincide războiului mondial și cu epoca de nesiguranță ce a urmat după el, ȚIȚEICA a scris cartea sa (97), iar în timpul anului 1930 și-a redactat

fascicola ce a apărut în *Memorial.* Această continuitate de lucru este şi mai vădită în idei. Proprietăţile stabilite de el apar în mod firesc fiind înglobate într'un fir conducător pe care l-a urmărit în toate lucrările, după cum chiar el povesteşte într'o notă (74) publicată în cartea lui FABINI şi ČECH. Acest fir nu l-a părăsit decât în puţine ocazii şi atunci de cele mai multe ori pentru a complecta pe contimporanii săi. Şi această posibilitate de complectare i-o dădea superioritatea sa, ce şi-o impunea peste tot unde publica ceva, dată de puternica sa intuiţie geometrică care-l făcea să vadă lucrurile simplu şi clar.

Dar cum se constată uşor majoritatea lucrărilor au fost publicate în dările de seamă ale Academiei franceze, lucru care nu trebue să ne mire, deoarece ŢIŢEICA a apreciat şi iubit întotdeauna şcoala franceză din care făcea parte. Din această cauză lucrările, în majoritatea lor, nu conţin decât rezultate. Totuşi aceste rezultate sunt expuse atât de clar, sunt atât de sistematizate, încât cititorul poate să-l urmărească şi să-l înţeleagă cu uşurinţă. Nicăeri nu foloseşte o numire nouă până nu specifică ce înţelege prin ea; deasemeni nu foloseşte calculul simbolic. Peste tot calculele şi consideraţiunile geometrice sunt astfel înlănţuite, cu atâta măestrie expuse, încât cititorul nici nu-şi dă seama când ajunge la un rezultat surprinzător de interesant. Şi totuşi dacă unele lucrări conţin mai multe indicaţiuni spre a conduce la rezultat, este că acolo ŢIŢEICA dă o metodă nouă. Un exemplu îl formează lucrarea (67) unde este tratată problema aşa de delicată a deformării suprafeţelor în special pentru suprafeţele tetraedrale.

In rezumat, opera lui GEORGE ŢIŢEICA, este bogată în rezultate, plină de idei noi, continuă, clară şi precisă.

GH. TH. GHEORGHIU.

DIMITRIE ISOPESCUL

In programul Liceului ortodox din Suceava [1]) pe anul 1873, se găseşte un memoriu întitulat „*Das Theorem der Fourier'schen Reihen*“ semnat de profesorul de matematici şi fizică DEMETRIUS V. ISOPESCUL.

1) Acest Liceu, împreună cu cel real din Cernăuţi, avea cea mai mare populaţie românească şi ca elevi şi ca profesori. A se vedea interesanta lucrare a D-lui I. E. TOROUŢIU: *Poporaţia şi clasele sociale din Bucovina, Biblioteca Bucovina No. 31—38, Buc. 1916.*

D-na prof. FLORICA CÂMPAN, — o entuziastă cercetătoare a istoriei matematicii în ţara noastră — a avut bunătatea să se informeze la Cernăuţi şi să-mi comunice câteva date biografice despre ISOPESCUL. D-sa a reuşit—prin fiica lui ISOPESCUL, D-na BOLOCAN— să-mi procure unele amănunte interesante. Prezint, şi pe această cale, mulţumirile mele D-nelor CÂMPAN şi BOLOCAN.

DIMITRIE ISOPESCUL, fiul preotului VASILE, s'a născut în 1884 la Frătăuţii-noi din judeţul Rădăuţi. In 1866 şi-a trecut bacalaureatul la Suceava; a făcut studiile universitare la Viena, urmând matematica şi fizica; iar în 1872 şi-a trecut examenul de Stat pentru ocuparea unei catedre în învăţământul secundar, având ca obiecte principale matematica şi fizica, iar ca limbi de predare româna şi germana. După cum am putut vedea din diploma lui ISOPESCUL, acest examen consta dintr'o lucrare făcută acasă *(Hausaufgabe)*; o probă scrisă şi una orală şi o lecţie practică. Interesant e faptul că, în diploma respectivă, se consemnau subiectele propuse la toate aceste probe. Ca lucrare acasă pentru matematici, ISOPESCUL a avut de tratat „*Expunere asupra seriei şi integralei lui* FOURIER" care, fără îndoială, este tocmai lucrarea de mai sus.

Comisia examinatoare, compusă din MIKLOSICH, MOTH [1]) STEFAN [2]) şi TOMASCHEK, laudă chipul în care candidatul a înţeles şi tratat subiectul despre seria lui FOURIER. Pe baza acestui examen, ISOPESCUL a fost numit, în toamna aceluiaş an (1872), profesor de matematici şi fizică la Suceava, unde a funcţionat până la 1904 când a ieşit la pensie. In tot acest timp, ISOPESCUL a fost conducătorul secţiei româneşti. După pensionare s'a stabilit la Cernăuţi, unde a fost directorul unei şcoli particulare şi unde s'a stins din viaţă la 4 Mai 1927.

In afara lucrării pomenite, DIMITRIE ISOPESCUL pare să fi fost colaboratorul fratelui său, SAMUEL ISOPESCUL, şi el profesor la Suceava (de latină şi germană), la traducerea în româneşte a manualului de aritmetică al lui MOČNIK (cu toate că DIMITRIE ISOPESCUL nu figurează în nici un chip ca traducător al acelei cărţi, D-na BOLOCAN îşi aminteşte că părintele D-sale a obţinut un premiu, sau aşa ceva, de pe urma acelei colaborări).

---

1) Profesor de matematici elementare la Universitatea din Viena.
2) Profesor şi cunoscut fizician vienez.
Despre MIKLOSICH şi TOMASCHEK nu au putut găsi informaţii. S'ar putea ca acest TOMASCHEK să fie cunoscutul istoriograf şi geograf de mai târziu, iar MIKLOSICH cunoscutul slavist.

Lucrarea lui DIMITRIE ISOPESCUL, cum e de aşteptat din cele spuse mai sus, nu este o lucrare originală. Ea i-a fost propusă [1]), tot aşa cum se propun încă la unele din Universităţile noastre lucrări pentru trecerea examenului de licenţă în matematici. Prin seriozitatea cu care se tratează una din problemele dificile ale matematicii, cum este acest capitol al seriilor trigonometrice, şi prin informaţia bibliografică pe care—fără a o cita—se vede că o posedă, lucrarea lui ISOPESCUL este însă meritorie. In linii mari, el tratează problema cu metoda şi notaţiile lui DIRICHLET dar se vede că cunoaşte şi lucrările lui CAUCHY şi POISSON. Nu ezită să scoată în evidenţă dificultăţile acestei probleme şi să menţioneze că unele din ele n'au fost încă înlăturate.

Comparat cu ceilalţi pioneri ai matematicii româneşti, ISOPESCUL are un loc aparte. DIMITRIE ASACHI şi ŞTEFAN BOTEZ (lucru curios!) s'au ocupat tot de serii dar au abordat probleme mai simple şi au fost mai originali; EMANOIL BACALOGLU a avut norocul să urmeze cursuri mai serioase şi să fie introdus în cercurile creatorilor în ale matematicii. Pentru a aduce ceva nou în teoria seriilor trigonometrice trebuia să vină minţi mult mai agere şi cu mai multă pregătire decât a unui proaspăt licenţiat. Lucrarea lui DIMITRIE ISOPESCUL rămâne aşa dar ca o foarte bună lucrare de compilaţie.

ILIE POPA
(Conferenţiar la Universitatea din Iaşi).

FORMAREA CÂTULUI ŞI RESTULUI A DOUĂ POLINOAME CÂND ÎMPĂRŢITORUL ESTE DESCOMPUS ÎN FACTORI DE GRADUL INTÂI

1. Intr'o cercetare, din domeniul ecuaţiilor algebrice, am avut nevoe de expresia efectivă a câtului a două polinoame. Impărţitorul era însă descompus în factori de gradul întâi. M'aşi fi putut servi de expresia dată de mine în G. M. [2]), însă asupra acestei formule

1) Cu scopul de a pune la încercare puterea de înţelegere şi sinteză a candidatului.

2) TH. ANGHELUŢĂ: G. M. Vol. XXVIII (1922—23) p. 201.

trebuia să fac transformări ca să ajung la aceea proprie scopului urmărit. In această chestiune sunt deasemenea frumoasele articole ale: regretatului Profesor TR. LALESCU [1]), D. Prof. P. SERGESCU [2]) şi D. Prof. V. ALACI [3]).

Acest articol urmăreşte să pună în evidenţă o metodă simplă, care să poată fi folosită în aplicaţii. El are în acelaşi timp scopul să atragă pe harnicii noştri corespondenţi spre cercetări de Algebră.

Să reamintim întâi o clasă de identităţi, care ne va servi în scopul urmărit.

2. Fie V determinantul lui VANDERMONDE a m numere $a, b, \ldots, k, l$

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a & b & \ldots & l \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^{m-2} & b^{m-2} & \ldots & l^{m-2} \\ a^{m-1} & b^{m-1} & \ldots & l^{m-1} \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\ldots(l-a)(c-b)\ldots (l-b)\ldots(l-k).$$

Avem următoarea identitate:

$$(1)\quad \frac{1}{V}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a & b & \ldots & l \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^{m-2} & b^{m-2} & \ldots & l^{m-2} \\ a^{m-1+p} & b^{m-1+p} & \ldots & l^{m-1+p} \end{vmatrix} = \frac{a^{m-1+p}}{(a-b)\ldots(a-l)} + \frac{b^{m-1+p}}{(b-a)\ldots(b-l)} + \ldots + \frac{l^{m-1+p}}{(l-a)\ldots(l-k)}.$$

Determinantul din prima parte se formează din determinantul V înlocuind elementele ultimei linii prin $a^{m-1+p}, b^{m-1+p}, \ldots, 1^{m-1+p}$. Identitatea (1) nu este altceva decât desvoltarea determinantului din prima parte, după elementele ultimei linii [4]). In adevăr avem

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a & b & \ldots & l \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^{m-1+p} & b^{m-1+p} & \ldots & l^{m-1+p} \end{vmatrix} = a^{m-1+p} V_1 + b^{m-1+p} V_2 + \ldots + l^{m-1+p} V_m$$

1) TR. LALESCU: R. M. T. An. VI (1926) p. 4; G. M. Vol. XXVII (1921—22) p. 105.

2 P. SERGESCU: G. M. Vol. XIX (1913—14) p. 47, 90, 173, 281.

3) V. ALACI: R. M. T. An. V (1925) p. 51, 115; An. VI (1926) p. 163, 168.

4) V. ALACI: R. M. T An. V (1925).

$V_1, V_2, \ldots, V_m$ fiind complimentele algebrice ale elementelor corespunzătoare,

$$V_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots & 1 \\ b & c \ldots & l \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b^{m-2} & c^{m-2} \ldots & l^{m-2} \end{vmatrix} \quad V_2 = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots & 1 \\ a & c \ldots & l \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a^{m-2} & c^{m-2} \ldots & l^{m-2} \end{vmatrix},$$

$$\ldots, \quad V_m = (-1)^{m-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots & 1 \\ a & b \ldots & k \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a^{m-2} & b^{m-2} \ldots & k^{m-2} \end{vmatrix}$$

care sunt determinanţi VANDERMONDE de ordinul $m-1$. Şi avem evident

$$\frac{V_1}{V} = \frac{1}{(a-b)\ldots(a-l)}, \quad \frac{V_2}{V} = \frac{1}{(b-a)\ldots(b-l)},$$

$$\ldots, \frac{V_m}{V} = \frac{1}{(l-a)\ldots(l-k)}$$

prin urmare identitatea (1) este stabilită.

Dacă în identitatea (1) facem

$$p = -1, -2, \ldots, -(m-1)$$

primul membru este evident nul şi obţinem identităţile lui EULER

$$(2) \quad \frac{a^q}{(a-b)\ldots(a-l)} + \frac{b^q}{(b-a)\ldots(b-l)} + \ldots + \frac{l^q}{(l-a)\ldots(l-k)} = 0$$

unde $q = 0, 1, \ldots, m-1$ şi reţinem că m este numărul cantităţilor $a, b, c, \ldots, l$.

Dacă în identitatea (1) facem $p = 0, 1, \ldots, n$ obţinem alte identităţi datorite veneratului profesor D. A. G. IOACHIMESCU [1]) unul din fondatorii *Gazetei Matematice* şi creatorul şcoalei româneşti de studii algebrice. Asupra acestor identităţi a revenit D. Prof. N. ABRAMESCU [2]).

---

1) A. G. IOACHIMESCU: G. M. Vol. VIII, p. 130.

2) N. ABRAMESCU: G. M. Vol. XXVII (1921—22) p. 55.

Pentru aceasta să arătăm [1]) că prima parte a identității (1) este egală cu suma combinărilor cu repetiție a numerelor $a, b, c, \ldots, l$ luate câte p. Cu alte cuvinte prima parte a lui (1) este un polinom omogen și de gradul p al numerelor $a, b, \ldots, l$ termenii lui având toți coeficientul 1. Proprietatea aceasta se dovedește foarte lesne. Să luăm întâi cazul $m = 2$. Avem

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^{1+p} & b^{1+p} \end{vmatrix} = (b-a) \sum_{i=0}^{i=p} a^{p-i} b^i$$

ceea ce demonstră proprietatea enunțată.

Pentru $m = 3$ avem succesiv

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^{2+p} & b^{2+p} & c^{2+p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^{2+p}-a^{2+p} & c^{2+p}-a^{2+p} \end{vmatrix} =$$

$$(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \sum_{i=0}^{p} a^{p-i} b^{i+1} & \sum_{i=0}^{p} a^{p-i} c^{i+1} \end{vmatrix} =$$

$$(b-a)(c-a) \sum_{i=0}^{p} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b^{1+i} & c^{1+i} \end{vmatrix} a^{p-i}.$$

Am redus cazul $m = 3$ la $m = 2$. Am avut astfel

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b^{1+i} & c^{1+i} \end{vmatrix} = (c-b) P_i(b, c)$$

unde $P_i(b, c)$ înseamnă polinomul omogen de grad i al numerelor b și c, coeficienții lui fiind toți 1. Prin urmare deducem

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^{2+p} & b^{2+p} & c^{2+p} \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \sum_{i=0}^{p} a^{p-i} P_i(b, c).$$

Insă suma din partea a doua este polinomul omogen și de grad p al literelor a, b, c coeficienții lui fiind unitatea. Demonstrația pentru m litere se face prin inducție complectă. Am indicat suficient

---

1) Chestiune propusă de VAUTRÉ și soluționată de H. LEBESGUE în Journal de Math. spéciale, 1893, p. 337.

drumul şi nu este nevoe să mai insistăm. Am dovedit astfel identităţile

$$(3)\quad \frac{a^{m-1+p}}{(a-b)\dots(a-l)}+\frac{b^{m-1+p}}{(b-a)\dots(b-l)}+\dots+\frac{l^{m-1+p}}{(l-a)\dots(l-k)}=S_p$$

p luând valorile 0, 1, 2,..., n,... iar S_p fiind polinomul omogen şi de grad p al celor m cantităţi $a, b, \dots, l$, coeficienţii polinomului fiind 1, iar $S_0 = 1$.

Observăm că identităţile (2) şi (3) nu sunt altceva decât identitatea (1).

(Va urma) TH. ANGHELUŢĂ.

PRODUSUL A PATRU NUMERE ÎNTREGI ÎN PROGRESIE ARITMETICĂ POATE FI UN PATRAT?

(Urmare dela pag. 409)

II. Să studiem acum sistemul II de ecuaţii:

$$x^2 - a^2 = 2p^2 \quad , \quad x^2 - 9a^2 = 2q^2.$$

Scădem aceste ecuaţii şi găsim:

$$(20)\qquad 4a^2 = p^2 - q^2.$$

Eliminăm pe a din ecuaţiile precedente şi găsim:

$$(21)\qquad 4x^2 = 9p^2 - q^2,$$

$$(22)\qquad \therefore\ 9p^2 = 4x^2 + q^2.$$

Aci nu putem lua $x = \mathcal{M}3 \pm 1$ şi $q = \mathcal{M}3 \pm 1$ căci atunci în partea a doua ar eşi $\mathcal{M}3 + 2$ care nu poate corespunde patratului din partea întâia. Nu putem lua pe x sau pe q un $\mathcal{M}3$, căci atunci şi celălalt trebue să fie $\mathcal{M}3$, deoarece prima parte este $\mathcal{M}3$. Trebue ca amândoi să fie deodată $\mathcal{M}3$, adică:

$$(23)\qquad x = 3k \quad , \quad q = 3l$$

şi egalitatea precedentă devine:

$$(24)\qquad p^2 = 4k^2 + l^2.$$

Egalităţile (23) şi (20) se pot scrie:

(25) $\quad p^2 - l^2 = (2k)^2 \quad , \quad p^2 - 9l^2 = (2a)^2.$

Insă aceste egalităţi sunt de tipul I pe care l-am studiat în No. precedent al *Gazetei Matematice*. El nu admite dar decât soluţia $p = 0$, care ne duce, din prima ecuaţie II, la $x^2 = a^2$. Dar atunci a doua din ecuaţiile II ne dă $-8a^2 = 2q^2$, ceea ce nu se poate.

Deci în cazul sistemului II nu avem soluţie.

III. In acest caz avem sistemul:

(26) $\quad a^2 - x^2 = p^2 \quad , \quad 9a^2 - x^2 = q^2.$

Ultima ecuaţie nu poate admite $x = \mathcal{M}3 \pm 1$ şi $q = \mathcal{M}3 \pm 1$ căci ar da $(3a)^2 = \mathcal{M}3 + 2$, ceea ce nu se poate. Nu poate să fie unul din ei $\mathcal{M}3$ şi altul nu, căci termenul $9a^2$ e $\mathcal{M}3$. Deci, şi aci, ca şi în cazul precedent, trebue să luăm $x = 3k$, $q = 3l$, şi deci:

(27) $\quad l^2 = a^2 - k^2 \quad , \quad p^2 = a^2 - 9k^2.$

Ecuaţiile acestea sunt de tipul I şi nu se pot verifica decât pentru $k = 0$, ceea ce duce la $x = 0$. Avem atunci progresia aritmetică:

$$\div \quad -3a \,.\, -a \,.\, +a \,.\, +3a.$$

Se verifică în adevăr că

$$(-3a)\ (-a)\ (+a)\ (3a) = 9a^4 = (3a^2)^2.$$

Deci produsul celor patru termeni ai progresiunii dau ca produs un patrat.

Această soluţie a scăpat D-lui V. THÉBAULT în Nota de care am vorbit la începutul acestui articol.

IV. In acest caz avem sistemul:

(28) $\quad a^2 - x^2 = 2p^2 \quad , \quad 9a^2 - x^2 = 2q^2.$

Le scădem şi găsim:

(29) $\quad 4a^2 = q^2 - p^2.$

Eliminând pe a din ecuaţiile (28) găsim:

(30) $\quad 4x^2 - q^2 = 9p^2.$

Acestea nu sunt decât ecuaţiile dela II în care p şi q s'au înlocuit unul cu altul. Deci nu avem soluţie.

* * *

Conchidem dar din acest studiu că singurele progresii de patru termeni al căror produs al termenilor este un patrat sunt:

$$\div \quad a \,.\, a \,.\, a \,.\, a$$

$$\div \quad -3a \,.\, -a \,.\, +a \,.\, +3a.$$

Observarea I. Demonstrația de mai sus justifică teorema:

Patru patrate perfecte nu pot fi nici odată termeni consecutivi ai unei progresii cu rația diferită de 0.

Această chestiune am trimis-o ca problemă de propus revistei *Boletin Matematico.* Nu știu dacă a fost publicată. Soluția o dădusem prin metoda cascadelor a lui FERMAT (descente infinie).

Observarea II. Metoda dată s'ar putea aplica la cercetarea cazului de progresiuni cu mai mult de patru termeni.

ION B. FLORESCU.

PREMIUL „INGINER H. CAPRIEL"

Subiectul propus

Intr'o serie de lucrări *) A. ANGELESCU, fost profesor la Facultatea de Științe din București, s'a ocupat de zerourile anumitor funcțiuni continue și a dedus proprietăți interesante pentru polinoame precum și clase importante de funcțiuni biortogonale.

*) A se cerceta următoarele lucrări:

1. *Sur une représentation des polynomes par des intégrales definies.* (C. R de l'Ac. Sc. Paris 1921, t. 172, p. 1153).
2. *Sur les zéros de certaines fonctions.* (C. R de l'Ac. Sc. Paris, 1922, t. 174, p. 273 .
3. *Sur les zéros de certaines fonctions.* (J. de Mat. pures et appliquées 1923, t. 2, p. 403).
4 *Sur les polynomes hypergéomètriques.* (Nouv. Annales de Math. 1925, t. 3, p. 161).
5. *Sur les polynomes orthogonaux en rapport avec d'autres polynomes.* (Bull. Soc. de Sc. de Cluj, 1921, t. 1, p. 44).
6. *Sur le principe de* LEGENDRE. (Bull. de la Soc. Roumaine des Sc. 1933, t. 35, p. 17).
7. *Asupra unei clase de ecuațiuni având cel mult o rădăcină reală.* („Gazeta Matematică", 1925, Vol. 31, p. 284).

Să considerăm o funcţiune $H(x, \lambda)$ de variabila x şi de parametrul λ, care satisface la următoarele două condiţiuni, numite *condiţiunile* L.

1°. Orice ecuaţie în x de forma

$$(1) \qquad H(x, \lambda_0) + A_1 H(x, \lambda_1) + \ldots + A_s H(x, \lambda_s) = 0,$$

unde $A_1, A_2, \ldots, A_s$ sunt constante şi numerele $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ sunt toate diferite între ele şi cuprinse în intervalul (a, b), nu poate avea mai mult de s rădăcini în intervalul (a, b).

2°. Dacă ecuaţia (1) are s rădăcini în acest interval, primul său membru îşi schimbă semnul când x trece prin una din aceste rădăcini.

A. ANGELESCU **) a demonstrat următoarele teoreme :

I. Dacă o funcţiune $f(x)$ continuă în intervalul (a, b) satisface la condiţiunile

$$\int_a^b K(x) H(x, \lambda_i) f(x)\, dx = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

unde $K(x)$ este o funcţiune de x pozitivă în intervalul (a, b), atunci ecuaţia $f(x) = 0$, are cel puţin n rădăcini reale şi distincte în intervalul (a, b).

II. Fie $\varphi(x, \lambda)$ şi $\psi(x, \mu)$ două funţiuni H care satisfac la condiţiile L. Se pot determina constantele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ precum şi constantele $b_1, b_2 \ldots, b_n$, astfel ca punând

$$P_n = \psi(x, \mu_n) + a_1 \psi(x, \mu_{n-1}) + \ldots + a_n \psi(x, \mu_0)$$

$$Q_n = \varphi(x, \lambda_n) + b_1 \varphi(x, \lambda_{n-1}) + \ldots + b_n \varphi(x, \lambda_0)$$

să avem :

$$\int_a^b K(x) \varphi(x, \lambda_i) P_n\, dx = 0, \quad \int_a^b K(x) \psi(x, \mu_i) Q_n\, dx = 0$$

$$(i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Funcţiunile P_n, Q_n *sunt biortogonale*, adică integrala

$$\int_a^b K(x) P_m Q_{m'}\, dx$$

este nulă când $m \neq m'$ şi diferită de zero când $m = m'$.

**) Lucrarea No. 3.

Aplicaţiuni. A. ANGELESCU a făcut mai multe aplicaţii ale primei teoreme. Astfel a arătat că dacă ecuaţia

$$k^n \alpha_n x(x+1)\dots(x+n-1) + (k^{n-1} \alpha_{n-1} x(x+1)\dots(x+n-2) + \dots + \alpha_0 = 0,$$

unde k este un număr pozitiv, are p rădăcini pozitive distincte, atunci ecuaţia

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_0 = 0,$$

va avea cel puţin p rădăcini pozitive distincte.

Deasemenea luând

$$\varphi(x, \lambda) = x^\lambda \quad , \quad \psi(x, \mu) = e^{-\mu x}$$

a determinat o clasă de funcţiuni biortogonale.

* * *

Se cere să se facă noui aplicaţiuni ale teoremei I şi să se găsească o nouă clasă de funcţiuni biortogonale, studiindu-se totdeodată aceste funcţiuni ***).

COMISIUNEA :
GH. TH. GHEORGHIU, D. V. IONESCU,
ING. D. STOICA.

RAPORT ASUPRA PREMIULUI DE ALGEBRĂ DIN 1939

Subsemnaţii, membrii ai Comisiei pentru decernarea premiului de Algebră, aleasă în şedinţa din 31 August 1939, ne-am întrunit astăzi şi am procedat la cercetarea lucrărilor de Algebră ale corespondenţilor noştri, publicate în *Gazeta Matematică*, anul XLIV.

***) Ca exemplu de studiul unei clase de funcţiuni a se vedea lucrarea No. 4 precum şi volumul :

P. APPELL şi J. KAMPÉ DE FÉRIET, Fonctions hypergéometriques. Polynomes d'Hermite, Paris, Gauthier Villars, 1926.

După regulamentul publicat în *Gazeta Matematică*, anul XLIV, Septemvrie 1938, p. 5, premiul de Algebră „este indivizibil", iar cel premiat trebue „să fie român, elev de liceu din țară".

Din examinarea lucrărilor, am putut constata că Algebra atrage din ce în ce mai mult pe corespondenții Gazetei, dovadă că premiile instituite încep să-și dea roadele. Hotărîrea noastră a fost greu de luat, căci corespondenții *Gazetei Matematice*, care au concurat, sunt mulți, harnici și dibaci cercetători. Ne-ar fi plăcut să propunem Onor Societății „Gazeta Matematică", mai mulți corespondenți, dar am văzut că regulamentul se opune.

Prin urmare, avem onoarea să propunem Societății „Gazeta Matematică" acordarea premiului de Algebră D-lui POPA D. MIRCEA, elev clasa VIII-a dela Liceul Militar din Iași. Motivăm hotărîrea noastră astfel:

1. D-l POPA D. MIRCEA a dat soluții următoarelor probleme de Algebră, rezolvate în *Gazeta Matematică* anul XLIV: 4681 (pag. 43), 4911 (pag. 103), 4945 (pag. 106), 4845 (pag. 212), 4908 (pag. 376), 4876 (pag. 656), 5041 (pag. 667).

2. D-sa dă dovadă de cunoștinți multe, de pătrundere a chestiunilor și de mânuire cu ușurință a calculului algebric.

3. D-sa este un corespondent foarte harnic. Pe coperta *Gazetei Matematice* se găsește publicat cu 56 soluții și o problemă propusă.

4. D-l POPA D. MIRCEA a luat parte la concursul *Gazetei Matematice* din 1939, fiind menționat pentru cunoștințe întinse.

Avem speranța că D-l POPA D. MIRCEA va considera acest premiu ca o încurajare la munca dreaptă și fără preget, așa cum a fost îndrumat de spiritul creat de tradiția *Gazetei Matematice*.

COMISIUNEA:
N. ABRAMESCU, TH. ANGHELUȚĂ,
AL. BUNESCU.

Acest raport s'a citit și aprobat în ședința Adunării Generale dela 8/2, 1940.

NOTE MATEMATICE

33. *O progresie geometrică.* In *Condica lui* ALEXANDRU IPSILANTE, la Capitolul *Hotărnicii* se prevedea:

1. *„Hotărnicia să aibă a se urma întocmai după orânduiala ce a făcut răposatul întru fericire* CONSTANTIN V. MAVROCORDAT, *însă să aibă a se sfârşi prin 3 judecăţi, iar nu 4, şi judecata cea d'âmtâiu să fie alcătuită de 6 boieri, iar cea de a doua de 12 şi cea de a treia de 24 boieri, iar cea de a patra, care era de 48, s'a stricat cu hotărâre de obşte".*

I. I.

34. *Asupra problemei 4927.* Problema aceasta se poate rezolva în cazul numerelor de trei cifre şi pe calea aritmetico-algebrică, întrebuinţată de D-l I. IONESCU în cazul numerelor de două cifre, numai că greutăţile sunt foarte mari, e drept. Avantajul ce se are este iarăşi mare: ea dă *toate* soluţiile problemei, ceea ce nu se poate spera urmând calea dela pag. 379 ş. u.

Fie a, b, c cifrele unui număr N, scris într'o bază oarecare x. Intr'o altă bază y, el va trebui să fie scris cu aceleaşi cifre, luate într'una din cele şase ordine posibile

$$abc \ , \ bac \ , \ cab,$$

$$acb \ , \ bca \ , \ cab.$$

Fie α, β, γ una din aceste ordine. Vom avea

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = \alpha y^2 + \beta y + \gamma.$$

Dacă $\alpha\beta\gamma = abc$, egalitatea (1) conduce la

$$(x - y)\,[a\,(x + y) + b] = 0$$

care cere $x = y$, paranteza mare fiind mereu pozitivă, rămân astfel numai cinci cazuri de studiat. Ne vom mărgini la cazul exprimat prin egalitatea

$$(2) \qquad ax^2 + bx + c = ay^2 + cy + b.$$

Inmulţind ambii membrii cu $4a$, această egalitate se mai poate scrie

$$(3)\quad (2ax+b)^2+(c+2a)^2=(2ay+c)^2+(b+2a)^2,$$

egalitate de forma

$$(4)\quad u^2+v^2=w^2+t^2.$$

Soluţia cea mai generală în întregi a acestei ecuaţiuni este cunoscută şi se obţine uşor; vom avea

$$(5)\quad \begin{aligned} 2ax+b &= \lambda\beta+\mu\alpha \quad , \quad 2ay+c=\lambda\alpha+\mu\beta,\\ c+2a &= \lambda\alpha-\mu\beta \quad , \quad b+2a=\lambda\beta-\mu\alpha, \end{aligned}$$

unde α, β, λ, μ sunt întregi arbitrari, care fac însă pozitivi membrii secunzi ai egalităţilor de mai sus. (α, β) şi (λ, μ) sunt prime între ele.

Din (5) deducem formulele de rezolvare pentru (2), înlocuind μ prin μa, căci α şi β sunt prime între ele:

$$(6)\quad \begin{aligned} x &= 1+\mu\alpha \quad , \quad y=1+\mu\beta,\\ b &= \lambda\beta-a(\mu\alpha+2) \quad , \quad c=\lambda\alpha-a(\mu\beta+2). \end{aligned}$$

Fie $x>y$, rezultă $\alpha>\beta$. Din $0<b<y$, $0<c<y$, rezultă deasemeni

$$a(\mu\alpha+2)<\lambda\beta<a(\mu\alpha+2)+1+\mu\beta,$$

$$a(\mu\beta+2)<\lambda\alpha<a(\mu\beta+2)+1+\mu\beta$$

şi cum $\alpha>\beta$, aceste neegalităţi se înlocuesc prin

$$(7)\quad a(\mu\alpha+2)<\lambda\beta<\lambda\alpha<a(\mu\beta+2)+1+\mu\beta.$$

Din acestea deducem, de exemplu

$$(8)\quad \frac{\lambda}{\mu}>a\frac{\alpha}{\beta}\geqslant 1 \quad , \quad 1<\frac{\alpha}{\beta}<\frac{a+1}{a},$$

deci implicit $\lambda>\mu$.

Problema are, în cazul ecuaţiei (2), atâtea soluţii câte are şi (4), satisfăcând condiţiunile (7).

Fie (u, v, w, t) o soluţie în întregi pozitivi a ecuaţiei (7). Putem scrie aceste valori într'o ordine aşa aleasă încât să avem

$$(9)\quad u+t<v+w \quad \text{deci şi} \quad u-t>w-v$$

unde (u, t), (v, w) sunt de aceeaşi paritate, aşa că neegalităţile (7) devin

$$(10) \quad a(u-t+4) < u+t < w+v < a(w-v+4)+w-v+2$$

care, dacă sunt satisfăcute, dau soluţie şi pentru problema de aritmetică exprimată prin (2), având

$$x = 1 + \frac{u-t}{2} \quad , \quad y = 1 + \frac{w-v}{2},$$

(11)

$$b = \frac{u+t}{2} - a\left(\frac{u-t}{2}+2\right) \quad , \quad c = \frac{w+v}{2} - a\left(\frac{w-v}{2}+2\right).$$

Astfel, $u = 10$, $v = 5$, $w = 11$, $t = 2$ este o soluţie a ecuaţiei (4), pentru care (10) dau $x = 1+4 = 5$, $y = 1+3 = 4$, $b = 6-6a$, $c = 8-5a$. Ultimele sunt satisfăcute dacă $a = 1$, deci $b = 0$, $c = 3$, iar (9) şi (10) sunt implicit satisfăcute.

Deasemeni, $u = 15$, $v = 20$, $w = 24$, $t = 7$ este o soluţie, iar neegalităţile (10) devin

$$12a < 22 < 44 < 8a + 6.$$

Prima este satisfăcută numai pentru $a = 1$, care nu satisface ultima, deci nu avem soluţie.

O problemă practică, în această chestiune este aceea de a examina dacă pentru două baze x şi y, date, există o soluţie. Aceasta revine la a rezolva în primul rând, în întregi pozitivi, sistemul format de (4) şi de primele două egalităţi (11), ceea ce conduce la

$$(12) \quad w,\ v = \frac{(x-1)(x-1+t)}{y-1} \pm (y-1), \quad u = 2(x-1)+t,$$

t fiind arbitrar dar supus condiţiilor de a face întregi pe v şi w, precum şi de a satisface neegalităţile (10), care devin

$$(13) \quad a(x+1) < (x-1+t) < \frac{(x-1)(x-1+t)}{y-1} < a(y+1)+y.$$

De exemplu, dacă $x = 5$, $y = 4$, aceste neegalităţi cer $t = 3s+2$, apoi $s = 0$, $t = 1$ şi regăsim rezultatul anterior.

M. GHERMĂNESCU.

35. *Relaţiuni cu indicatori.*

Imi propun să arat că:

„Dacă $M = A \cdot B$ unde A conţine numai factori de ai lui N, iar B este prim cu N, atunci avem:

$$(1) \qquad \varphi(M \cdot N) = M \cdot \varphi(N) \cdot \frac{\varphi(B)}{B}.$$

In adevăr, fie:

$$N = a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \ldots l^{\lambda}$$

$$A = a^{\alpha'} \cdot b^{\beta'} \ldots l^{\lambda'}$$

$$B = \text{prim cu } N$$

atunci avem:

$$\varphi(M \cdot N) = \varphi(B) \cdot \varphi(N) \cdot A.$$

Dar $A = \frac{M}{B}$, relaţia este deci demonstrată.

Drept o consecinţă se deduce imediat că:

$$(2) \qquad \sigma(M \cdot N) = \frac{1}{2} M^2 \cdot N \cdot \varphi(N) \cdot \frac{\varphi(B)}{B}.$$

Relaţia (1) generalizează inegalităţile stabilite în G. M., XXXIV, la pag. 379 şi 380 şi în G. M., XXXVI, la pag. 164.

CPT. COMANDOR I. LINTEŞ.

36. *Asupra problemei 3354.*

In această problemă se cerea să se arate că, pentru $n \geqq 5$, indicatorul lui $n!$ este divizibil cu 2^n. Soluţia dată în G. M., Vol. 40, pag. 178, este greşită, căci numărul B de acolo este totdeauna egal cu 1, cum se poate uşor constata. Proprietatea enunţată prin această problemă este totuşi adevărată şi o vom demonstra aici.

Fie $n \geqq 3$, 2^{α} resp. 2^{β} puterea cea mai mare a lui 2 cu care se divide $n!$ resp. $\varphi(n!)$. Să notăm, ca deobiceiu, cu:

$[x]$ = cel mai mare întreg $\leqq x$,

$\pi(x)$ = numărul numerilor prime $\leqq x$.

Să mai punem şi

$\pi_k(x)$ = numărul numerilor prime $\leqq x$ şi de forma $2^k q + 1$,

q fiind întreg impar. Avem atunci:

$$\pi(x) = 1 + \pi_1(x) + \pi_2(x) + \ldots,$$

în membrul al doilea având, evident, o sumă finită.

Din formula care dă indicatorul unui număr descompus în factori primi rezultă că:

$$\beta = \alpha - 1 + \pi_1(n) + 2\pi_2(n) + 3\pi_3(n) + \ldots,$$

ceea ce se mai poate scrie şi

$$(1) \quad \beta = \alpha - 2 + \pi(n) + \pi_2(n) + 2\pi_3(n) + 3\pi_4(n) + \ldots$$

Totul revine la găsirea unor limitaţii inferioare convenabile pentru α, $\pi(n)$, $\pi_2(n)$, $\pi_3(n)$, ...

Se ştie că:

$$\alpha = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \left[\frac{n}{2^3}\right] + \ldots$$

Dacă scriem numărul $n = a_1 a_2 \ldots a_m$ în sistemul de numeraţie cu baza 2, avem $a_1 = 1$, $0 \leqq a_i \leqq 1$, $i = 2, 3, \ldots, m$ şi

$$(2) \qquad 2^{m-1} \leqq n < 2^m.$$

Avem:

$$\left[\frac{n}{2_i}\right] = a_1 a_2 \ldots a_{m-i} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m-1$$

$$\left[\frac{n}{2_i}\right] = 0, \; i \leqq m$$

aşa că:

$$n - \alpha = a_1 + a_2 + \ldots + a_m.$$

Rezultă de aici că $n - \alpha \leqq m$, sau $\alpha \geqq n - m$. Dar din (2) scoatem $m \leqq \frac{\log n}{\log 2} + 1$, prin urmare:

$$(3) \qquad \alpha \geqq n - m \geqq n - \frac{\log n}{\log 2} - 1.$$

Să ne ocupăm acum de o limitație a lui $\pi(n)$. După o formulă cunoscută avem, dacă $n = 2k$ este par [1]:

$$\pi(2k) \geqq \frac{\log 2}{2} \cdot \frac{2k}{\log(2k)} > \frac{\log 2}{2} \cdot \frac{2k-1}{\log(2k)}.$$

Ținând seamă de (2) deducem de aici:

$$(4) \qquad \pi(n) \geqq \pi(2^{m-1}) \geqq \frac{2^{m-2}}{m-1}.$$

Pentru $n = 2k+1$ impar putem scrie:

$$\pi(2k+1) \geqq \pi(2k) \geqq \frac{\log 2}{2} \cdot \frac{2k}{\log(2k)}$$

$$= \frac{\log 2}{2} \cdot \frac{2k}{\log(2k+1)} \cdot \frac{\log(2k+1)}{\log(2k)} > \frac{\log 2}{2} \cdot \frac{2k}{\log(2k+1)}.$$

In definitiv

$$(5) \qquad \pi(n) > \frac{\log 2}{2} \cdot \frac{n-1}{\log n}.$$

Putem reveni acum la problema 3354. Formulele (1), (3), (4), (5) ne dau:

$$(6) \quad \beta > n + \frac{2^{m-2}}{m-1} - m - 2 + \pi_2(n) + 2\pi_3(n) + 3\pi_4(n) + \ldots$$

$$(7) \quad \beta > n + \frac{\log 2}{2} \cdot \frac{n-1}{\log n} - \frac{\log n}{\log 2}$$

$$- 3 + \pi_2(n) + 2\pi_3(n) + 3\pi_4(n) + \ldots$$

Avem:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\log 2}{2} \cdot \frac{n-1}{\log n} - \frac{\log n}{\log 2} \right) = +\infty,$$

deci formula (7) ne arată că $\varphi(n!)$ *se divide cu* 2^{n} *pentru n destul de mare.*

---

1) Vezi: EDMUND LANDAU. *Vorlesungen über Zahlentheorie* B. 1, pag. 67.

Se demonstrează uşor că:

$$\frac{2^{m-2}}{m-1} - m - 2 \geqq -5 \quad , \quad (m \text{ întreg} \geqq 2).$$

Pe de altă parte dacă $n \geqq 17$, avem:

$$\pi_2(n) + 2\pi_3(n) + 3\pi_4(n) + \ldots \geqq 5.$$

Formula (6) ne arată deci că, pentru $n \geqq 17$, $\varphi(n!)$ se divide cu 2^n. Examinând pe $\varphi(n!)$ pentru $5 \leqq n < 17$ se vede că *proprietatea e adevărată pentru* $n \geqq 5$.

Se mai poate arăta că $\varphi(n!)$ se divide cu 2^{n+1} pentru $n \geqq 8$, cu 2^{n+2} pentru $n \geqq 12$, cu 2^{n+5} pentru $n \geqq 16, \ldots$ etc. In general *dacă k este un număr natural, există un* N *astfel ca, pentru* $n \geqq$ N, $\varphi(n!)$ *să se dividă cu* 2^{n+k}.

Fără a da aici demonstraţia, căci ar necesita consideraţiuni mai delicate de teoria numerilor, semnalăm următoarea generalizare a proprietăţii precedente:

Dacă p este un număr prim şi k un număr natural, se poate găsi un număr N *astfel ca, pentru* $n \geqq$ N, $\varphi(n!)$ *să se dividă cu* $p^{\left[\frac{n}{p-2}\right]+k}$.

Se poate arăta spre exemplu, că $\varphi(n!)$ se divide cu $3^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ dacă $n \geqq 18$ şi cu $3^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$ dacă $n \geqq 27$. Deasemenea $\varphi(n!)$ se divide cu $5^{\left[\frac{n}{4}\right]}$ dacă $n \geqq 30$ şi cu $5^{\left[\frac{n}{4}\right]+1}$ dacă $n \geqq 50$.

TIBERIU POPOVICIU.

37. *Un sistem multigrad.* I-mi propun a găsi o soluţiune a sistemului multigrad

$$4 \cdot G^{2n} = K^4 + L^4 + M^4 + 2(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$4 \cdot G^{4n} = K^8 + L^8 + M^8 + 2(x^4 + y^4 + z^4).$$

Formula

$$2(i^2 + 3k^2)^\nu = (2ik + 3k^2 - i^2)^\nu + (2ik + i^2 - 3k^2)^\nu + (4ik)^\nu$$

pentru $\nu = 2$ şi 4 dă identităţi de forma

$$2 \cdot A^\nu = B^\nu + C^\nu + D^\nu \qquad (1)$$

(A. MOESSNER *„General formulae for constructing and solving certain simultaneous equations"* din *The Mathematics Student* Vol. 3 anul 1935) unde i şi k sunt oarecare.

Dacă (1) este adevărată pentru $v = 2$ şi 4, atunci şi

$$2(A.A^r)^2 = (B.A^r)^2 + (C.A^r)^2 + (D.A^r)^2$$

$$2(A.A^r)^4 = (B.A^r)^4 + (C.A^r)^4 + (D.A^r)^4$$

sunt adevărate pentru r oarecare. Să punem

$$A.A^r = g^n \quad , \quad B.A^r = K \quad ; \quad C.A^r = L \quad ; \quad D.A^r = M.$$

Vom avea:

$$2.g^n = K^2 + L^2 + M^2$$

$$2.g^{2n} = K^4 + L^4 + M^4$$

pe care ridicându-le la patrat

$$4.g^{2n} = K^4 + L^4 + M^4 + 2[(KL)^2 + (KM)^2 + (LM)^2)$$

$$4.g^{4n} = K^8 + L^8 + M^8 + 2[(KL)^4 + (KM)^4 + (LM)^4].$$

Inlocuim aici pe KL, KM, LM prin x, y, z şi obţinem soluţiuni de ale sistemului propus.

Exemplu numeric. Pentru $i = 1$, $k = 2$ avem

$$2.13^v = 15^v + 7^v + 8^v$$

pentru $v = 2$. Dacă plecând de aici fac $r = 3$ găsesc

$$4.13^4 = 7^4 + 8^4 + 15^4 + 2(56^2 + 105^2 + 120^2)$$

$$4.13^8 = 7^8 + 8^8 + 15^8 + 2(56^4 + 105^4 + 120^2).$$

A. MOESSNER.

38. *O ecuaţie diofantiană.* Un sistem de soluţii ale ecuaţiei

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^3$$

este dat de

$$x = a^3 - 3ac^2 - 2cb^2 + ab^2$$

$$y = b^3 - ba^2 - bc^2 + 4abc$$

$$z = c^3 - 3ca^2 - 2ab^2 + cb^2$$

$$u = a^2 + b^2 + c^2.$$

Iată câteva exemple numerice:

(1) $14^3 = 12^2 + 22^2 + 46^2 = 2^2 + 36^2 + 38^2 = 10^2 + 12^2 + 50^2$

pentru (1, 2, 3), unde (1, 2, 3) înseamnă permutări circulare de-ale literelor *a*, *b*, *c*.

(2) $29^3 = 16^2 + 63^2 + 142^2 = 25^2 + 108^2 + 110^2$

$= 52^2 + 54^2 + 137^2$; (2, 3, 4)

(3) $50^3 = 26^2 + 168^2 + 310^2 = 94^2 + 240^2 + 242^2$

$= 142^2 + 144^2 + 290^2$; (3, 4, 5)

(4) $38^3 = 14^2 + 60^2 + 226^2 = 34^2 + 146^2 + 180^2$

$= 60^2 + 74^2 + 214^2$; (2, 3, 5)

$3^3 = 3^2 + 3^2 + 3^2$; $12^3 = 24^2 + 24^2 + 24^2$; $27^3 = 81^2 + 81^2 + 81^2$

$48^3 = 192^2 + 192^2 + 192^2$; $75^3 = 375^2 + 375^2 = 375^2$

pentru (1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4), (5, 5, 5).

I. I. STAMATE.

BIBLIOGRAFIE

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tom. CXXIX. Fascicola I. Ianuarie 1940. Buenos-Aires. Familii normale de funcţii neanalitice, de MISCHA COTLAR. Derivarea şi integrarea transformatei lui LAPLACE de J. C. VIGNAUX. Consideraţii practice asupra trasării geometrice a cubicei şi strofoidei de JERÓNIMO SANGUINETI.

Boletin Matematico. Anul XIII. Nr. 1. Martie 1940. Buenos-Aires. Cuvântare inaugurată de B. I. BAIDAFF. Asupra unei teoreme referitoare la punctele singulare ale funcţiilor analitice definite prin serii generale DIRICHLET de C. BIGGERI. Asupra reprezentării funcţiilor tip BESSEL de C. V. NEWSON şi A. I. FRANCK.

Idem. Anul XIII. Nr. 2. Martie 1940. Buenos-Aires.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 64. Nr. 3. Martie 1940. Menasha Wis, New-York.

Deutsche Mathematik. Anul IV. Nr. 5. Septemvrie 1939. Leipzig.

Journal de Mathématique élémentaire. Anul 64. Nr. 13. 1 Aprilie 1940. Paris.

Idem. Anul 64. Nr. 14. 15 Aprilie 1940. Paris.

Mathesis. Anul LIV. Nr. 3—4. Martie-Aprilie 1940. Bruxelles. Reciprocitatea rădăcinilor patrate ale unei omografii ternare de R. DEAUX. Construcţia axelor unei conice de centru dat înscrisă unui triunghiu, de R. GOORMAGHTIGH. Asupra a două integrale clasice de J. LEEMANS.

Pitagora. Revista de matematici. Anul V, Nr. 7—8, Aprilie—Mai 1940. Despre natura cantităţilor de S. STOILOV, Asupra unei transformări de TH. COCEA, Asupra unor sume trigonometrice de M. BOTEZ, Despre amortizarea împrumuturilor de C. IACOB, Generalizări în legătură cu epurele de geometrie descriptivă de N. MIHĂILEANU, Asupra unei teoreme a D-lui POMPEIU, de G. G. CONSTANTINESCU, Asupra unor identităţi de A. GLODEN, Asupra ecuaţiei n patrate de O. ENULESCU, O chestiune de metodă de E. VIŞA, Note asupra inversiunii de C. IVĂNESCU, Asupra teoremei CASEY de N. MIHĂILEANU, Asupra unei chestiuni de examen de V. GHIŢESCU, Asupra funcţiilor omogene de M. BOTEZ.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XX. Nr. 1. Martie 1940. Timişoara. Teoreme de geometrie consecinţe ale aplicaţiunilor trigonometriei patratice de O. N. ŢINO. Funcţiuni pseudo-hiperbolice de EUG. VIŞA.

Idem. Anul XX. Nr. 2. Aprilie 1940. Asupra unei proprietăţi a Domnului Profesor V. ALACI de D. V. IONESCU. Funcţiuni Pseudo-Hiperbolice de EUG. VIŞA.

România Aeriană. Anul XIV. Nr. 2—3. Februarie-Martie 1940. Bucureşti.

MIHAIL ST. BOTEZ. *Metode de rezolvare a ecuaţiilor trigonometrice.* Biblioteca Revistei PITAGORA. Monografia Nr. 4. Bucureşti 1940.

MIHAIL GHERMĂNESCU. *Determinarea presiunilor în gurile de foc.* (Extras din Revista Artileriei Nr. 2. 1940).

MIHAIL GHERMĂNESCU. *Sur la variation du moment d'inertie par rapport aux plans passant par une droite.* (Extras din Bulletin Scientifique de l'Ecole Polytechnique Timişoara. 1939).

MIHAIL GHERMĂNESCU. *Une inegalité pour les algebroïdes.* (Extras. Bucureşti 1939).

MIHAIL GHERMĂNESCU. *Sur une classe nouvelle de noyaux de* FREDHOLM. (Extras. Bucureşti 1938).

MIHAIL PIZANTY. *La commercialisation des produits pétrolifères en 1939.* Bucureşti 1940.

V. THÉBAULT. *Géométrie de triangle et du tétraèdre.* (Extras. 1939).

V. THÉBAULT. *Rectangles semblabes associés à un triangle.* (Extras. 1940).

CERERI

292. In „*Istoria Românilor*", Vol. VI, de N. IORGA, se spune la pag. 448: „... iar nepotul, format şi în Apus, unde editase o carte de aritmetică, al Patriarhului DOSOFTEI, acel Hrisant care ..."

Unde se poate găsi acea Aritmetică?

I. I.

293. De cine şi când a fost redactată revista de matematici „*Curierul Matematic*"?

Unde se poate găsi ea?

MIRCEA I. ŞTEFANOVICI.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

M. N. ENACHE DE LA OLT. Sur la théorie des planètes. Bucureşti. Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

M. N. ENACHE DE LA OLT. Sur les anneaux de Saturne. Bucureşti 1908. Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

«*American Mathematical Society*» din New-York a trimes la 4 Martie 1940 un apel către asociaţiile ştiinţifice din toate părţile lumii pentru apărarea, ajutorarea şi conservarea valorilor ştiinţifice puse în pericol în actuala situaţie internaţională.

„Societatea Gazeta Matematică" primind acest apel, răspunde pe această cale că înţelege să conlucreze la opera de asistenţă ştiinţifică în cadrul legilor şi regulamentelor locale, atunci când se va ivi cazul.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1092. *Cunoscând rădăcinile ecuaţiilor algebrice* $f(x) = 0$ *şi* $\varphi(x) = 0$, *să se separe rădăcinele ecuaţiei :*

$$f\varphi' - \varphi f' = 0 \; ; \; f \text{ şi } \varphi$$

două polinoame întregi, f' *şi* φ' *derivatele lor.*

A. G. IOACHIMESCU.

Fie m şi n gradele polinoamelor f şi φ, primii lor termeni având coeficientul 1. Pentru a cunoaşte semnele polinoamelor f şi φ în diferite intervale, vom însemna cu $(-)^q$ semnul $+$ sau $-$ după cum q este par sau impar; cu această notaţie putem aplica în privinţa semnelor, aceleaşi reguli ca şi la înmulţirea puterilor.

Fie $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k$ rădăcinele reale ale ecuaţiei

$$f(x) = 0\,,\ \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_k\,;\ \beta_1\,,\ \beta_2 \ldots \beta_h$$

cantităţile analoage pentru

$$\varphi(x) = 0\ ,\ \beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \ldots \leqslant \beta_h\,;$$

fie în fine $[\psi(x_i)]$ semnul funcţiunei $\psi(x)$ pentru $x = x_i$. Conform acestor convenţiuni avem:

$$x = \quad -\infty \quad \alpha_1 \qquad \alpha_2 \qquad \alpha_3 \ldots \quad \alpha_i \ldots\ldots\ldots \alpha_k \quad + \infty$$

$$[f(x)] \quad (-)^m \quad 0 \quad (-)^{m+1} \quad 0 \quad (-)^{m+2} \quad 0 \ldots \quad 0 \quad (-)^{m+i} \ldots \quad 0 \quad (-)^{m+k}$$

$$[f'(x)] \quad (-)^{m+1} \quad (-)^{m+1} \quad (-)^{m+2} \quad (-)^{m+3} \ldots (-)^{m+i} \ldots (-)^{m+k} \quad (-)^{m+k-1}$$

k şi m fiind de aceeaşi paritate $(-)^{m+k} = +$. Un tablou analog se poate stabili pentru rădăcinile β.

Să presupunem acum rădăcinile α şi β ordonate după mărimea lor. Să considerăm două rădăcini consecutive α s. ex. α_a şi α_{a+1}, avem

$$F(\alpha_a) = f(\alpha_a)\varphi'(\alpha_a) - \varphi(\alpha_a)f'(\alpha_a) = -\varphi(\alpha_a)f'(\alpha_a)$$

şi

$F(\alpha_{a+1}) = -\varphi(\alpha_{a+1})f'(\alpha_{a+1})$, dacă între α_a şi α_{a+1} nu se află nici o rădăcină β, $\varphi\ \alpha_a)$ şi $\varphi(\alpha_{a+1})$ sunt de acelaş semn deci:

$$[F(\alpha_a)] = -[\varphi(\alpha_a)](-)^{m+a} = (-)^{m+a+1}[\varphi(\alpha_a)]\,,$$

$$[F(\alpha_{a+1})] = (-)^{m+a+2}[\varphi(\alpha_{a+1})] \ \therefore\ [F(\alpha_a)][F(\alpha_{a+1})] = -\,;$$

deci: dacă între 2 rădăcini α (β) nu se găseşte nici o rădăcină β (α), atunci între cele două rădăcini considerate se găseşte un număr impar de rădăcini ale ecuaţiei

$$F(x) = f(x)\varphi'(x) - \varphi(x)f'(x) = 0.$$

Să presupunem acum că o rădăcină α_a precede o rădăcină β_b, avem:

$$[F(\alpha_a)] = -[\varphi(\alpha_a)][f'(\alpha_a)] = -(-)^{n+b-1}(-)^{m+a} = (-)^{m+n+a+b},$$

$$[F(\beta_b)] = [f(\beta_b)][\varphi'(\beta_b)] = (-)^{m+a}(-)^{n+b} = (-)^{m+n+a+b},$$

dacă invers o rădăcină β_b precede o rădăcină α_a, avem

$$[F(\beta_b)] = f(\beta_b)][\varphi'(\beta_b)] = (-)^{m+n+a+b-1}$$

$$[F(\alpha_a)] = -[\varphi(\alpha_a)][f'(\alpha_a)] = -(-)^{n+b}(-)^{m+a} = (-)^{m+n+a+b-1},$$

deducem că în ambele cazuri $[F(\beta_b)][F(\alpha_a)] = +$; deci: dacă o rădăcină $\alpha(\beta)$ urmează imediat o rădăcină $\beta(\alpha)$, atunci între ele nu este nici o rădăcină, sau un număr par de rădăcini ale ecuației $F(x) = 0$.

Rămâne de examinat intervalele

$$[-\infty\ ,\ \alpha_1(\beta_1)] \quad \text{și} \quad [\alpha_k(\beta_h)\ ,\ +\infty].$$

Pentru aceasta vom presupune că gradul lui $F(x)$ este $m+n-l$ și că coeficientul termenului de gradul cel mai înalt este $+$. Dacă α_1 este cea mai mică rădăcină, avem:

$$[F(-\infty)] = (-)^{m+n-l},\ [F(\alpha_1)] = -[f'(\alpha_1)][\varphi(\alpha_1)] = (-)^{m+n+2},$$

deci: dacă l este impar între $-\infty$ și α_1 se află un număr impar de rădăcini ale ecuației $F(x) = 0$, iar dacă l este par un număr par de rădăcini. Dacă $\beta_1 < \alpha_1$, printr'un raționament analog se găsește că numărul rădăcinelor coprinse în intervalul $(-\infty, \beta_1)$, este de paritate contrarie cu l.

Dacă α_k este cea mai mare dintre rădăcini se găsește

$$[F(+\infty)][F(\alpha_k)] = -,$$

iar dacă β_h este cea mai mare rădăcină

$$[F(+\infty)][F(\beta_h)] = +, \text{ deci:}$$

între cea mai mare rădăcină și $+\infty$ este un număr impar, sau un număr par de rădăcini ale ecuației $F(x) = 0$ după cum $\alpha_k \gtrless \beta_h$.

Este încă de observat:

a) rădăcinele comune ale ecuațiilor $f(x) = 0$ și $\varphi(x) = 0$ aparțin și ecuației $F(x) = 0$;

b) rădăcinele multiple ale ecuației $f(x) = 0$, respectiv $\varphi(x) = 0$, aparțin și ecuației $F(x) = 0$.

IOAN B. FLORESCU.

PROBLEMA 4479. *In planul triunghiului* ABC *se consideră punctele* M *şi* M′ *şi triunghiurile lor pedale, respectiv*

$$M_a M_b M_c \quad \text{şi} \quad M'_a M'_b M'_c.$$

Notăm punctele:

$$m_a \equiv (AM'_a,\ M_b M_c)\ ;\ m_b \equiv (BM'_b,\ M_c M_a)\ ;\ m_c \equiv (CM'_c,\ M_a M_b)$$

$$m'_a \equiv (AM_a,\ M'_b M'_c)\ ;\ m'_b \equiv (BM_b,\ M'_c M'_a)\ ;\ m'_c = (CM_c,\ M'_a M'_b).$$

Se cere:

1. *Să se arate că următoarele şase drepte:*

$$M_a m_a,\ M_b m_b,\ M_c m_c\ ;\ M'_a m'_a,\ M'_b m'_b,\ M'_c m'_c$$

se întâlnesc în acelaşi punct S.

2. *In ce caz punctele* M, M′, S *sunt colineare?*

GH. D. SIMIONESCU.

Soluţie. 1. Fie (Γ) conica circumscrisă triunghiului ABC şi care trece prin punctele M, M′, pe care s'o presupunem nesingulară adică MM′ nu trece cumva prin unul din vârfurile triunghiului.

Consider un punct Q curent pe (Γ). Transversalele unghiulare AQ, BQ, CQ taie laturile $M_b M_c$, $M_c M_a$, $M_a M_b$ în Q_a, Q_b, Q_c. Dreptele $M_a Q_a$, $M_b Q_b$, $M_c Q_c$ sunt concurente într'un punct R. Această proprietate, valabilă pentru orice punct Q în plan, e o consecinţă a proiectivităţii raportului anarmonic; prefer însă, în cazul când Q aparţine conicei (Γ), a altă demonstraţie.

Când punctul Q se mişcă pe conica (Γ), e vizibil că punctele Q_a, Q_b descriu pe laturile $M_c M_b$, $M_c M_a$ diviziuni proiective. Urmează că dreptele $M_a Q_a$, $M_b Q_b$ descriu două fascicole proiective. In această proiectivitate dreapta $M_a M_b$ este auto-omoloagă. In adevăr $M_a M_b$ taie pe $M_c M_b$ în M_b, dreapta AM_b întâlneşte pe (Γ) în C, iar BC pe $M_c M_a$ în M_a. Dreptei $M_a M_b$ îi corespunde astfel dreapta $M_b M_a$.

Rezultă că punctul comun dreptelor $M_a Q_a$, $M_b Q_b$ descrie o dreaptă (Δ). Dreapta (Δ) trece prin M, punct care se obţine pentru Q = M. Când Q = A, Q = B se deduce că (Δ) trece şi prin punctele A_q, B_q, intersecţiile tangentelor în A şi B respectiv cu $M_c M_b$, $M_c M_a$.

In mod analog se arată că punctul comun dreptelor $M_a Q_a$, $M_c Q_c$ descrie o altă dreaptă, care trece prin M și punctele A_q, C_q de intersecție ale tangentelor în A și C la (Γ) respectiv cu dreptele $M_b M_c$, M_b, M_a, adică tot dreapta (Δ). Unui punct Q de pe (Γ) îi corespund astfel dreptele $M_a Q_a$, $M_b Q_b$, $M_c Q_c$, așa că două din ele oarecare se interesectează pe aceeași dreaptă (Δ), prin urmare ele sunt concurente într'un punct R de pe (Δ).

Locul lui R, când Q descrie conica (Γ), este evident dreapta (Δ). Vreau să arăt că (Δ) este tangentă în M la (Γ) Ori aceasta rezultă din proprietatea a două patrulatere polare reciproce, unul înscris într'o conică, celălalt circumscris ei, de a avea același triunghiu diagonal. Această proprietate altfel enunțată spune:

Tangentele în vârfurile unui triunghiu ABC, înscris într'o conică, taie laturile respective ale triunghiului pedal al unui punct M de pe ea în trei puncte situate pe tangenta în M la conică.

Am spus că (Δ) trece prin A_q, B_q, C_q, intersecțiile tangentelor în A, B, C cu laturile triunghiului pedal al lui M, deci (Δ) este tangentă în M la (Γ).

La fel se demonstrează că, dacă punctul Q descrie conica (Γ), transversalele unghiulare AQ, BQ, CQ taie laturile respective ale triunghiului $M'_a M'_b M'_c$ în punctele Q'_a, Q'_b, Q'_c, astfel că dreptele $M'_a Q'_a$, $M'_b Q'_b$, $M'_c Q'_c$ sunt concurente într'un punct R', care descrie dreapta (Δ'), tangenta în M' la (Γ), dreaptă ce conține punctele A'_q, B'_q, C'_q de intersecție ale tangentelor în A, B, C la (Γ) cu laturile triunghiului $M'_a M'_b M'_b$.

E clar că, printr'o construcție inversă, unui punct R de pe (Δ), îi corespunde un punct Q pe (Γ), iar acestuia prin construcția cunoscută un punct R' pe (Δ'). Avem astfel definită o proiectivitate:

$$(R) \overline{\wedge} (R'). \qquad (\alpha)$$

In această proiectivitate punctele (A_q, A'_q), (B_q, B'_q), (C_q, C'_q) sunt perechi omoloage. O tangentă variabilă la (Γ) determină pe (Δ) și (Δ') puncte ce se corespund într'o proiectivitate în care grupele (A_q, A'_q), (B_q, B'_q), (C_q, C'_q) sunt omoloage. Urmează că această proiectivitate coincide cu proiectivitatea (α). Deci dreapta care unește două puncte omoloage în proiectivitatea (α) înfășoară conica (Γ).

Punctului $S = (\Delta, \Delta')$ considerat pe (Δ) îi corespunde astfel în (α) punctul M', iar considerat pe (Δ'), punctul M.

Aceasta spune în alţi termeni, referindu-mă la construcţia punctelor proiectivităţii (α) că dreptele $M_a\, m_a$, $M_b\, m_b$, $M_c\, m_c$; $M'_a\, m'_a$, $M'_b\, m'_b$, $M'_c\, m'_c$ sunt concurente în S.

2. Pentru ca punctele M, M', S să fie colineare e necesar şi suficient — punctele M, M' rămânând distincte — ca MM' să fie tangentă în M şi M' conicei (Γ), ceea ce spune că (Γ) trebue să devie singulară. Ea se va descompune în dreapta MM' trecând prin unul din vârfurile triunghiului şi latura opusă acestui vârf.

Deci M, M', S sunt colineare, dacă dreapta MM' trece prin unul din vârfurile triunghiului.

Dealtfel verificarea concordă cu rezultatul.

I. I. ŢIŢEICA
Student.

Soluţie analitică. Să notăm cu α, β, γ coordonatele proiective ale punctului M şi cu α', β', γ' pe cele ale lui M'. Cevienele lui M vor fi:

$$(AM_a)\quad \gamma x_2 - \beta x_3 = 0 \quad ; \quad (BM_b)\quad \alpha x_3 - \gamma x_1 = 0 \text{ etc.}$$

iar cevienele lui M':

$$(AM'_a)\quad \gamma' x_2 - \beta' x_3 = 0 \quad ; \quad (BM'_b)\quad \alpha' x_3 - \gamma' x_1 = 0 \text{ etc.}$$

Se deduc ecuaţiile laturilor triunghiului $M_a\, M_b\, M_c$:

$$(M_b\, M_c)\quad -\frac{x_1}{\alpha} + \frac{x_2}{\beta} + \frac{x_3}{\gamma} = 0 \quad ; \quad (M_c\, M_a)\quad \frac{x_1}{\alpha} - \frac{x_2}{\beta} + \frac{x_3}{\gamma} = 0 \text{ etc.}$$

Ecuaţia dreptei $M_a\, m_a$ se obţine scriind că trece prin intersecţia $(M_b\, M_c\, ;\, AM'_a)$, deci este de forma:

$$-\frac{x_1}{\alpha} + \frac{x_2}{\beta} + \frac{x_3}{\gamma} + \lambda\left(\frac{x_2}{\beta'} - \frac{x_3}{\gamma'}\right) = 0$$

care trebue verificată de $M_a\,(0, \beta, \gamma)$ de unde:

$$\lambda = \frac{2\beta'\gamma'}{\gamma\beta' - \beta\gamma'},$$

de unde rezultă:

$$(M_a\, m_a)\quad \frac{\beta\gamma' - \gamma\beta'}{\beta\gamma' + \gamma\beta'} \cdot \frac{x_1}{\alpha} + \frac{x_2}{\beta} - \frac{x_3}{\gamma} = 0$$

şi analog:

$$(M_b\, m_b) \quad -\frac{x_1}{\pi}+\frac{\gamma\alpha'-\alpha\gamma'}{\gamma\alpha'+\alpha\gamma'}\cdot\frac{x_2}{\beta}+\frac{x_3}{\gamma}=0.$$

Aceste două drepte ne dau coordonatele punctului S de intersecţie:

$$S\,[\alpha\alpha'(\beta\gamma'+\gamma\beta') \;;\; \beta\beta'(\gamma\alpha'+\alpha\gamma') \;;\; \gamma\gamma'(\beta\alpha'+\alpha\beta')]$$

care verifică şi ecuaţia dreptei $M_c\, m_c$:

$$(M_c\, m_c)\ \frac{x_1}{\alpha}-\frac{x_2}{\beta}+\frac{\alpha\beta'-\beta\alpha'}{\alpha\beta'+\beta\alpha'}\,\frac{x_3}{\gamma}=0.$$

In tot ce am făcut până aici, dacă schimbăm rolul lui M cu M′, atunci obţinem ecuaţiile dreptelor $M_a'\, m_a'$, $M_b'\, m_b'$ şi $M_c'\, m_c'$ şi deci punctul lor comun, căruia să-i zicem S′. Aceasta înseamnă însă a schimba peste tot rolul lui α, β, γ respectiv cu α', β', γ'. Coordonatele lui S′ se obţin deci din cele ale lui S prin această permutare, care le lasă însă neschimbate. Aşa dar S′ se confundă cu S.

2. Condiţia ca M, M′, S să fie colineare este:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha\alpha'(\beta\gamma'+\gamma\beta') & \beta\beta'(\gamma\alpha'+\alpha\gamma') & \gamma\gamma'(\beta\alpha'+\alpha\beta') \end{vmatrix}=0$$

sau

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{\alpha'}{\alpha} & \dfrac{\beta'}{\beta} & \dfrac{\gamma'}{\gamma} \\ \dfrac{\alpha'}{\alpha}\left(\dfrac{\beta'}{\beta}+\dfrac{\gamma'}{\gamma}\right) & \dfrac{\beta'}{\beta}\left(\dfrac{\gamma'}{\gamma}+\dfrac{\alpha'}{\alpha}\right) & \dfrac{\gamma'}{\gamma}\left(\dfrac{\alpha'}{\alpha}+\dfrac{\beta'}{\beta}\right) \end{vmatrix}=\sum\frac{\beta'\gamma'}{\beta\gamma}\left(\frac{\beta'}{\beta}-\frac{\gamma'}{\gamma}\right)=0$$

sau însfârşit:

$$\left(\frac{\alpha'}{\alpha}-\frac{\beta'}{\beta}\right)\left(\frac{\beta'}{\beta}-\frac{\gamma'}{\gamma}\right)\left(\frac{\gamma'}{\gamma}-\frac{\alpha'}{\alpha}\right)=0$$

ceea ce arată că MM′ trebue să treacă printr'unul din vârfurile triunghiului ABC.

Observație. Soluția geometrică frumoasă a D-lui I. I. ȚIȚEICA, pune în evidență și proprietăți în legătură cu *conica circumscrisă lui* ABC, *ce trece prin* M *și* M'. Astfel se arată că punctul S este polul dreptei MM' față de această conică.

Aceste lucruri se pot regăsi pe cale analitică pornind dela ecuația conicei:

$$\sum \alpha\alpha' (\beta'\gamma - \beta\gamma') x_2 x_3 = 0.$$

Se scriu ecuația tangentelor în M și M' și se găsește că punctul lor comun are aceleași coordonate ca și S.

PROBLEMA. 4650. *Să se arate că ecuațiunea:*

$$(n+1)x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + x + 1 = 0$$

are toate rădăcinile în modul mai mici ca 1. Idem derivatele ei.

LOCOT. C-DOR GH. NICULESCU.

Soluție dată de D-l M. L. A. NEGREA (Brăila).

Prima parte este un caz particular al următoarei teoreme [1]) mai generale demonstrată în articolul D-lui Prof. P. SERGESCU din *Gazeta Matematică*, Vol. XXXVII, pag. 128:

Fie ecuația, cu coeficienți reali sau complexi:

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + k = 0 \qquad (1)$$

în care

$$|A| \geqslant |B| + |C| + \ldots + |k|. \qquad (2)$$

Toate rădăcinile acestei ecuații au modulul subunitar, sau cel mult 1, în unele cazuri particulare când inegalitatea precedentă e transformată în egalitate.

Pentru partea a doua să considerăm derivata de ordinul i al ecuației din enunț. Avem

$$(n+1)\,n\,(n-1)\ldots(n-i+1)\,x^{n-i} + (n-1)(n-2)\ldots \\ (n-i)\,x^{n-i+1} + \ldots + i! = 0. \qquad (3)$$

---

1) Asupra acestei teoreme a revenit și D-l Prof. N. CIORĂNESCU în articolul din *Gazeta Matematică*, Vol. XXXVII, pag. 201.

Ecuaţia (3) are toţi coeficienţii pozitivi. Observând că suma a n numere pozitive este evident mai mică decât de n ori cel mai mare din aceste numere, avem

$$S = i! + \ldots + (n-1)(n-2)\ldots(n-i) < (n-1)(n-1)(n-2)\ldots(n-i)$$

şi cum

$$(n-1)(n-1)(n-2)\ldots(n-i+1)(n-i) < (n+1)\,n(n-1)\ldots(n-i+1)$$

căci

$$(n-1)(n-i) < (n+1)\,n$$

rezultă

$$S < (n+1)\,n(n-1)\ldots(n-i+1)$$

adică coeficienţii ecuaţiei (3) satisfac neegalitatea (2), deci rădăcinele ecuaţiei (3) sunt de modul subunitar.

Propunătorul problemei a arătat că de aceeaşi proprietate se bucură şi rădăcinile derivatelor ecuaţiei

$$(n-1)\,x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1 = 0.$$

PROBLEMA 4927. *Care numere mai mici ca 100 se pot scri cu aceleaşi cifre în două sisteme de numeraţie diferite?*

(Urmare dela pag. 383) I. IONESCU.

Numere în sistemul 5 şi 9.

Avem de căutat soluţii printre numerele 81—99. Criteriul (1) elimină pe 81; criteriul (2) pe 91 şi 93; criteriul (3) pe 86, 87, 88, 89, 95, 96, 97 şi 98. Numerele încep cu 3 în sistemul 5 cifră, care nu se găseşte la numerele 82, 83, 85, 90, 92, 94 şi 99 din sistemul 9. Nu a rămas decât numărul 84 care se scrie 314 în sistemul 5 şi 103 în sistemul 9, şi se vede că el nu dă soluţie a problemei.

Numere în sistemul 6 şi 7.

Aci avem de cercetat numerele 49—99. Criteriul (1) elimină pe 49, 72 şi 98; criteriul (2) elimină pe 57 şi 86; criteriul (3) elimină pe 55, 62, 69, 76, 83, 90 şi 97. Numerele dela 72 în sus încep cu 2 în sistemul 6, cifră pe care nu o au numerele 73, 74, 75, 78, 80, 81, 82, 84, 85, 87, 88, 89, 91, 92, 94, 95 şi 96 în sistemul 7. In acest sistem numerele 49—97 încep cu 1, cifră pe

care nu o au numerele 77, 93 şi 99 în sistemul 6. Ne rămân de cercetat numerele:

N = 50, 51, 52, 53, 54, 56, 58, 59,
In sistemul 6: 122, 123, 124, 125, 130, 132, 134, 135,
In sistemul 7: 101, 102, 103, 104, 105, 110, 112, 113,

N = 60, 61, 63, 64, 65, 66, 67, 68,
In sistemul 6: 140, 141, 143, 144, 145, 150, 151, 152,
In sistemul 7: 114, 115, 120, 121, 122, 123, 124, 125,

N = 70, 71, 79.
In sistemul 6: 154, 155, 211.
In sistemul 7: 130, 131, 142.

Se vede de aici că numai numărul 68 este soluţie căci se scrie 152 în sistemul 6 şi 125 în sistemul 7.

Numere în sistemul 6 şi 8.

Trebue căutate aici soluţiuni printre numerele 64—99. Criteriul (1) elimină pe 64 şi 72; criteriul (2) elimină pe 73 şi 86; criteriul (3) elimină pe 70, 71, 78, 79, 87, 94 şi 95. Numerele 72—99 încep cu 2 în sistemul 6, cifră care lipseşte la numerele 75, 76, 77, 88, 89, 91, 92, 93, 96, 97 şi 99 scrise în sistemul 8. Aceste numere încep cu 1 în sistemul 8, cifră pe care nu o au numerele 74, 84, 90 şi 98 scrise în sistemul 6. Rămân de cercetat numerele:

N = 65, 66, 67, 68, 69, 80, 81, 82,
In sistemul 6: 145, 150, 151, 152, 153, 212, 213, 214,
In sistemul 8: 101, 102, 103, 104, 105, 120, 121, 122,

N = 83, 85.
In sistemul 6: 215, 221.
In sistemul 8: 123, 125.

Se vede că aci nu este nici o soluţie.

Numere în sistemele 6 şi 9.

Numerele de care trebue să ne ocupăm sunt 81—99. Criteriul (1) elimină pe 81; criteriul (2) elimină pe 86 şi 91; criteriul (3) elimină pe 87, 88, 89, 96, 97 şi 98. Numerele încep cu 2 în sistemul 6 şi deci eliminăm pe 82, 84, 85, 90, 92, 93, 94 şi 95 care nu au cifra 2 în sistemul 9. In sistemul 9 numerele încep cu 1 şi deci eliminăm pe 99 care nu are pe 1 în sistemul 6. Nu rămâne decât

numărul 83 care se scrie 214 în sistemul 6 şi 102 în sistemul 9 şi prin urmare nu este soluţie.

Numere în sistemul 7 şi 8.

Avem de examinat numerele 64—99. Criteriul (1) elimină pe 64; criteriul (2) pe 73; criteriul (3) pe 71, 79, 87 şi 95. Apoi 99 începe cu 2 în sistemul 7 şi nu are această cifră în sistemul 7. Rămân de cercetat următoarele numere:

N = 65, 66, 67, 68, 69, 70, 72, 74, 75,
In sistemul 7: 122, 123, 124, 125, 126, 130, 132, 134, 135,
In sistemul 8: 101, 102, 103, 104, 105, 106, 110, 112, 113,

N = 76, 77, 78, 80, 81, 82, 83, 84, 85,
In sistemul 7: 136, 140, 141, 143, 144, 145, 146, 150, 151,
In sistemul 8: 114, 115, 116, 120, 121, 122, 123, 124, 125,

N = 86, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 96,
In sistemul 7: 152, 154, 155, 156, 160, 161, 162, 163, 165,
In sistemul 8: 126, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 140,

N = 97, 98.
In sistemul 7: 166, 200.
In sistemul 8: 141, 142.

Se vede că avem soluţia 94 care se scrie 163 şi 136 în sistemele 7 şi 8. Se vede aici că eficacitatea criteriilor a fost foarte mică în cazul de faţă, pe când au fost cazuri când aplicarea lor a lăsat de încercat un singur număr. S'ar mai fi putut găsi criterii care să mai restrângă încercările, dar timpul cerut de asemenea artificii este de multe ori mai lung decât facerea unei încercări directe.

Numere în sistemele 7 şi 9.

Avem de cercetat numerele 81—99. Criteriul (1) exclude pe 81 şi 98; criteriul (2) pe 91; criteriul (3) pe 88, 89 şi 97. Criteriul (4) aici nu dă nici o eliminare. Ne rămân de cercetat:

N = 82, 83, 84, 85, 86, 87, 90, 92, 93,
In sistemul 7: 145, 146, 150, 151, 152, 153, 156, 161, 162,
In sistemul 9: 101, 102, 103, 104, 105, 106, 110, 112, 113,

N = 94, 95, 96, 99.
In sistemul 7: 163, 164, 165, 201.
In sistemul 9: 114, 115, 116, 120.

Se vede de aici că numai 99, care se scrie 201 în sistemul 7 şi 120 în sistemul 9, este o soluţie a problemei.

Numere în sistemele 8 şi 9.

Şi aici avem de cercetat tot numerele 81—99. Criteriul (1) elimină pe 81; criteriul (2) pe 91; criteriul (3) pe 89 şi 98. Criteriul (4) nu dă nimic. Rămân de cercetat numerele:

N = 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 90, 92, 93,
In sistemul 8: 122, 123, 124, 125, 126, 127, 130, 132, 134, 135,
In sistemul 9: 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 110, 112, 113,

N = 94, 95, 96, 97, 99.
In sistemul 8: 136, 137, 140, 141, 143.
In sistemul 9: 114, 115, 116, 117, 120.

Se vede că aici nu este nici o soluţie. Nu mai putem continua mai departe căci nu mai avem sisteme care să dea numere de 3 cifre mai mici ca 100.

Rezumând rezultatul cercetărilor pentru numerele de 3 cifre, avem următoarele soluţii ale problemei în ordinea mărimii:

Numărul 22 = 211 în sistemul 3 = 112 în sistemul 4.
„ 28 = 130 „ „ 4 = 103 „ „ 5.
„ 46 = 141 „ „ 5 = 114 „ „ 6.
„ 51 = 201 „ „ 5 = 102 „ „ 7.
„ 52 = 310 „ „ 4 = 103 „ „ 7.
„ 66 = 231 „ „ 5 = 123 „ „ 7.
„ 68 = 152 „ „ 6 = 125 „ „ 7.
„ 87 = 322 „ „ 5 = 223 „ „ 6.
„ 91 = 331 „ „ 5 = 133 „ „ 8.
„ 94 = 163 „ „ 7 = 136 „ „ 8.
„ 99 = 201 „ „ 7 = 120 „ „ 9.

Problema admite dar 11 soluţiuni de câte trei cifre.

e) *Să căutăm soluţiunile de patru cifre.*

Tabloul dela început ne arată că pot fi soluţii numai printre numerele dintre 64 şi 80, inclusiv aceste limite. Sistemele nu pot fi decât 3 şi 4. Criteriul (1) elimină pe 64; criteriul (2) pe 80; criteriul (3) pe 67, 71, 75 şi 79. Numerele 65, 68, 69, 76 şi 77 încep cu 2 în sistemul 3, cifră pe care nu o au în sistemul 4. Numerele 72, 74 şi 78 încep cu 1 în sistemul 4 şi nu au această cifră la sistemul 3. Ne rămân dar de cercetat numai numerele:

N = 66, 70, 73.
In sistemul 3: 2110, 2121, 2201.
In sistemul 4: 1002, 1012, 1021.

Nu există pereche cu aceleaşi cifre. Deci nu avem soluţii cu patru cifre.

f) *Să căutăm soluţii cu cinci cifre sau mai multe.*

Tabloul arată că nu sunt numere de cinci cifre decât în sistemul 2 între 16 şi 31 şi în sistemul 3 dela 81 la 99. Intervalele acestea nu au parte comună şi deci nu poate exista soluţii de numere cu mai mult de 4 cifre.

Problema este astfel complect rezolvată.

I. I.

PROBLEMA 5063. *Se dă un cerc* O_1, *un punct* A *şi o dreaptă* D. *Să se construiască un alt cerc* O_2 *care să treacă prin* A *şi să admită cu cercul* O_1 *dreapta* D *ca ax radical. Discuţiune.*

ALEXANDRU V. NICULESCU.

Dintr'un punct B al dreptei D ducem o secantă care taie cercul O_1 în C şi D. Construim cercul ACD. Punctul E fiind intersecţia dreptei AB cu cercul ACD, avem relaţia

$$\overline{BC} \times \overline{BD} = \overline{BA} \times \overline{BE},$$

relaţie din care se vede imediat că punctul E aparţine şi cercului O_2.

Linia centrelor celor două cercuri este perpendiculară din O_1 pe axul radical D. Segmentul AE este o coardă în cercul O_2. Intersecţia perpendicularei pe mijlocul coardei AE şi linia centrelor determină centrul cercului O_2.

Discuțiune.

Distingem două cazuri.

1. Dreapta D este secantă sau tangentă cercului O_1. Problema este totdeauna posibilă, cercul O_2 fiind determinat de punctul A și cele două puncte de intersecție ale dreptei cu cercul O_1.

a) Caz particular când A se află pe O_1 și O_2 se va confunda cu O_1.

b) Caz particular când A este unul din punctele de intersecție sau punctul de tangență între D și O_1. Vom avea o dublă infinitate de soluții.

2. Dreapta D este exterioară. Când A se găsește de aceeași parte cu O_1 față de D, problema nu-i posibilă. Când A se găsește pe partea opusă, problema e posibilă.

La ambele cazuri, D secantă sau exterioară, se poate prezenta cazul particular, când A se află chiar pe D și centrul cercului va fi deci aruncat la infinit.

S'a primit o soluție completă dela D-l CRISTEA D. EFTIMIE (clasa VIII-a, Lic. Gh. Lazăr, București). Soluții apropiate dela D-nii: CERCHEZ MIHU, PĂUȚESCU C-TIN, PANTELIMON V. C-TIN, ROHR ALEXANDRU (Lic. militar, Iași), TEODORESCU DORIN (Lic. militar N. Filipescu), POPA MIRCEA și soluții incomplete dela D-nii: CĂRDEI GH. (Lic. militar, Iași), DRĂGHICESCU PAUL (Lic. militar, Iași), ENESCU D-TRU (Lic. militar, Chișinău), PETRESCU IULIAN (Lic. Gh. Lazăr, București), POPA AUREL (Lic. militar, Iași) și TURCU SANDU (Lic. militar, Iași).

ALEX. V. NICULESCU.

PROBLEMA 5101. *Se dau în plan trei vectori concurenți* V_1, V_2 *și* V_3. *Știind că*

$$\widehat{\vec{V}_1, \vec{V}_2} = 90^0 \ , \ |V_2| = 2|V_1| \ \text{ și } \ |V_3| = 3|V_1|,$$

să se studieze variațiunea mărimii vectorului rezultant al acestor trei vectori și să se găsească hodograful acestui vector, când vectorul V_3 *se rotește în jurul punctului de concurență.*

Ce se întâmplă când vectorul V_3 *se rotește în jurul unui alt punct din plan?*

Se cere o soluție vectorială.

ION S. ANTONIU.

Soluție dată de D-l TEODOR A ȘERBAN student la Politechnica din București.

Rezultanta R se poate scrie:

$$\vec{R} = (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + \vec{V}_3 = \vec{R}_1 + \vec{V}_3$$

$\vec{V}_1$ și $\vec{V}_2$ fiind fixi, și $\vec{R}_1$ va fi fix. Rezultă că extremitatea lui $\vec{R}$ va descrie un cerc de rază $|V_3|$ și de centru extremitatea lui $\vec{R}_1$. Acest cerc este hodograful lui R.

Mărimea vectorului rezultant $|\vec{R}|$ este dată de segmentul de dreaptă ce unește punctul de concurență al vectorilor V_1, V_2, V_3 cu un punct variabil de pe acest cerc. De aici putem deduce variația lui $|R|$ și anume:

$|R|$ variază continuu între un maxim $|R|_M = (\sqrt{5}+3)\,|V_1|$, realizat când $\vec{V}_3$ este colinear și de același sens cu $\vec{R}_1$ și un minim $|\vec{R}|_m = (3-\sqrt{5})\,|V_1|$, realizat când $\vec{R}_1$ și $\vec{R}$ au același suport și sensuri opuse.

Considerațiile precedente s'au făcut considerându-se că $\vec{V}_1$ și $\vec{V}_2$ sunt fixi, ceea ce este tot una cu a considera rotirea relativă a lui V_3 față de sistemul (V_1, V_2).

In cazul când V_3 se rotește în jurul altui punct din plan, considerându-se vectorii echipolenți se obține același rezultat ca mai sus.

O generalizare imediată și care nu prezintă nici o dificultate ar fi dată de cazul $a(n-1)$ vectorii făcând între ei unghiuri fixe și având moduli dați și a unui vector variabil de modul constant.

Au mai rezolvat problema Domnii MIRCEA STĂNCULESCU și PETRE I. TROFIN (Școala Politechnică din București.

I. S. A.

PROBLEMA 5120. *Să se găsească patratul perfect de forma* abccba *știind că prima cifră a rădăcinei este* c.

S-LT. AD. POPESCU.

Soluție dată de D-l CR. D. EFTIMIE (Liceul Lazăr, București).

Ţinând seamă de ultimele 2 cifre ale unui patrat perfect, date la pag. 267 din *Culegere de Probleme de Aritmetică* de D-l I. IONESCU, şi de condiţia enunţului că c este rădăcina patrată exactă sau cu aproximaţie de o unitate în minus a numărului ab formăm următorul tabel al valorilor lui ba şi ale lui c:

$$(1)\quad \begin{cases} ba = 00,\ 01,\ 04,\ 09,\ 16,\ 21,\ 24,\ 25,\ 29,\ 36,\ 41,\ 44, \\ c=\sqrt{ba} = 0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 7,\ 3,\ 6,\ 7,\ 9,\ 7,\ 3,\ 6, \\ ba = 56,\ 61,\ 64,\ 69,\ 76,\ 81,\ 84,\ 89,\ 96. \\ c=\sqrt{ba} = 8,\ 4,\ 6,\ 9,\ 8,\ 4,\ 6,\ 9,\ 8. \end{cases}$$

Observăm că

$$N^2 = abccba = 11\,[11\,(826a + 82b + 9c) + 5a + 8b + c]$$

N^2 fiind divizibil prin 11 trebue ca şi numărul

$$M = 5a + 8b + c \qquad (2)$$

să fie divizibil prin 11.

Dând în (2) lui a, b, c pe rând grupurile de valori din (1) se găseşte că M este divizibil prin 11 numai pentru sistemul de valori

$$a = 6\ ,\ b = 9\ ,\ c = 8$$

care dau şi soluţia

$$836^2 = 698896.$$

Notă. 1°. Au dat soluţii foarte bune pe căi analoage D-nii: P. V. CAZANACLI (Ismail) şi T. C. ŞTEFAN (Şc. ofiţeri geniu, Bucureşti).

2°. Au găsit soluţia exactă pe diferite alte căi, D-nii: D. D. BOIANGIU (Lic. „Traian", T.-Severin); V. G. BÂRLEA-SUHĂŢEANU (Lic. militar, Târgovişte); L. DJEBCU, I. N. GLIGOR (Lic. „Moise Nicoară", Arad); MIRCEA C. NICULESCU (Lic. „T. Maiorescu", Bucureşti); H. REISCHER (Iaşi); M. I. TREFILOV (Lic. „N. Bălcescu", Brăila); M. AL. VASILESCU-STABU (Lic. „Gh. Lazăr", Bucureşti).

PROBLEMA 5159. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$f(x) \equiv Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

ştiind că ecuaţia $f(x-1) = 0$ *este bipătrată, iar* $f(x+1) = 0$ *este reciprocă. Să se arate că, în general, înlocuind pe 1 cu* α *(număr oarecare),* $f(x)$ *are întotdeauna două rădăcini duble. Să se determine valorile acestor rădăcini în funcţie de* α.

VIRGIL GHIŢESCU.

1. Impărţim ecuaţia $f(x) = 0$ cu A, ceea ce nu-i schimbă rădăcinile. Fie

$$f(x) = x^4 + Mx^3 + Px^2 + Qx + R = 0.$$

Desvoltând prin formula lui TAYLOR pe $f(x-1)$ şi $f(x+1)$ se obţine

$$f(x-1) = f(x) - f'(x) + \frac{1}{2}f''(x) - \frac{1}{6}f'''(x) + \frac{1}{24}f^{(IV)}(x) = 0$$

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2}f''(x) + \frac{1}{6}f'''(x) + \frac{1}{24}f^{(IV)}(x) = 0$$

unde

$$f'(x) = 4x^3 + 3Mx^2 + 2Px + Q$$
$$f''(x) = 12x^2 + 6Mx + 2P$$
$$f'''(x) = 24x + 6M$$
$$f^{IV}(x) = 24.$$

Făcând înlocuirile şi grupând găsim

$$f(x-1) = x^4 + (M-4)x^3 + (P-3M+6)x^2 + (Q-2P+3M-4)x + (R-Q+P-M+1) = 0$$

$$f(x+1) = x^4 + (M+4)x^3 + (P+3M+6)x^2 + (Q+2P+3M+4)x + (R+Q+P+M+1) = 0.$$

Prima ecuaţie fiind bipătrată şi a doua reciprocă, trebue să avem:

$$\begin{cases} M-4=0 \\ Q-2P+3M-4=0 \\ R+Q+P+M+1=1 \\ M+4=Q+2P+3M+4. \end{cases}$$

Acest sistem ne procură:

$$M=4\ ;\ P=0\ ;\ Q=-8\ ;\ R=4.$$

Ecuaţia $f(x-1)=0$ devine:

$$x^4 - 6x^2 + 9 = 0,$$

iar rădăcinile ei sunt:

$$x_{12} = \sqrt{3} \quad ; \quad x_{34} = -\sqrt{3}$$

Rădăcinile lui $f(x) = 0$ vor fi deci

$$x_{12} = \sqrt{3} - 1 \; ; \quad x_{34} = -\sqrt{3} - 1$$

In general, înlocuind pe 1 cu α, cele trei ecuații au rădăcinile precum urmează:

$$f(x) \quad = 0 \ldots \; a - \alpha, \quad -a - \alpha, \quad b - \alpha, \quad -b - \alpha$$

$$f(x - \alpha) = 0 \ldots \quad a, \quad -a, \quad b, \quad -b$$

$$f(x + \alpha) = 0 \ldots \; a - 2\alpha, \quad -a - 2\alpha, \quad b - 2\alpha, \quad -b - 2\alpha.$$

Ecuația $f(x + \alpha) = 0$ fiind prin ipoteză reciprocă, trebue să avem una din grupele de relații:

$$(1) \quad \begin{cases} a - 2\alpha = \dfrac{1}{-a - 2\alpha} \\ b - 2\alpha = \dfrac{1}{-b - 2\alpha} \end{cases} \qquad (2) \quad \begin{cases} a - 2\alpha = \dfrac{1}{b - 2a} \\ -a - 2\alpha = \dfrac{1}{-b - 2\alpha} \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} a - 2\alpha = \dfrac{1}{-b - 2\alpha} \\ -a - 2a = \dfrac{1}{b - 2\alpha} \end{cases}.$$

Din fiecare din aceste grupuri se deduce $a = b$ sau $a = -b$ Aceasta dovedește că $f(x) = 0$ are două rădăcini duble.

Valorile acestor rădăcini sunt:

$$(4) \quad \begin{cases} x_{12} = \quad a - \alpha = \quad b - \alpha = \quad \sqrt{4\alpha^2 - 1} - \alpha \\ x_{34} = -a - \alpha = -b - \alpha = -\sqrt{4\alpha^2 - 1} - \alpha \end{cases}$$

sau

$$x_{12} = \quad a - \alpha = -b - \alpha = \quad \sqrt{4\alpha^2 - 1} - \alpha$$

$$x_{34} = -a - \alpha = \quad b - \alpha = -\sqrt{4\alpha^2 - 1} - \alpha.$$

2. Au rezolvat foarte bine această problemă D-na: MARIANA ABRAMESCU POP, D-şoara MIOARA I. CRĂCIUNESCU şi D-nii: C. F. BĂDESCU, C. C. BAKONYI, H. M. BODNĂREŞCU, P. V. CAZANACLI, PANT. V. CONSTANTIN, C. I. C. DIMITRIU, Prof. LEONIDA DJEBCU, OVID ENULESCU, AL. G. JILETCOVICI, G. LEIBOVICI, Sublt. GR. MARTEŞ, ORIGEN MĂRCULESCU, C. I. MOCANU, MIR. A. NEGREA, MIR. C. NICULESCU, C. I. PASCARU, ACHILLE PETRESCU, MIR. D. POPA, GH. POTOPEANU, H. L. REISCHER, D. RIPIANU, AL. I. ROHR, MIR. RUSU, T. ŞERBAN, ŞT. C. TILICĂ şi M. I. TREFILOV.

Soluţii incomplecte au dat D-nii: V. BĂRLEA-SUHĂŢEANU, P. GHEORGHIU, M. PAICU şi E. VIJELIE.

In fine; două soluţiuni sunt inacceptabile.

3. Majoritatea corespondenţilor au rezolvit mai întâiu problema generală obţinând soluţiile (4) în cari apoi au făcut $\alpha = 1$.

4. D-l O. ENULESCU a considerat şi cazul când ecuaţia reciprocă are rădăcinile inverse şi de semne contrarii. D-sa a extins şi mai mult generalizarea dovedind că dacă ecuaţia $f(x-\alpha)=0$ este n — pătrată, iar ecuaţia $f(x+\alpha)=0$ reciprocă, polinomul $f(x)$ este un pătrat perfect, deci are n rădăcini duble.

V. GH.

PROBLEMA 5175. *Fie triunghiul* ABC *înscris în cercul* O *de rază* R. *Fie* C′ *proiecţia lui* C *pe tangenta în* A *la* O *şi* P *intersecţia cu înălţimea din* A *a perpendicularei din* C′ *pe* AB. *Să se arate că, dacă* A *descrie cercul* O, *punctul* P *descrie o elipsă de semiaxe* R *şi* 2R.

LT. I. GH. ZAMFIRESCU.

Soluţie geometrică. Fie încă A_1 proiecţia lui A pe BC, B′ proiecţia lui B pe tangentă, H ortocentrul, H_a mijlocul AH, M mijlocul BC. Se observă uşor egalităţile de unghiuri

$$\sphericalangle BA_1B' = \sphericalangle B'AB = \sphericalangle ACB$$

deci A_1B' şi AC sunt paralele; analog A_1C' şi AB. Atunci unghiurile B′ şi C′ sunt drepte, iar patrulaterul $PB'A_1C'$ e inscriptibil de diametru PA_1; centrul se va afla pe mediatoarea segmentului BC care trecând prin M şi paralelă cu AO trece prin O_a; deci O_a e centrul. Paralela din P la BC taie pe O_aM în I. $MO_a = R$ ca diametru al cercului celor nouă puncte deci $MI = 2R$; M e fix deci O_a şi I descriu cercuri concentrice de raze R şi 2R. P e obţinut ducând din O_a şi I paralele şi perpendiculare pe BC deci conform unei construcţii elementare P descrie o elipsă de centru M de axe R şi 2R.

Observări. 1. Soluţia precedentă este a autorului, pentru care configuraţia precedentă a format un studiu de predilecţie şi cu alte ocazii.

2. Bune soluţii trigonometrice analitice date de D-nii HORIA M. BODNĂRESCU şi MIRCEA D. POPA.

PROBLEMA 5235. *a, b, c* fiind trei arce oarecari, avem relaţia

$$\frac{\sin(b-c)}{\sin a}+\frac{\sin(c-a)}{\sin b}+\frac{\sin(a-b)}{\sin c}+\frac{\sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b)}{\sin a\sin b\sin c}=0.$$

IOAN A. ILIE.

Soluţie dată de D-nii: I. I. STAMATE (stud. mat. Cluj), H. M. BODNĂRESCU şi ŞT. CETĂŢEANU (elevi Şc. Politechnică, Bucureşti), C. GH. CRUCERU şi D. D. BOIANGIU (lic. Traian, Turnu-Severin), M. I. TREFILOV (lic. Brăila), C. C. BAKONYI (lic. Timişoara), VL. GR. RACOVICEANU şi M. M. SOLOMON (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), S. LEIBOVICI (Lic. M. Eminescu, Bucureşti), GH. TOPALESCU (lic. mil. Tg. Mureş), D. D. BUZNEA, M. D. STOENESCU, C. C. ŞERBAN şi E. GH. VIJELIE (lic. mil. Târgovişte), A. MATEESCU şi M. AL. VASILESCU-STABU (lic. mil. Craiova), P. P. DRĂGHICESCU, C. PANTELIMON, A. N. POPA, M. D. POPA şi AL. I. ROHR (lic. mil. Iaşi), I. PETRESCU, J. SEGAL şi M. F. VĂDUVA. Gonind numitorii obţinem relaţia:

$$\Sigma \sin b\sin c\sin(b-c)+\sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b)=0$$

care se găseşte demonstrată în *Culegere de Trigonometrie*, de V. CRISTESCU revăzută de GH. TH. GHEORGHIU, partea I, cap. IX, problema 18. GH. TH. GH.

PROBLEMA 5251. *In triunghiul* ABC, *unghiul* A *are* 120^0; *bisectoarea* AD *taie latura* BC *sub unghiul* D. *Să se arate că*

$$\frac{1}{AD}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$$

$$\sin D=\sin B+\sin C.$$

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţia I. Să presupunem pentru a preciza că $\sphericalangle B > \sphericalangle C$. Atunci

$$\sphericalangle B = 120^0 - D\ ;\ \sphericalangle C = D - 60^0.$$

Relaţia a doua revine la a demonstra că

$$\sin D = \sin(120^0 - D) + \sin(D - 60^0)$$

ceea ce e imediat; deci

$$\sin D = \sin B + \sin C$$

sau

$$1 = \frac{\sin B}{\sin D} + \frac{\sin C}{\sin D}$$

şi conform cu teorema sinusurilor

$$1 = \frac{AD}{AB} + \frac{AD}{AC}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} .$$

Au dat soluţii în acest sens, D-nii: D. D. BOIANGIU (T.-Severin), CONST. V. DIACONESCU (Cernăuţi), C. D. EFTIMIE (Bucureşti), VASILE C. ROLLEA (Cernăuţi), CONST. ŞEIBULESCU (Bucureşti), MIREL D. STOENESCU (M-rea Dealu) şi MIHAIL I. TREFILOV (Brăila).

Observare. 1. D-l O. MĂRCULESCH (Craiova) dă următoarea soluţie geometrică pentru prima relaţie.

Prelungim latura AC cu AE = AB. Triunghiul ABE este echilateral, deci AE = BE, iar BE este paralelă cu bisectoarea AD. Din triunghiurile asemenea BCE şi ACD avem

$$(1) \qquad \frac{BE \text{ (sau } AB)}{AD} = \frac{CE}{AC}$$

dar $$CE = AC + CE = AC + AB$$

încât (1) devine

$$(2) \qquad \frac{AB}{AD} = 1 + \frac{AB}{AC} \quad \text{sau} \quad \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} .$$

2. D-nii V. V. ALDEA, G. G. BOGDAN, M. M. CHINTESCU, C. CRISTEA, A. M. DRAGOMIR, M. C. NICULESCU, C. PANTELIMON au întrebuinţat pentru prima relaţie formula care dă lungimea bisectoarei

$$AD = \frac{2bc}{b+c} \cos\frac{A}{2} = \frac{bc}{b+c} .$$

3. D-nii D. D. BUZNEA, A. N. POPA, G. R. PETRESCU, D, N. THEODORESCU, S. R. TURCU întrebuinţează metoda

$$\text{Aria } ABC = \text{aria } ABD + \text{aria } DAC$$

sau, fiindcă unghiurile din jurul lui A au acelaş sinus

$$AB \,.\, AC = AB \,.\, AD + AC \,.\, AD.$$

4. O transformare prin inversiune de centru A, transformă dreapta BDC într'un triunghiu echilateral B'D'C' înscris într'un cerc ce trece prin A, pentru care AD' = AB' + AC'. Transformata acestei relaţii conduce la enunţ.

PROBLEMA 5256. *Care sunt triunghiurile la care una din înălţimi este suma celorlalte două?* I. IONESCU.

Soluţie dată de D-nii: P. P. DRĂGHICESCU, A. N. POPA, M. D. POPA şi S. C. ZAMFIR (Elevi, Liceul Militar Iaşi).

Fie h_a, h_b, h_c înălţimile unui triunghiu, S aria lui. Avem:

$$S = \frac{1}{2} a \,.\, h_a = b \,.\, h_b = c \,.\, h_c .$$

Să presupunem că:

$$h_a = h_b + h_c .$$

Din aceste două relaţii se deduce uşor:

$$(1/a) = (1/b) + (1/c).$$

De aci se vede că $a < b$ şi $a < c$. Fie $b \leqslant c$. Să examinăm în ce cazuri poate exista un triunghiu care să îndeplinească condiţiunea de mai sus. Rezolvând în raport cu a găsim:

$$a = bc/(b + c).$$

După cele spuse avem evident $a < (b + c)$. Trebue însă să avem şi $a > (c - b)$, adică:

$$bc/(b + c) > c - b,$$

$$c^2 - bc - b^2 < 0.$$

Acest trinom are o rădăcină negativă şi rădăcina pozitivă $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\, b$, sau aproximativ $1{,}618 \ldots b$. Condiţia de posibilitate este dar ca latura cea mare să fie mai mică decât $1{,}618 \ldots$ ori latura mijlocie. Atunci putem calcula latura mijlocie care să ne dea un triunghiu în condiţiunile problemei.

D-nii M. I. TREFILOV, I. A. BADEA, F. I. ABELES, AL. I. ROHR, A. G. JILETCOVICI, C. PANTELIMON, D. D. BUZNEA, C. SLĂTINESCU, D. COZACIUC, E. TEODOR, N. C. JIPA, N. GEORGESCU, G. I. VLĂDESCU, O. KURT, M. S. CHERŢMAN, au dat valoarea lui a fără a discuta cazurile de posibilitate.

EXERCIŢII

27. Notaţiile fiind cele obişnuite într'un triunghiu, să se stabilească relaţia:

$$\left[\frac{r_a + r}{\cos\frac{B - C}{2}}\right]^2 + \left[\frac{r_b + r}{\cos\frac{C - A}{2}}\right]^2 - \left[\frac{r_c + r}{\cos\frac{A - B}{2}}\right]^2 = 4R\,(R - r_c).$$

TUDOR STOICESCU.

R. Din relaţiile:

$$r = 2R \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} \quad ; \quad r_a = 2R \sin\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}, \ldots$$

deducem:

$$r_a + r = 2R \sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) = 2R \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B - C}{2}$$

de unde:

$$\left[\frac{r_a + r}{\cos\frac{B-C}{2}}\right]^2 + \left[\frac{r_b + r}{\cos\frac{C-A}{2}}\right]^2 - \left[\frac{r_c + r}{\cos\frac{A-B}{2}}\right]^2$$

$$= 4R^2\left[\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} - \sin^2\frac{C}{2}\right]$$

ori $$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} - \sin^2\frac{C}{2} = 1 - 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

(A se vedea Culegere de Probleme, V. CRISTESCU, partea I revăzută şi adăogită de D-l GH. TH. GHEORGHIU, pag. 20; (C) din ex. 6)

ori $$1 - 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 1 - \frac{r_c}{R} = \frac{R - r_c}{R};$$

prin urmare membrul I al egalităţii devine:

$$\left[\frac{r_a + r}{\cos\frac{B-C}{2}}\right]^2 + \left[\frac{r_b + r}{\cos\frac{C-A}{2}}\right]^2 - \left[\frac{r_c + r}{\cos\frac{A-B}{2}}\right] = 4R^2.\frac{R - r_c}{R} = 4R(R - r_c).$$

Circular avem încă 2 expresii analoage egale cu $4R(R - r_a)$ şi $4R(R - r_b)$.

PROBLEME PROPUSE

4667 *). Jumătatea sumei sau diferenţei patratelor a două numere impare este deasemeni o sumă sau o diferenţă de două patrate.

M. GHERMĂNESCU.

4914 *). Fiind date m numere întregi, se pot determina în o infinitate de moduri n întregi, aşa fel ca suma patratelor celor $m + n$ întregi să fie egală cu o sumă de p patrate perfecte, iar suma lor să fie egală cu suma rădăcinilor patrate ale celor p patrate, m, n, p fiind daţi.

M. GHERMĂNESCU.

5302. *Problemă investigativă.* Să se studieze geometriceşte *ogiva echilaterală*, adică figura triunghiulară cu o latură rectilinie şi celelalte două arce de cerc descrise din vârfurile acelei laturi cu lungimea ei ca raze.

I. IONESCU.

*) Problemele publicate mai înainte sub aceste numere sunt cunoscute (după comunicarea autorului lor) şi se înlocuesc prin prezentele.

5303. Să se demonstreze că între două numere triunghiulare consecutive există cel puţin un număr prim.

G. G. CONSTANTINESCU.

5304. Să se demonstreze că ecuaţia

$$x^5 + y^5 = u^5 + v^5$$

este imposibilă în numere întregi, dacă $x + y = u + v$.

M. GHERMĂNESCU.

5305. Fie O_1 şi O_2 centrele a două cercuri, care se taie în M şi N. Se complectează paralelogramele O_1MO_2M' şi O_1NO_2N'. Deapta O_1M' taie pe O_1 în C, C', iar O_2M' taie pe O_2 în D, D'. Apoi O_1N' taie pe O_1 în A, A', iar O_2N' taie pe O_2 în B, B'. In fine se notează cu M_1, M_2 şi N_1, N_2 diametrele opuse lui M şi N în cele două cercuri. Punctele A, B, C, D sunt de aceeaşi parte a lui O_1O_2 cu M, iar A', B', C', D' de aceeaşi parte cu N. Cercul O_1 are raza mai mare ca O_2. Să se demonstreze, că:

1°. Dreptele AB, A'B', M_1M_2 trec prin N;

2°. Dreptele CD, C'D', N_1N_2 trec prin M;

3°. M' se află pe M_1M_2, iar N' pe N_1N_2;

4°. Patrulaterele $O_1M'NO_2$, $O_1N'MO_2$ sunt inscriptibile;

5°. Triunghiurile A'N'B', CM'D sunt isoscele.

G-L G. BUICLIU.

5306. Fie G, O_9, H centrul de greutate, centrul cercului celui nouă puncte, ortocentrul triunghiului ABC înscris în cercul O. Perpendicularele coborîte din O pe AG, AO_9, AH intersectează perpendiculara ridicată la mijlocul lui $\overline{AO}$ în punctele A_1, A_2, A_3. Se obţin analog punctele B_1, B_2, B_3 şi C_1, C_2, C_3. Să se arate că grupele de puncte A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; A_3, B_3, C_3 sunt colineare şi că dreptele $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ sunt paralele.

THEODOR G. COCEA.

5307. Se dă un triunghiu ABC şi două puncte fixe P, Q aşezate respectiv pe dreptele AB şi AC. Punctul M fiind variabil în planul triunghiului, paralelele duse prin P şi Q la dreapta AM, întâlnesc dreptele BM şi CM respectiv în H şi K. Să se arate că dreapta HK trece printr'un punct fix.

GH. D. SIMIONESCU.

5308. Prin punctul P de pe diagonala BD a unui paralelogram ABCD se duce două drepte oarecare Δ şi Δ', care taie laturile paralelogramului în opt puncte. Aceste puncte unite în mod convenabil două câte două formează un paralelogram $A_1B_1C_1D_1$, care are o diagonală, diagonala AC a paralelogramului ABCD, iar cealaltă diagonală trece prin punctul P.

Laturile paralelogramului $A_1B_1C_1D_1$ taie laturile paralelogramului ABCD în încă opt puncte, care unite convenabil două câte două formează un paralelogram având laturile paralele cu dreptele Δ şi Δ', iar centrul în punctul P.

MIRCEA D. POPA.

5309. Când centrul de greutate al unui tetraedru se confundă cu centrul de greutate al muchiilor sale sau cu al suprafeţei, atunci muchiile opuse ale tetraedrului sunt egale două câte două. Se păstrază proprietatea în cazul când centrul de greutate al celor şase muchi coincide cu centrul de greutate a suprafeţei.

V. THÉBAULT.

5310. Să se rezolve ecuaţia:

$$z^8 + 4az^7 - 14a^3z^5 - 17a^4z^4 - 6a^5z^3 + 27a^6z^2 + 27a^7z + q = 0.$$

In ce caz această ecuaţie are toate rădăcinile reale?

Să se formeze ecuaţia generală de gradul al optulea, care se rezolvă în acelaşi fel ca ecuaţia dată.

O. N. ŢINO.

5311. Fiind dat un tetradru OABC tridreptunghic în O şi notând A unghiul triedru cu vârful în A, să se demonstreze relaţia:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + 2 \sin A \sin B \sin C = 1.$$

ION C. VASILIU.

5312. Se consideră pe o parabolă trei puncte A, B, C. Tangentele în aceste puncte la parabolă formează un triunghiu MNP (NP fiind tangenta în A, PM în B şi MN în C). Prin B se duce o paralelă la axa parabolei, care taie pe AC în L. Se cere:

1°. Să se arate că figura LMNP este un paralelogram;

2°. Că cercul circumscris triunghiului MNP trece prin focarul F al parabolei;

3°. Să se arate că dacă şi L se află pe acest cerc, N se află pe directoarea parabolei.

4°. Presupunând că dreapta AC trece prin F şi că dreapta BF este perpendiculară pe ea, să se găsească şi să se construiască locul punctului L.

GH. TH. GHEORGHIU.

5313. Se dau ecuaţiile de gradul al doilea în y:

$$y^2 + yf(x) + f'(x) = 0 \quad \text{şi} \quad y^2 + y\varphi(x) + \varphi'(x) = 0.$$

a) Să se determine $f(x)$ şi $\varphi(x)$ astfel încât rădăcinile ecuaţiei a două să fie inversale rădăcinilor ecuaţiei întâi.

b) Între funcţiile f şi φ, astfel determinate, există relaţia:

$$f(x) - \varphi(x) = Cf(x) \cdot \varphi(x),$$

C fiind o constantă.

C. MIHU.

5314. Un fir inextensibil trece prin gaura unei mese orizontale; de unul din capetele sale este prinsă o greutate P aşezată pe masă, iar de celălalt capăt atână o greutate Q. (Lungimea porţiunii de fir aşezată pe masă este l). Se dă lui P o iuţeală v_0 orizontală, perpendiculară pe direcţia firului. Să se determine mărimea acestei iuţeli astfel încât greutatea Q să se ridice cu o distanţă h.

Greutatea firului şi frecările se vor neglija.

GABRIELA ŢIŢEICA.

5315. Să se determine dimensiunile unei plăci omogene dreptunghiulare de suprafaţă S astfel ca perioada micilor oscilaţiuni în jurul mijlocului uneia din laturi să fie minimă. Oscilaţiunile au loc în planul vertical al plăcii.

Frecările şi rezistenţa aerului se vor neglija.

ALEXANDRU STOENESCU.

5316. Se consideră o placă în formă de semicerc de centru O, care se compune din trei jumătăţi de coroane concentrice omogene, razele cercurilor ce le separă fiind r, $2r$, $3r$. Ştiind că densităţile plăcilor corespunzătoare coroanelor sunt în progresie aritmetică, să se determine poziţia centrului de greutate a plăcii. Să se generalizeze la cazul a n jumătăţi de coroane şi apoi, făcând n să crească la infinit, să se determine poziţia centrului de greutate al unei plăci heterogene în formă de semicerc a cărei densitate variază uniform dela centru spre periferie, materia fiind constant repartizată dealungul fiecărui semicerc cu centrul în O. Să se verifice rezultatul cu ajutorul *Calculul Integral*.

RADU BĂDESCU.

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Atanasiu C. V. (5185, 283); *Bakonyi C. C.* (5291); *Bârlea-Suhăţeanu G. V.* (5131); *Bodnărescu M. H.* (5185, 251, 75, 83); *Boiangiu D. D.* (4880, 5054, 55, 219, 71, 87, 99, 300); *Cetăţeanu St.* (4373, 5257); *Cherţman M.* (4075, 342, 785, 5241); *Constantin V. P.* (R); *Cruceru C.* (5265, 73, 82, 83); *Diaconescu V. C.* (5195, 257, 87); *Diaconovici C.* (5287); *Dimitriu I. C.* (4880); *Dragomir Ad.* (5283); *Dragomir M. Er.* (5275); *Florescu L. V.* (5205, 40, 51); *Glogojeanu M.* (5232); *Goormaghtigh R.* (A); *Jareghie I.* (5206, 32); *Jiletcovici G. A.* (5297, 300); *Leibovici S.* (5205, 19, 300); *Metea G. R.* (5267); *Niculescu C. M.* (5145); *Pantelimon C.* (4929, 5190, 232, 34, 63); *Petrescu Iulian* (5125, 299); *Petrescu R. Gh.* (5264, 65, 82); *Pintilie I. I.* (5283); *Popa D. M.* (3019, 459, 88, 4636, 926, 82, 5156, 58, 59, 86, 88, 216, 18, 63, 75, 76, 82, 83, 85); *Rădulescu O.* (5257); *Ripianu D.* (4194, 5249, 78, 85); *Rohr Al.* (4780, 85); *Rollea C. I.* (5287); *Rusu L. Mircea* (3173, 4826, 5176, 300); *Şerban T.* (5285); *Solomon M.* (5251, 83); *Stamate I.* (4880); *Tilică C. Şt.* (4664, 5142); *Topârceanu G.* (5287); *Tudoran Lydia* (5273); *Turcu R. S.* (5244); *Văduva F. M.* (5131, 60, 71, 235, 51, 83); *Vijelie Gh. E.* (5229, 71, 83).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică* Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*

Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 50 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa :

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon : 3-9803).

C. 63.836

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLV

NUMĂRUL 10. — IUNIE 1940

BIBLIOTECA CENTRALĂ ... BUCUREŞTI

SUMARUL

1. Formarea câtului şi restului a două polinoame când împărţitorul este descompus în factori de gradul întâi (urmare şi sfârşit). . . . . *Th. Angheluţă.*
2. Asupra limitării modulelor rădăcinilor ecuaţiilor algebrice. . . . . *P. Sergescu.*
3. O generalizare a principiului inerţiei. . *T. Vescan.*
4. Raportul Comisiunei pentru acordarea premiului „Vasile Cristescu" . . . . *Comisiunea pentru premii.*
5. Note Matematice: 39 — 44.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 294.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 1906, 2116, 2129, 3456, 4055, 4215, 4398, 4777, 5067, 5188, 5213, 5241, 5266, 5273.
10. Exerciţii: 28 — 30.
11. Probleme propuse: 5317 — 5331.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1940

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Cpt. Comandor-Inginer **I. Linteş**; **D. Stoica**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1939 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 5184, 89, 93, 96, 97, 200, 04, 08, 11, 12, 20, 21, 24, 25, 30, 37, 42, 48, 53, 70, 72, 74, 77, 79, 84, 86, 88, 89, 92, 93, 94, 95, 96, 98, 303, 04, 06, 08, 09, 10, 11, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

FORMAREA CÂTULUI ŞI RESTULUI A DOUĂ POLINOAME CÂND ÎMPĂRŢITORUL ESTE DESCOMPUS ÎN FACTORI DE GRADUL INTÂI

(Urmare dela pag. 463)

3. Vom aplica identităţile găsite la problema următoare:

Să se determine câtul şi restul polinomului

(4) $$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

prin polinomul

(5) $$S(x) = (x - a)\ (x - b) \ldots (x - l)$$

presupunând $a \neq b \neq c \neq \ldots \neq l$.

Vom trata apoi şi cazul când unele din aceste numere sunt egale.

Să luăm pentru simplificarea scrisului cazul când împărţitorul are trei factori

(6) $$S(x) = (x - a)\ (x - b)\ (x - c),$$

pentrucă metoda este generală.

Să stabilim întâi formula următoare

(7) $$\frac{1}{\left(1 - \frac{a}{x}\right)\left(1 - \frac{b}{x}\right)\left(1 - \frac{c}{x}\right)} = 1 + \frac{S_1}{x} + \frac{S_2}{x^2} + \ldots + \frac{S_n}{x^n} + \ldots$$

cu condiţia ca $|x|$ [1]) să fie mai mare decât fiecare din numerele $|a|, |b|, |c|$ şi unde $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sunt polinoamele care intervin în identitatea precedentă, adică S_n este polinomul omogen de gradul n prin raport cu a, b, c coeficienţii termenilor lui fiind 1. In condiţiile date avem seriile geometrice

$$\frac{1}{1 - \frac{a}{x}} = 1 + \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \ldots + \frac{a^n}{x^n} + \ldots$$

$$\frac{1}{1 - \frac{b}{x}} = 1 + \frac{b}{x} + \frac{b^2}{x^2} + \ldots + \frac{b^n}{x^n} + \ldots$$

$$\frac{1}{1 - \frac{c}{x}} = 1 + \frac{c}{x} + \frac{c^2}{x^2} + \ldots + \frac{c^n}{x^n} + \ldots$$

1) $|x|$ înseamnă modulul lui x.

Inmulţind primele două avem

$$\frac{1}{\left(1-\frac{a}{x}\right)\left(1-\frac{b}{x}\right)} = 1+\frac{\sigma_1}{x}+\frac{\sigma_2}{x^2}+\ldots+\frac{\sigma_n}{x^n}+\ldots$$

unde σ_n este polinomul analog lui S_n însă relativ numai la a şi b. Inmulţind această desvoltare prin a treia serie geometrică găsim formula dată.

Pentru m litere $a, b, \ldots, l$ avem

$$\frac{1}{\left(1-\frac{a}{x}\right)\left(1-\frac{b}{x}\right)\ldots\left(1-\frac{l}{x}\right)} = 1+\frac{S_1}{x}+\frac{S_2}{x^2}+\ldots+\frac{S_n}{x^n}+\ldots$$

S_n fiind polinomul analog aceluia de mai sus, însă acum relativ la m factori.

Să trecem acum la determinarea câtului şi restului împărţirii lui $P(x)$ prin $S(x)$.

$$\frac{P(x)}{S(x)} = Q(x)+\frac{R(x)}{S(x)}. \tag{8}$$

Ţinând seamă de notaţii avem,

$$\frac{P(x)}{S(x)} = x^{n-3}\,\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}}{\left(1-\frac{a}{x}\right)\left(1-\frac{b}{x}\right)\left(1-\frac{c}{x}\right)}.$$

Presupunând $|x|$ destul de mare, pentru ca formula (7) să se poată aplica, deducem

$$\frac{P(x)}{S(x)} = x^{n-3}\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}\right)\left(1+\frac{S_1}{x}+\frac{S_2}{x^2}+\ldots+\frac{S_n}{x^n}+\ldots\right)$$

sau făcând înmulţirea

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = a_0 x^{n-3}+(a_0 S_1+a_1)x^{n-4}+\ldots+(a_0 S_{n-3}+a_1 S_{n-4}+\ldots+a_{n-3})+\frac{a_0 S_{n-2}+a_1 S_{n-3}+\ldots+a_{n-2}}{x}+\frac{a_0 S_{n-1}+a_1 S_{n-2}+\ldots+a_{n-1}}{x^2}+\ldots+\frac{a_0 S_{n+p}+a_1 S_{n+p-1}+\ldots+a_{n+p}}{x^{p+3}}+\ldots$$

Ţinând seamă de (8) găsim identităţile

$$(9) \qquad Q(x) = a_0 x^{n-3} + (a_0 S_1 + a_1) x^{n-4} + \ldots + (a_0 S_{n-3} + a_1 S_{n-4} + \ldots + a_{n-3})$$

$$(10) \qquad \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{a_0 S_{n-2} + a_1 S_{n-3} + \ldots + a_{n-2}}{x} + \frac{a_0 S_{n-1} + a_1 S_{n-2} + \ldots + a_{n-1}}{x^2} + \ldots + \frac{a_0 S_{n+p} + a_1 S_{n+p-1} + \ldots + a_{n+p}}{x^{p+3}} + \ldots$$

care ne dau câtul şi restul împărţirii polinomului $P(x)$, definit de (4), prin $(x-a)(x-b)(x-c)$. Toate elementele ce intră în expresia din membrul al doilea sunt cunoscute, căci $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ ne sunt daţi de identităţile (3). Cu ajutorul lor putem pune pe $R(x)$ sub forma de polinom de interpolare a lui LAGRANGE.

In adevăr avem pentru $p = 0, 1, 2, \ldots$

$$a_0 S_{n+p} + a_1 S_{n+p-1} + \ldots + a_n S_p = \frac{a^{p+2} P(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^{p+2} P(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^{p+2} P(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

Insă avem şi identităţile (2) pentru $k = 1, 2$, căci suntem în cazul a trei litere. Aşa fiind avem

$$a_0 S_{n-2} + a_1 S_{n-3} + \ldots + a_{n-2} = \frac{P(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{P(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{P(c)}{(c-a)(c-b)}$$

$$a_0 S_{n-1} + a_1 S_{n-2} + \ldots + a_{n-1} = \frac{a P(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b P(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{c P(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

Prin urmare (10) devine

$$\frac{R(x)}{S(x)} = \left[\frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} + \ldots + \frac{a^n}{x^{n+1}} + \ldots\right] \frac{P(a)}{(a-b)(a-c)} + \left[\frac{1}{x} + \frac{b}{x^2} + \ldots + \frac{b^n}{x^{n+1}} + \ldots\right] \frac{P(b)}{(b-a)(b-c)} + \left[\frac{1}{x} + \frac{c}{x^2} + \ldots + \frac{c^n}{x^{n+1}} + \ldots\right] \frac{P(c)}{(c-a)(c-b)}$$

sau

$$\frac{R(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{P(a)}{(x-a)(a-b)(a-c)}$$

$$+\frac{P(b)}{(x-b)(b-a)(b-c)}+\frac{P(c)}{(x-c)(c-a)(c-b)}.$$

Am obținut astfel restul dat sub forma de polinom de interpolare a lui LAGRANGE.

$$R(x) = \frac{P(a)(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{P(b)(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}$$

$$+\frac{P(c)(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Aplicație. Să determinăm câtul $Q(x)$ și restul $R(x)$ a împărțirii polinomului (4) prin $x^p - a^p$

$$Q(x)+\frac{R(x)}{x^p-a^p} = x^{n-p}\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}\right)$$

$$\left(1+\frac{a^p}{x^p}+\frac{a^{2p}}{x^{2p}}+\ldots\right).$$

Deducem

$$Q(x) = \sum_{h=)}^{n-p} A_h x^{n-p-h}$$

unde

$$A_h = a_\rho a^{kp} + a_{\rho+p} a^{(k-1)p} + \ldots + a_{\rho+kp}$$

k și ρ fiind câtul și restul împărțirii lui h prin p

$$h = kp + \rho.$$

Avem și

$$R(x) = \sum_{h=1}^{p} B_h x^{p-h}$$

unde

$$B_h = a_{r+h-p} a^{pq} + a_{r+h} a^{p(q-1)} + \ldots + a_{r+h+p(q-1)}.$$

De altfel $Q(x)$ și $R(x)$ se pot deduce și direct.

Exemplu. Câtul şi restul împărţirii

$$(a_0 x^8 + a_1 x^7 + \ldots + a_8) : (x^3 - a^3)$$

sunt

$$Q(x) = a_0 x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + (a_0 a^3 + a_3) x^2 + (a_1 a^3 + a_4) x + a_2 a^3 + a_5$$

$$R(x) = (a_0 a^6 + a_3 a^3 + a_6) x^2 + (a_1 a^6 + a_4 a^3 + a_7) x + (a_2 a^6 + a_5 a^3 + a_8).$$

4. Să presupunem acum cazul când împărţitorul are factori egali

$$S(x) = (x - a)^p (x - b)^q \ldots (x - l)^t.$$

Metoda dată pentru cazul general rămâne aceeaşi. In adevăr aici avem desvoltările

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{a}{x}\right)^p} = 1 + \Gamma_p^1 \frac{a}{x} + \Gamma_p^2 \frac{a^2}{x^2} + \ldots + \Gamma_p^m \frac{a^m}{x^m} + \ldots$$

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{b}{x}\right)^q} = 1 + \Gamma_q^1 \frac{b}{x} + \Gamma_q^2 \frac{b^2}{x^2} + \ldots + \Gamma_q^m \frac{b^m}{x^m} + \ldots$$

. . . . . .

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{l}{x}\right)^t} = 1 + \Gamma_t^1 \frac{l}{x} + \Gamma_t^2 \frac{l^2}{x^2} + \ldots + \Gamma_t^m \frac{l^m}{x^m} + \ldots$$

Simbolul Γ este acela al combinărilor cu repetiţie.

Aceste desvoltări se pot deduce efectuând împărţirea

$$1 : \left(1 - \frac{a}{x}\right)$$

ordonând câtul după puterile crescătoare a lui $\frac{a}{x}$. Inmulţind aceste desvoltări obţinem

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{a}{x}\right)^p \left(1 - \frac{b}{x}\right)^q \ldots \left(1 - \frac{l}{x}\right)^t} = 1 + \frac{S_1}{x} + \frac{S^2}{x^2} + \ldots + \frac{S_m}{x^m} + \ldots$$

unde S_m este un polinom omogen şi de gradul m prin raport cu $a, b, \ldots, l$, coeficientul termenului $a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda$ fiind $\Gamma_p^\alpha \Gamma_q^\beta \ldots \Gamma_t^\lambda$. Prin urmare

$$S_m = \Sigma \Gamma_p^\alpha \Gamma_q^\beta \ldots \Gamma_t^\lambda a^\alpha b^\beta \ldots l^n$$

unde

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = m,$$

iar suma referindu-se la toate valorile lui $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ supuse acestei condiţii.

Sumele S_m din cazul general şi din cazul particular diferă deci numai prin coeficienţii termenilor.

Se obţine apoi câtul şi restul împărţirii prin formulele (9) şi (10) ţinând seamă de expresiile sumelor S_m.

Aplicaţii. Să se afle câtul împărţirii polinomului [1]).

$$P(x) = x^{2n} - n^2 x^{n+1} + 2(n^2 - 1)x^n - n^2 x^{n-1} + 1$$

cu

$$(x-1)^4.$$

Avem

$$\frac{P(x)}{(x-1)^4} = x^{2n-4}\left(1 - \frac{n^2}{x^{n-1}} + \frac{2(n^2-1)}{x^n} - \frac{n^2}{x^{n+1}} + \frac{1}{x^{2n}}\right)$$

$$\left(1 + \Gamma_4^1 \frac{1}{x} + \Gamma_4^2 \frac{1}{x^2} + \ldots\right) = x^{2n-4} + C_4^3 x^{2n-5} + C_5^3 x^{2n-6} +$$

$$\ldots + C_n^3 x^{n-1} + C_{n+1}^3 x^{n-2} + C_n^3 x^{n-3} + \ldots + C_{n-p-1}^3 x^{n-p-4} +$$

$$\ldots + C_4^3 x + 1.$$

De altfel se poate determina, în acest exemplu, câtul şi direct. Avem în adevăr

$$P(x) = (x-1)^2 [(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)^2 - n^2 x^{n-1}].$$

Împărţind polinomul din paranteză cu $(x-1)^2$ se găseşte rezultatul obţinut prin prima metodă.

2. Să se calculeze coeficienţii polinomului [2]).

$$P(x) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^m)^p.$$

---

1) AUBERT et PAPELIER : Exercices d'Algèbre t. I, p. 20.

2) D. ANDRÉ : Annales Scientifiques de l'École normale supérieure (1876).

Avem

$$P(x) = \frac{(x^{m+1} - 1)^p}{(x-1)^p}$$

şi am redus chestiunea la determinarea câtului împărţirii

$$(x^{m+1} - 1)^p : (x-1)^p .$$

După metoda dată avem

$$P(x) = \frac{x^{mp}\left(1 - \frac{1}{x^{m+1}}\right)^p}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^p} = x^{mp}\left[1 - C_p^1 \frac{1}{x^{m+1}} + C_p^2 \frac{1}{x^{2(m+1)}} - \right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^p \frac{1}{x^{p(m+1)}}\right] \times \left[1 + \Gamma_p^1 \frac{1}{x} + \Gamma_p^2 \frac{1}{x^2} + \ldots + \Gamma_p^q \frac{1}{x^q} + \ldots\right].$$

Se găseşte

$$P(x) = \sum_{n=0}^{pm} A_n x^{mp-n}$$

unde am pus

$$A_n = \sum_{h=0}^{q} (-1)^h \Gamma_p^{n-h(m+1)} C_p^h$$

q fiind partea întreagă a fracţiei $\frac{n}{m+1}$, adică după notaţia lui LEGENDRE

$$q = E\left(\frac{n}{m+1}\right).$$

De ex. pentru $p = 2$ se găseşte

$$(1 + x + \ldots + x^m)^2 = x^{2m} + 2x^{2m-1} + 3x^{2m-2} +$$
$$\ldots + (m+1)\,x^m + \ldots + 2x + 1.$$

Coeficienţii desvoltării au aceleaşi proprietăţi ca şi coeficienţii binominali, ceea ce este evident, căci se ridică la putere polinomul

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^m$$

care are el însuşi aceste proprietăţi.

TH. ANGHELUŢĂ.

ASUPRA LIMITĂRII MODULELOR RĂDĂCINILOR ECUAȚIILOR ALGEBRICE

In Octomvrie 1815, J. J. BRET, profesor la Universitatea din Grenoble, a publicat în *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, ale lui GERGONNE. (Prima revistă de matematici din lume), o serie de trei teoreme, care generalizau, în fond, limitele date de MAC LAURIN pentru rădăcinile pozitive ale ecuațiilor algebrice. Teoremele lui BRET au fost date uitării; ba chiar, după un secol, NIÉLS NIELSEN a scris, în minunata sa carte *Géomètres français sous la révolution* (Paris. 1929, pag. 35) că „BRET *nu* a demonstrat teorema sa, *așa că nu știu dacă e adevărată*". In realitate, BRET *a demonstrat* teorema lui, dar s'a mărginit la un caz particular (o ecuație de gradul 9) pentru ușurarea scrierii; raționamentul lui BRET se poate extinde fără greutate la cazul general. In articolul de față, îmi propun să explicitez unele consecințe folositoare și ușor de aplicat ale limitelor lui MAC LAURIN și să dau o nouă demonstrație pentru limitele lui BRET.

Fie ecuația

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{i-1} x^{n-i+1} - a_i x^{n-i} + \ldots + a_{j-1} x^{n-j+1} - a_j x^{n-j} + \ldots \pm a_n = 0$$

care are numai ν coeficienți negativi

$$-a_i, -a_j, \ldots, -a_s, -a_t .$$

Dacă A e cea mai mare din câtimile $a_i, a_j, \ldots, a_t$, MAC LAURIN a arătat că $1 + (A/a_0)$ e o limită superioară a rădăcinilor pozitive ale lui $f(x) = 0$.

BRET consideră șirul

$$1 + \frac{a_i}{a_0 + a_1 + \ldots + a_{i-1}}, 1 + \frac{a_j}{a_0 + \ldots + a_{i-1} + a_{i+1} + \ldots + a_{j-1}},$$

$$\ldots, + 1 \frac{a_t}{a_0 + \ldots + a_{i-1} + a_{i+1} + \ldots + a_{j-1} + a_{j+1} + \ldots + a_{t-1}}$$

în care numărătorii sunt valorile absolute ale coeficienților negativi, iar numitorii sunt: suma tuturor coeficienților pozitivi care preced pe cel dela numărător. Marginea superioară a acestui șir,— adică cel mai mare din termenii șirului, este o limită superioară a rădăcinilor ecuației $f(x) = 0$.

Limita lui MAC LAURIN se poate aplica pentru găsirea limitei superioare (şi inferioare) a modulelor rădăcinilor unei ecuaţii algebrice oarecare:

$$\varphi(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_{n-1} x + c_n = 0.$$

Să însemnăm $| c_i | = C_i$. Avem:

$$| \varphi(x) | > | c_0 x^n | - | c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_n |$$
$$> | c_0 x^n | - | c_1 x^{n-1} | - | c_2 x^{n-2} | - \ldots - | c_n |.$$

Insemnând $| x | = \rho$, avem deci

$$| \varphi(x) | > C_0 \rho^n - C_1 \rho^{n-1} - C_2 \rho^{n-2} - \ldots - C_n.$$

Dacă ρ_0 e rădăcina pozitivă a ecuaţiei

$$C_0 \rho^n - C_1 \rho^{n-1} - \ldots - C_n = 0$$

rezultă că $| \varphi(x) | > 0$ pentru $| x | > \rho_0$. Cu alte cuvinte, modulele rădăcinilor lui $\varphi(x) = 0$ sunt mai mici ca ρ_0.

Fie C_k cel mai mare din numerele $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Conform limitei lui MAC LAURIN

$$\rho_0 < 1 + \frac{C_k}{C_0} = \frac{C_0 + C_k}{C_0}.$$

Aplicând acelaşi raţionament ecuaţiei transformate în $1/x$, rezultă că modulele rădăcinilor ecuaţiei $\varphi(x) = 0$ sunt mai mari ca $\frac{C_n}{C_n + C_k}$. Deci:

Modulele rădăcinilor ecuaţiei $\varphi(x) = 0$ *sunt cuprinse între* $\frac{C_n}{C_n + C_k}$ şi $\frac{C_0 + C_k}{C_0}$ *unde* C_k *e modulul cel mai mare al coeficienţilor lui* $\varphi(x)$, C_0 *şi* C_n *sunt modulele coeficientului lui* x^n *şi al termenului liber.*

In particular, dacă coeficientul lui x^n are cel mai mare modul, avem $C_k \leqslant C_0$ (oricare ar fi k) şi deci $\rho_0 < 2$, adică:

Modulele rădăcinilor ecuaţiilor în care coeficientul lui x^n *e cel mai mare în modul sunt mai mici ca 2.*

In mod absolut analog: *modulele rădăcinilor ecuaţiilor în care termenul liber e cel mai mare în modul, sunt mai mari ca 1/2.*

Exemple. Modulele rădăcinilor ecuației:

$$4x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + x^2 - 3x + 4 = 0$$

sunt cuprinse între 1/2 și 2.

Modulele rădăcinilor ecuației:

$$3x^5 - 8x^4 + 4x^3 + 9x^2 - 5x + 1 = 0$$

sunt cuprinse între 0,1 și — 4.

Demonstrația teoremei lui BRET. Să însemnăm cu $g_1(x)$, $g_2(x) \ldots g_v(x)$ polinoamele-secțiuni din $f(x)$:

$$g_1(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{i-1} x^{n-i+1} - a_i x^{n-i}$$

$$g_2(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{j-1} x^{n-j+1} - a_j x^{n-j}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$g_v(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{t-1} x^{n-t+1} - a_t x^{n-t}$$

care încep cu $a_0 x^n$ și se termină respectiv cu $-a_i x^{n-i}$, $-a_j x^{n-j}$, $\ldots$, $-a_t x^{n-t}$. Vom căuta o valoare X a lui x pentru care fiecare din aceste polinoame-secțiuni rămâne *pozitiv*. Atunci e evident că pentru $x > X$, $f(x)$ rămâne mereu pozitiv și deci X este o limită superioară a rădăcinilor pozitive ale lui $f(x) = 0$. Presupunem că această limită superioară e mai mare ca 1 și punem $x = (1 + y)$.

Avem în general, oricare ar fi x:

$$(1+y)^p = 1 + C_p^1 y + C_p^2 y^2 + \ldots + y^p > 1 + C_p^1 y = 1 + p y.$$

Prin urmare:

$$g_1(x) = x^{n-i}(a_0 x^i + a_1 x^{i-1} + \ldots + a_{i-1} x - a_i)$$

$$= x^{n-i}[a_0(1+y)^i + a_1(1+y)^{i-1} + \ldots + a_{i-1}(1+y) - a_i]$$

$$> x^{n-i}[a_0(1+iy) + a_1(1+(i-1)y) + \ldots + a_{i-1}(1+y) - a_i].$$

Cantitatea din croșetă rămâne evident pozitivă, dacă luăm pe y egal sau mai mare ca:

$$\frac{a_i}{ia_0 + (i-1)a_1 + \ldots + a_{i-1}}.$$

Cu alte cuvinte, pentru

$$x \geqslant 1 + \frac{a_i}{ia_0 + (i-1)a_1 + \ldots + a_{i-1}}$$

avem:

$$g_1(x) > x^{n-i}(a_0 + a_1 + \ldots + a_{i-1})$$

$$g_2(x) > (a_0 + a_1 + \ldots + a_{i-1})\, x^{n-i} + a_{i+1} x^{n-i-1} + \ldots + a_{j-1} x^{n-j+1} - a_j x^{n-j}.$$

Aplicând lui $g_2(x)$ exact acelaş raţionament ca lui $g_1(x)$, avem:

$$g_2(x) = x^{n-j}[(a_0 + a_1 + \ldots + a_{i-1})x^{j-i} + a_{i+1}x^{j-i-1} + \ldots a_{j-1}x - a_j]$$
$$> x^{n-j}[(a_0 + a_1 + \ldots + a_{i-1})(1 + (j-i)y) + a_{i+1} \times$$
$$(1 + (j-i-1)y) + \ldots + a_{j-1}(1+y) - a_j]$$

şi deci, pentru:

$$y \geqslant \frac{a_j}{(j-i)(a_0 + a_1 + \ldots + a_{i-1}) + (j-i-1)a_{i+1} + \ldots + a_{j-1}}$$

avem:

$$g_2(x) > x^{n-j}(a_0 + a_1 + \ldots + a_{i-1} + a_{i+1} + \ldots + a_{j-1}).$$

Este evident că acest raţionament se aplică la toate cele v polinoame secţiuni. Ca urmare, dacă x e mai mare decât toate cantităţile:

$$1 + \frac{a_i}{ia_0 + (i-1)a_1 + \ldots + a_{i-1}},$$

$$1 + \frac{a_j}{(j-i)(a_0 + \ldots + a_{i-1}) + (j-i-1)a_{i+1} + \ldots + a_{j-1}},$$

$$\ldots, 1 + \frac{a_t}{(k-s)(a_0 + \ldots + a_{i-1} + a_{i+1} + \ldots + a_{j-1} + a_{j+1} + \ldots + a_{s-1}) + (k-s-1)a_{s+1} + \ldots + a_{t-1}}$$

toate polinoamele-secţiuni $g_1(x), \ldots g_v(x)$ rămân pozitive. Conform observaţiei noastre, $f(x)$ rămâne pozitiv şi ca atare, marginea superioară a şirului precedent este o limită superioară a rădăcinilor pozitive ale lui $f(x) = 0$.

Este însă evident că şirul precedent e compus din termeni respectiv *mai mici* ca acei din şirul lui BRET:

$$1 + \frac{a_i}{a_0 + a_1 + \ldots + a_{i-1}}, \quad 1 + \frac{a_j}{a_0 + \ldots + a_{i-1} + a_{i+1} + \ldots + a_{j-1}},$$

$$\ldots, 1 + \frac{a_t}{a_0 + \ldots + a_{i-1} + a_{i+1} + \ldots + a_{j-1} + a_{j+1} + \ldots + a_{s-1} + a_{s+1} + \ldots + a_{t-1}}.$$

Prin urmare, *a fortiori* marginea superioară a şirului lui BRET e o limită superioară a rădăcinilor pozitive a ecuaţiei $f(x) = 0$. Teorema lui BRET e demonstrată.

P. SERGESCU.

O GENERALIZARE A PRINCIPIULUI INERȚIEI

OBSERVĂRI ASUPRA ECUAȚIEI LUI IACOBI

In cele ce urmează ne vom ocupa de consecințele ecuației lui IACOBI în cazul când *potențialul cinetic* [1]) este o *formă cuadratică.* Vom arăta că *ipoteza aceasta generalizează principiul inerției* și o vom aplica la câteva exemple [2]). Pentru simplificarea desvoltărilor ne vom folosi de avantajele calculului vectorial și ale notației tensoriale, pe care le vom introduce, încă dela început prin formulele de recapitulare și de definiție.

1°. Fie q_1, q_2, q_3 *coordonatele generalizate* ale unui punct material P de massă m, care se mișcă sub acțiunea *forței exterioare*

$$(1)\quad \vec{F} = -\operatorname{grad} V \qquad (\text{adică } F_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \text{ cu } i = 1, 2, 3)$$

derivând din *potențialul*

$$(2)\quad V = V(q_1, q_2, q_3 ; t) \equiv V(q_i ; t).$$

In cazul cel mai general poziția punctului depinde în mod explicit și de timpul t

$$(3)\quad x_i = x_i(q_k ; t).$$

Fie

$$(4)\quad L = T - V$$

expresiunea potențialului cinetic unde T este *energia cinetică* a punctului mobil P.

---

1) In ceea ce privește terminologia, următoarele noțiuni sunt echivalente:
potențial cinetic ≡ funcția lui LAGRANGE
coordonate generalizate ≡ parametrii
— potențialul = — V ≡ funcția de forță
energia cinetică ≡ jumătatea forței vii
impulsuri generalizate ≡ momente ≡ variabile canonic conjugate.

2) Această generalizare ne servește pentru a scoate în evidență o invarianță specială a celor mai obișnuite mișcări ale naturii, invarianță care să se reducă la principiul inerției în cazul mișcărilor rectilinii.

Ori, introducând, după POISSON, ca noi variabile în locul lui $q_i' = \frac{dq_i}{dt}$ pe p_i, *impulsurile generalizate*:

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'} \tag{5}$$

acțiunea S dată de integrala curbilinie

$$S = \int_{(c)} L\, dt \tag{6}$$

luată dealungul *traiectoriei* (C), și H *funcțiunea lui* HAMILTON — o generalizare a energiei — definită prin formula:

$$H = \sum_{i=1}^{3} p_i q_i' - L \equiv p_i q_i' - (T - V) \equiv H(q_i;\ p_i;\ t) \tag{7}$$

(unde atât $p_i q_i'$, cât și L sunt exprimate în funcție de p_i în locul lui q_i', calculate din sistemul 5) — din mecanica analitică se știe pe de o parte că:

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i'} = p_i \tag{8}$$

pe de altă parte că ecuațiile mișcării sunt date de *caracteristicele ecuației cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i\,;\ \frac{\partial S}{\partial q_i};\ t\right) = 0 \tag{9}$$

zisă a lui IACOBI, unde t este considerat ca parametru, împreună cu q_i.

2°. Să demonstrăm următoarele:

Lema I. In cazul când potențialul cinetic este o formă cuadratică

$$L = l_{ik} q_i' q_k' \quad \text{(evident cu } i, k = 1, 2, 3) \tag{10}$$

unde l_{ik} sunt nouă [1]) coeficienți depinzând de q_i și de t, funcția lui HAMILTON coincide cu potențialul cinetic al punctului mobil.

---

1) Exprimarea cu șase coeficienți ne-ar complica fără folos demonstrațiile. Vom revine ulterior asupra matricei $\| l_{ik} \|$.

Intr'adevăr: Din (7) şi (8) conchidem că

$$H = \frac{\partial L}{\partial q_i'} q_i' - L$$

pe de altă parte ţinând seama de (10) şi de teorema lui EULER relativă la funcţiunile omogene, avem

$$2L = q_i' \frac{\partial L}{\partial q_i'} .$$

Comparând ultimele două expresii, rezultă că:

$$H = L \tag{11}$$

adică tocmai ceea ce era de demonstrat.

Lema II. Ipoteza (10) fiind satisfăcută, potenţialul se exprimă prin formula

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\right)^2 . \tag{12}$$

Să introducem într'adevăr notaţiile

$$x_{ir}' = \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \quad \text{şi} \quad x_k' = \frac{\partial x_k}{\partial t} \tag{13}$$

în general, deci, avem

$$x_{ir}' \neq x_{ri}' .$$

Forţa vie se calculează uşor, ea este

$$2T = mv^2 = a_{ik} q_i' q_k' + 2b_l q_l' + c \tag{14a}$$

unde

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{pr} = x_{ip}' x_{ir}' = a_{rp} \\ b_l = x_i' x_{il}' \\ \text{şi} \quad c = x_k' . x_k' . \end{array} \right. \tag{15}$$

Ori după (4), (2) şi (10) trebuie să avem:

$$2T = 2(L+V) = 2l_{ik} q_i' q_k' + 2V(q_r ; t). \tag{14b}$$

Identificând cele două expresii (14 a) şi (14 b) ale forţei vii obţinem relaţiile

$$(14)\quad \begin{cases} a_{ik} = 2l_{ik} \;;\; b_l = 0 \quad \text{adică} \quad \dfrac{\partial \vec{P}}{\partial t} \perp \dfrac{\partial \vec{P}}{\partial q_l} \\ 2V = c \end{cases}$$

adică *formula* (12) *a potenţialului*, care ne arată că acesta este mereu pozitiv, fiind egal cu *jumătatea patratului vitezei de poziţie a punctului* P.

In virtutea teoremei lui LEJEUNE-DIRICHLET (aplicată acestui caz), când *mişcarea de poziţie* a punctului material devine *staţionară*, $\dfrac{\partial \vec{P}}{\partial t} = 0$, acesta ocupă o *poziţie stabilă de echilibru*.

Teoremă: In general, dacă ipoteza (10) este împlinită, *mişcarea punctului nu se face cu conservare de energie; dacă această din urmă condiţie este totuşi îndeplinită, formula* (10) *înlocuieşte principiul inerţiei:* mişcarea punctului este uniformă şi rectilinie.

Să presupunem într'adevăr că avem:

$$(16)\qquad T + V = E = \text{const.}$$

Insă după (4)

$$T - V = L$$

urmează că avem:

$$2T = L + E$$

adică după (10), (14 a) şi condiţiile (14)

$$a_{ik} q_i' q_k' + c = l_{ik} q_i' q_k' + E.$$

De aici rezultă pe de o parte că energia potenţială

$$2V = c = E$$

este o constantă [asupra punctului, după (1), nu lucrează nici o forţă exterioară]; pe de altă parte că

$$a_{ik} = l_{ik}$$

ceea ce ne spune că energia cinetică este o constantă.

Intr'adevăr comparând egalitatea $a_{ik} = l_{ik}$ cu egalitatea $a_{ik} = 2l_{ik}$ din (14) rezultă în mod necesar că

$$a_{ik} = 0 = l_{ik}$$

şi deci după (14 b)

$$2T = 2V = c = E = mv^2.$$

Punctul se mişcă având mărimea vitezei mereu constantă. Trebuie să mai arătăm că mişcarea punctului este rectilinie. Am văzut că

$$a_{ik} = 0$$

$$c = \text{const.} = E.$$

Observând formulele (15) şi (13) aceste relaţii se scriu explicit în modul următor:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_1}\right)^2 = 0 \\ \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_2}\right)^2 = 0 \\ \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_3}\right)^2 = 0 \\ \left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial t}\right)^2 = E. \end{cases}$$

Cum aceste derivate nu pot fi imaginare avem în general

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_l} = 0$$

adică x_1, x_2, x_3 nu depind de q_1, q_2, şi q_3; în sfârşit, fiindcă

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} V = 0 \quad \text{şi} \quad b_l = 0,$$

de aceea

$$\frac{\partial x_1}{\partial t}, \frac{\partial x_2}{\partial t}, \frac{\partial x_3}{\partial t}$$

sunt nişte constante şi deci:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 t + x_{10} \\ x_2 = a_2 t + x_{20} \\ x_3 = a_3 t + x_{30} \end{cases}$$

cu condiţia

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \mathrm{E}.$$

Observaţie: Este interesant de remarcat că este suficient ca energia cinetică a sistemului să fie o constantă, pentru ca formula (10) să înlocuiască principiul inerţiei.

Să avem deci

$$\mathrm{T} = \text{const.}$$

Atunci după (14 a), (14 b) şi (14)

$$\mathrm{T} = \mathrm{L} + \mathrm{V} = l_{ik} q_i' q_k' + \mathrm{V}(q_r\ ;\ t) = \text{const.}$$

De aici urmează că:

$$l_{ik} = 0 \quad \text{şi} \quad \mathrm{V} = \text{const.}$$

Deci

$$\mathrm{E} = \mathrm{T} + \mathrm{V} = \text{const.} \quad \text{şi suntem în cazul anterior.}$$

Prin analogie cu acest caz particular, vom numi *sisteme inerte generalizate* sau mai bine zis *sisteme cu inerţie generalizată* pe acelea pentru care *potenţialul cinetic este o formă cuadratică* (formula (10) valabilă [1]).

---

[1]) Este uşor de arătat că toate mişcările lineare se fac cu inerţie generalizată dacă se introduce ca potenţial expresiunea

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{\mathrm{P}}}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial t}\right)^2\right]$$

definită de formula (12).

In această privinţă mişcările cu inerţie generalizată înglobează toate mişcările rectilinii.

3°. Să ne ocupăm aici de un exemplu simplu, rămânând ca într'o lucrare viitoare să studiem proprietăţile generale ale unui sistem cu inerţie generalizată. Anume să presupunem că în mişcarea sa punctul mobil este constrâns a satisface relaţiile:

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{2mx_3^2}{\lambda^2}(1+\lambda^2)\,t^2 \\
x_1 &= at^2 + bq_1 + cq_2 \\
x_2 &= \frac{a}{\lambda}\,t^2 - b\lambda q_1 - \lambda c q_2 \\
x_3 &= a
\end{aligned}
\tag{17}
$$

unde a, b, c şi λ sunt nişte constante, iar m massa punctului.

Făcând calculele se constată uşor că aceste relaţii verifică condiţiile (10), (12) şi (14), prin urmare mişcarea se face cu inerţie generalizată şi avem:

$$2T = m(1+\lambda^2)\left[\frac{4a^2}{\lambda^2}t^2 + (bq_1' + cq_2')^2\right];$$

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1'} = bm(1+\lambda^2)(bq_1' + cq_2'),$$

$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial q_2'} = cm(1+\lambda^2)(bq_1' + cq_2').$$

Punând

$$u' = bq_1' + cq_2'$$

avem

$$H = \frac{m}{2}(\lambda^2+1)\,u'^2.$$

Caracteristicele ecuaţiei lui IACOBI se integrează foarte uşor, obţinem:

$$u' = bq_1' + cq_2' = k = \text{const.}$$

şi prin urmare

$$u = bq_1 + cq_2 = kt + k_0 \tag{18}$$

de unde în fine

$$\begin{cases} x_1 = at^2 + kt + k_0 \\ x_2 = \dfrac{a}{\lambda} t^2 - \lambda (kt + k_0) \\ x_3 = a. \end{cases}$$

Traiectoria este o conică de genul parabolă, în planul $x_3 = a$.

Observaţii :

1. Relaţia (18) ne arată că de fapt mişcarea este uni-parametrică.

2. Se constată repede că numai anumite mişcări parabolice se fac cu inerţie generalizată.

3. Matricea $\| l_{ik} \|$ este constantă, de unde se impune, în general, studiul mişcărilor cu inerţie generalizată pentru care $\| l_{ik} \|$ are termenii constanţi.

T. VESCAN.

RAPORTUL COMISIUNEI

PENTRU

ACORDAREA PREMIULUI „VASILE CRISTESCU“

Deoarece din cuprinsul volumului XLIV, al *Gazetei Matematice* lipsesc articole sau note matematice de trigonometrie al căror autor să îndeplinească prevederile Art. 3 al regulamentului acestui premiu, deoarece soluţiile problemelor de trigonometrie publicate în Vol. XLIV, nu disting vreun corespondent care să satisfacă articolul citat, comisiunea apreciază că nu se poate acorda premiul VASILE CRISTESCU pe anul în curs.

COMISIUNEA PENTRU ACORDAREA PREMIULUI

ING. D. STOICA, C. IONESCU-BUJOR,

AL. NICULESCU

Acest raport s'a citit şi aprobat în şedinţa Adunării Generale dela 8/2, 1940.

NOTE MATEMATICE

39. *Asupra exercițiului 42, Cap. XIII, din Culegere de probleme de algebră, de* A. G. IOACHIMESCU (ediția III-a) [1]. In această problemă se cere, printre altele, să se arate că condiția ca ecuațiile

$$ax^2+bx+c=0 \quad , \quad a'x^2+b'x+c'=0,$$

să aibă o rădăcină comună este

$$(b^2-4ac)(b'^2-4a'c')=(bb'-2ac'-2a'c)^2.$$

Iată un nou mod de a arăta acest lucru. Fie x' o rădăcină a primei ecuații și x_1' o rădăcină a celei de-a doua. Avem

$$\pm\sqrt{b^2-4ac}=2ax'+b,$$

$$\pm\sqrt{b'^2-4a'c'}=2a'x_1'+b',$$

de unde, prin înmulțire,

$$\pm\sqrt{(b^2-4ac)(b'^2-4a'c')}=bb'+2ax'(a'x_1'+b')+2a'x_1'(ax'+b)$$

Dar ecuațiile date scrise sub forma

$$(ax'+b)x'+c=0 \quad , \quad (a'x_1'+b')x_1'+b')x_1'+c'=0,$$

dau respectiv

$$ax'+b=-\frac{c}{x'} \quad , \quad a'x_1'+b'=-\frac{c'}{x_1'},$$

și deci

$$\pm\sqrt{(b^2-4ac)(b'^2-4a'c')}=bb'-2ax'\frac{c'}{x_1}-2a'x_1'\frac{c}{x'}\cdot$$

Scriind aici că: $x'=x_1'$ și ridicând la pătrat se ajunge tocmai la condiția cerută.

† V. CRISTESCU.

40. *De când moșiile au și lungime, nu numai lățime?* In *Legea lui Caragea* din 1817, la Capitolul *„Despre vecinătatea locurilor“*, la Art. 8, se spune:

„Pentru mai multă a hotarelor deslușire, de acum înainte să se măsoare și lungimea moșiilor și să se treacă în cartea de hotărnicie“.

I. I.

1) Această *notă* a fost găsită printre hârtiile lui V. CRISTESCU.

GH. TH. GH.

41. *Numere interesante cu 10 cifre diferite* [1]). Pentru N_6 începând cu 2 am găsit următoarele 95 de soluţiuni:

N_6	N	N_6	N
201 578 943	1 209 473 658	245 987 310	1 475 923 860
205 794 183	1 234 765 098	248 730 951	1 492 385 706
205 798 431	1 234 790 586	248 731 095	1 492 386 570
205 817 943	1 234 907 658	248 793 051	1 492 758 306
208 495 731	1 250 974 386	248 793 105	1 492 758 630
209 457 183	1 256 743 098	249 508 731	1 498 052 386
209 457 318	1 256 743 908	249 510 873	1 497 065 238
209 458 173	1 256 749 038	249 587 301	1 497 523 806
210 578 493	1 263 470 958	249 587 310	1 497 523 860
210 849 573	1 265 097 438	270 584 913	1 623 509 478
210 984 573	1 265 907 438	270 598 413	1 623 590 478
215 078 943	1 290 473 658	271 305 849	1 627 835 094
215 789 430	1 294 736 580	271 305 984	1 627 835 904
217 094 583	1 302 567 498	271 830 459	1 630 982 754
217 830 459	1 306 982 754	271 830 954	1 630 985 724
217 830 954	1 306 985 724	273 180 459	1 639 082 754
217 928 304	1 307 569 824	273 180 954	1 639 085 724
218 309 457	1 309 856 742	275 048 913	1 650 293 478
230 158 794	1 380 952 764	275 130 489	1 650 782 934
230 849 571	1 385 097 426	278 901 543	1 673 409 258
230 874 951	1 385 249 706	278 915 430	1 673 492 580
230 879 415	1 385 276 490	278 930 154	1 673 582 924
230 945 817	1 385 674 902	278 930 415	1 673 582 490
230 984 571	1 385 907 426	278 931 504	1 673 589 024
231 087 495	1 386 524 970	278 931 540	1 673 589 240
231 098 457	1 386 590 742	279 054 183	1 674 325 098
231 098 745	1 386 592 470	279 054 318	1 674 325 908
231 508 794	1 389 052 764	279 183 054	1 675 098 324
231 587 980	1 389 527 640	279 318 054	1 675 908 324
231 709 458	1 390 256 748	280 543 179	1 683 259 074
231 780 459	1 390 682 754	281 730 459	1 690 382 754
231 780 954	1 390 685 724	281 730 954	1 690 385 724
231 809 457	1 390 856 742	281 793 054	1 690 758 324
245 098 731	1 470 592 386	283 054 179	1 698 325 074
245 109 873	1 470 659 238	284 930 571	1 709 583 426
245 987 301	1 475 923 806	284 931 057	1 709 586 342

1) Urmare la Nota dela pag. 412 Vol. XLIV *Gazeta Matematică.*

N_6	N	N_6	N
287 301 594	1 723 809 564	294 087 315	1 764 523 890
287 309 415	1 723 856 490	294 015 873	1 764 095 238
287 315 094	1 723 890 564	294 150 873	1 764 905 238
287 315 940	1 723 895 640	294 158 730	1 764 952 380
287 493 051	1 724 958 306	294 183 057	1 765 098 342
287 493 105	1 724 958 630	294 305 817	1 765 834 902
289 430 715	1 736 584 290	294 317 058	1 765 902 348
289 431 507	1 736 589 042	294 318 057	1 765 908 342
289 431 570	1 736 589 420	298 430 571	1 790 583 426
290 541 783	1 743 250 698	298 431 057	1 790 586 342
290 543 178	1 743 259 068	298 743 051	1 792 458 306
291 783 054	1 750 698 324	298 743 105	1 792 458 630
293 178 054	1 759 068 324		

G-L GH. BUICLIU.

42. *O demonstrație directă a teoremei* CEVA. AA_1, fiind o dreaptă ce trece prin vârful A, în triunghiul ABC, vom pune în evidență o proprietate comună a punctelor acestei drepte; observăm că dacă A′ este arbitrar pe AA_1 și A_b, A_c proiecțiile lui pe AC, AB raportul $A'A_b/A'A_c$ *este independent de poziția lui* A′ pe AA_1. In particular dacă luăm chiar punctul A_1 și numim β, γ proiectantele din A_1, pe AC, AB, raportul precedent are valoarea constantă β/γ.

Dar, dacă notăm cu h, înălțimea din A, exprimând în două moduri diferite, ariile triunghiurilor ABA_1, ACA_1, avem

$$AC \cdot \beta = A_1C \cdot h \quad ; \quad AB \cdot \gamma = A_1B \cdot h$$

deci

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{A_1C}{A_1B}.$$

Deci, A′ fiind un punct arbitrar pe ceviana AA_1, avem relația

$$\frac{A'A_b}{A'A_c} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{A_1C}{A_1B} \tag{1}$$

invers, *locul geometric al punctelor* A′, *ale căror distanțe la laturile* AC, AB *stau în raportul* (1), *este ceviana* AA_1.

Fie acum, două ceviane BB_1, CC_1 din vârfurile B, C, care se întâlnesc în M; avem conform relației (1), notând M_a, M_b, M_c proiecțiile lui M pe BC, CA, AB

$$\frac{MM_a}{MM_c} = \frac{BA}{BC} \cdot \frac{B_1C}{B_1A}, \quad \frac{MM_b}{MM_a} = \frac{CB}{CA} \cdot \frac{C_1B}{C_1A}.$$

Din aceste relații, prin înmulțire, rezultă

$$\frac{MM_b}{MM_c} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1B}{C_1A} \tag{2}$$

comparând cu (1), deducem că M se va afla și pe AA_1, dacă

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1B}{C_1A} = 1 \tag{3}$$

deci dacă trei puncte A_1, B_1, C, care se află toate pe laturi ori una pe latură și două pe prelungiri — sunt picioarele a trei ceviene concurente, condiția (3) este îndeplinită.

Invers, dacă (3) are loc, în baza relației (2) rezultă relația (1), deci teorema precedentă este adevărată și în reciprocă.

Metoda precedentă este întrebuințată, clasic, în unele cazuri particulare.

N. N. MIHĂILEANU.
Student Matematici București.

43. *Asupra problemei 5243.* Primim în ultimul moment soluții foarte bune dela D-nii: STELIAN CETĂȚEANU și C. D. EFTIMIE elevi-ingineri, M. AL. VASILESCU-STABU, PETRESCU V. ACHILLE, POPA D. MIRCEA, ROHR I. ALEX., FLORIN J. ABELES, DRĂGHICESCU P. PAUL, DIACONESCU V. CONSTANTIN elevi de liceu.

AL. STOENESCU.

44. *Asupra unei note.* In „Gazeta Matematică", Anul. XXXIV, Nota matematică Nr. 37, D-l I. C. SAVIN încearcă să generalizeze exercițiul 11 din G. M. același volum în care se demonstra că dacă *a*, *b*, *c* sunt numere reale, avem:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a + b + c} \geqslant 0 \tag{1}$$

și dă următoarea inegalitate

$$\frac{a^{3n} + b^{3n} + c^{3n} - 3a^n b^n c^n}{a^n + b^n + c^n} \geqslant 0.$$

De fapt această ultimă inegalitate nu este o generalizare a primei, ci din contră, un caz particular în care s'a luat în loc de a, b, c respectiv a^n, b^n, c^n.

O inegalitate care să generalizeze pe (1) ar fi următoarea:

$$\frac{\sum_1^n a_i^n - n\prod_1^n a_i}{\sum_1^n a_i} \geqslant 0$$

unde a_i sunt numere reale a căror sumă este pozitivă. (Pentru $n = 3$, această din urmă condițiune nu este necesară).

N. O. ZAHARIA.

BIBLIOGRAFIE

Boletin Matematico. Anul XIII. Nr. 4. Aprilie 1940. Buenos-Aires.

Journal de mathématiques élémentaires. Anul 64. Nr. 15. 1 Mai 1940. Paris.

Idem. Anul 64. Nr. 16. 15 Mai 1940. Paris.

Mathematica. Vol. XVI. 1940. Cluj. O remarcă asupra unei generalizări a funcțiilor analitice de TH. ANGHELUȚĂ, Asupra reprezentării conforme a domeniilor stelate de M. BIERNACKI, Asupra unor poligoane inscriptibile de G. BRATU, O nouă demonstrație a teoremei lui ENNEPER de GH. TH. GHEORGHIU, O teoremă din teoria ecuațiilor diferențiale de ST. GOLAB, Matematicile în Enciclopedia franceză de J. HADAMARD, Asupra criteriului SOPHIE GERMAIN-FURT pentru primul caz al teoremei lui FERMAT de M. KRASNER, Cercurile ex-circonscrise în raport la un triunghiu sferic de GINO LORIA, Asupra convergenței absolute seriilor FOURIER de J. MARCINKIEWICZ, Proprietăți asimptotice ale lanțurilor lui MARKOFF studiate cu ajutorul funcției caracteristice de GH. MIHOC și O. ONICESCU, Asupra aplicației teoremei lui MOLLERUP de P. MUZEN, Asupra condițiilor de convergență a unei varietăți închise V_{p-1} $p-1$ foi întinse în spațiu euclidian de L. PASQUALINI, Note asupra funcțiilor convexe superior ordinului III de TIB. POPOVICI, Remarcări asupra ansamblului lui LUSIN de E. SZPILRAJN, Asupra ecuației funcționale $f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)\,f(y)$ de G. VAN DER LYN.

Suplimentul Gazetei Matematice. Anul VI. Nr. 9. 1 Iunie 1940. București. Exerciții rezolvate și exerciții propuse.

Ministerul Aerului şi Marinei. *Chestionar pregătitor de Matematici şi Ştiinţe Fizico-Chimice,* pentru uzul candidaţilor la examenele de admitere în şcoala de ofiţeri de aviaţie şi şcoala navală.

Chestionarul este alcătuit de D-l Cpt. Comandor Ing. GR. ZAPAN, aşa cum rezultă din „Cuvânt înainte" prin care ne prezintă lucrarea.

Cuprinde capitolele: *aritmetica, geometria, algebra elementară, trigonometria, geometria analitică, algebra superioară şi ştiinţe fizico-chimice,* având în total 576 probleme.

In general fiecare din aceste capitole cuprinde probleme înşiruite în ordinea prevăzută de programa analitică a liceului teoretic.

Se începe cu probleme foarte uşoare, elementare, apoi problemele sunt gradate, unele fiind chiar destul de grele pentru un absolvent de liceu, de putere mijlocie. Fiecare capitol se încheie cu un mănunchi de probleme cunoscute şi interesante, pe care autorul le-a intitulat „probleme clasice".

Uneori programa analitică este depăşită. Astfel sunt probleme de determinanţi de ordin superior lui 3 (trecute la *algebra elementară* pentru a strânge la un loc chestiunile privitoare la sistemele de ecuaţii). Faptul acesta nu poate fi o greutate pentru un absolvent de liceu — secţia ştiinţifică.

In ce priveşte „problemele clasice" cred că o parte din ele au un caracter informativ, adică nu se cer la examen. (In special la capitolul geometrie).

Aceasta deoarece unele, deşi se pot încadra în capitolele programei analitice, nu se găsesc în manuale şi nici nu se face din lipsă de timp (la cl. 5-a cu 3 ore pe săptămână abea se poate termina materia, fără prea multe aplicaţiuni), iar altele depăşesc programa analitică. Din prima categorie sunt: *cercul celor 9 puncte, teorema lui* SIMSON, *problema hărţii,* etc., iar din a doua: *teorema lui* PASCAL, care presupune ştiută teorema lui MENELAUS, ceea ce nu se face în liceu, *generalizarea problemei jucătorilor* (pag. 125), care cere o îndemânare de calcul algebric deosebită.

Totuşi aşezarea acestor probleme la sfârşitul fiecărui capitol a fost bine gândită, căci cel puţin cu ocazia pregătirii pentru examen, candidatul va da peste ele şi le va ceti, informându-se astfel asupra unor cunoştinţe pe care trebue să le aibă un om cu pregătire ştiinţifică. (De altfel sunt profesori care fac aceste lucruri în ore suplimentare, de acord cu elevii).

Cred că acest chestionar este binevenit pentru cei ce se pregătesc să dea examen la şcoala de aviaţie sau marină, pentru că le fixează materia asupra căreia să se concentreze şi ceva mai mult: găsesc aici problemele aşezate într'o ordine pedagogică, ceea ce le uşurează înţelegerea.

Cred deasemeni că este o bună culegere de probleme şi pentru elevii de liceu, pe care o pot întrebuinţa din cl. I-a până la cl. VIII-a, având lucruri interesante şi în afară de manual.

M. A. M. a fost bine inspirat când s'a adresat D-lui Cpt. Comandor GR. ZAPAN, care în afară de dragostea ce poartă ştiinţelor matematice are şi multă experienţă didactică, deoarece a fost profesor de liceu (la liceele militare) şi apoi profesor la Şc. pregătitoare de ofiţeri, aşa încât cunoaşte care sunt nevoile şi ştie ce trebue să ceară unui candidat.

G. D. S.

E. BOREL & A. CHERON. *Théorie Mathématique du bridge à la portée de tous.*

GH. TH. GHEORGHIU. *Probleme de Analiză Matematică.* Partea I, conţine: şiruri, serii, derivate, desvoltări în serii, limite, variaţii de funcţiuni, schimbări de variabile. Bucureşti 1940. (Litografiat).

ILIE I. POPA. *À la recherche d'un manuscrit perdu.* (Extras din *Bulletin de la Section scientifique de l'Académie Roumaine,* Tome XXII, No. 3, 1939).

In această Notă autorul arată posibibilitatea de reconstituire a manuscrisului de *Geometrie* al lui GHEORGHE LAZĂR, care a fost pierdut.

N. ABRAMESCU. *Complectări de Geometria elementară.* Litografiat cu îngrijirea D-lui IONEL STAMATE. Scris de D-l ŞTEFAN SEBEŞAN. Studenţi în Matematici. Cluj 1940.

N. ABRAMESCU. *L'apolarité d'une forme binaire et d'une forme cubique. Application à la théorie des surfaces.* Cluj 1939. (Extras din *Mathematica*).

N. ABRAMESCU. *Nouvelle méthode pour obtenir la cubique que donne les tangentes de* DARBOUX *en un point d'une surfaces.* Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences.* Paris 1939.

N. ABRAMESCU. *Nouvelle propriété de la quartique piriforme, déduite comme le lieu du centre instantané de mouvement d'une figure plane variable avec conservation de similitude.*

CERERI

294. Care este prima carte românească în care s'a vorbit despre calculul probabilităţilor ?

I. IONESCU.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

AL. MANICATIDE & C. S. POPESCU. Aritmetica practică pentru Clasa I-a. Ploeşti, 1909.

AL. MANICATIDE & C. S. POPESCU. Aritmetica pentru Clasa II-a. Ploeşti, 1909.

AL. MANICATIDE & C. S. POPESCU. Aritmetica pentru Clasa III-a. Ploeşti, 1909.

Donate de D-l I. IONESCU, Inginer.

C. ALASIA. Su certe relazioni fra due teorie fondamentali. Pavia, 1907. Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1906. *Să se generalizeze problema 937 (a cărei soluţie s'a publicat la pag. 172, Vol. XVIII,* „Gazeta Matematică"), *pentru cazul când pendulul ar avea şi o lungime* λ *dincolo de punctul de suspensiune şi* a_0 *ar fi negativ.*

C. POPOVICI.

Enunţul problemei 937 este următorul:

O bară rigidă grea este suspendată într'o extremitate a ei şi oscilează într'un plan vertical. Un punct material greu se mişcă pe această bară plecând din origină cu o mişcare uniformă. Se cere a se studia mişcarea sistemului.

Fie OB bara suspendată în O, oscilând în jurul lui O, prelungită în sensul BO cu lungimea OA egală cu λ şi P poziţia punctului material greu la un moment dat. Problema 1906 se poate rezolva pe cale identică cu soluţia dată problemei 937 la pag. 172, Vol. XVIII. Pentru a arăta însă varietatea procedeurilor în rezolvarea problemelor de mecanică, vom da problemei 1906 o soluţie diferită aplicând ecuaţia lui LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial q}\right) - \frac{\partial E}{\partial q} = \frac{\partial U}{\partial q}$$

în care E şi U sunt energia cinetică şi funcţiunea de forţe a sistemului, iar q, parametrul geometric independent al mişcărei, în cazul nostru unghiul θ făcut de bară cu verticala.

Păstrând notaţiile din problema 937 avem

$$E = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} I\theta'^2 + \frac{1}{2} mv^2.$$

Dar

$$I = \int_0^{2l} ur^2 dr + \int_0^{\lambda} ur^2 dr = \frac{u(8l^3 + \lambda^3)}{3}$$

sau ţinând seamă că

$$M = \mu(2l + \lambda)$$

$$I = \frac{M(8l^3 + \lambda^3)}{3(2l + \lambda)}.$$

Pentru calculul iuţelei v a punctului P, observăm că mişcarea acestuia se poate descompune într'o mişcare de rotaţie cu iuţeala $a\theta'$ şi o mişcare v_0 în lungul barei, iuţeli perpendiculare una pe alta. Rezultă

$$v^2 = a^2\theta'^2 + v_0^2.$$

Putem ajunge la acelaşi rezultat luând drept axe de coordonate orizontala şi verticala lui O. In acest caz coordonatele lui P sunt

$$x_1 = a\sin\theta \quad ; \quad y_1 = a\cos\theta.$$

Deci

$$x_1' = a'\sin\theta + a\cos\theta \,.\, \theta' = v_0\sin\theta + a\cos\theta \,.\, \theta'$$

$$y_1' = a'\cos\theta - a\sin\theta \,.\, \theta' = v_0\cos\theta - a\sin\theta \,.\, \theta'.$$

$$\therefore \quad v^2 = x_1'^2 + y_1'^2 = v_0^2 + a^2\theta'^2.$$

Avem prin urmare

$$E = \frac{M(8l^3+\lambda^3)}{6(2l+\lambda)}\theta'^2 + \frac{1}{2}m(v_0^2 + a^2\theta'^2).$$

Funcţiunea de forţe U o deducem ţinând seama că singurele forţe exterioare active sunt mg şi Mg:

$$U = mgy_1 + Mgy_2$$

y_2 fiind ordonata centrului de greutate al barei.

$$U = mga\cos\theta + \frac{1}{2}Mg(2l-\lambda)\cos\theta$$

$$\frac{\partial E}{\partial\theta'} = \left[\frac{M(8l^3+\lambda^3)}{3(2l+\lambda)} + ma^2\right]\theta' \quad ; \quad \frac{\partial E}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial\theta} = -g\left[ma + \frac{1}{2}M(2l-\lambda)\right]\sin\theta.$$

Aplicând ecuaţiunea lui LAGRANGE, obţinem:

$$\left[\frac{M(8l^3+\lambda^3)}{3(2l+\lambda)} + ma^2\right]\theta'' = -g\left[ma + \frac{1}{2}M(2l-\lambda)\right]\sin\theta.$$

Dar $$a = a_0 + v_0 t.$$

Insemnând cu

$$p=\frac{a_0}{v_0}\ ;\ q=\frac{a_0^2}{v_0^2}+\frac{M(8l^3+\lambda^3)}{3mv_0^2(2l+\lambda)}\ ;\ r=\frac{a_0}{v_0}+\frac{M(2l-\lambda)}{2mv_0}$$

şi înlocuind

$$(E^2+2pt+q)\,\theta''=-\frac{g}{v_0}(t+r)\sin\theta. \qquad (1)$$

Pentru t constant şi θ mic ($\sin\theta \leqq \theta$), această ecuaţiune reprezintă o mişcare oscilatorie armonică de pulsaţie

$$\omega=\sqrt{\frac{g(t+r)}{v_0(t^2+2pt+q)}}$$

de perioadă

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{v_0(t^2+2pt+q)}{g(t+r)}}$$

egală cu perioada pendulului matematic sincron de lungime

$$l_p=\frac{v_0(t^2+2pt+q)}{t+r}$$

rezultat de formă identică cu acela găsit la problema 937.

Inmulţind pe (1) cu $2d\theta$ şi integrând obţinem

$$(t^2+2pt+q)\,\theta'^2=\frac{2g}{v_0}[(t+r)\cos\theta-h]$$

adică tocmai ecuaţiunea (4') dela pag. 175, Vol. XVIII.

AL. STOENESCU.

PROBLEMA 2116. *Fie un triunghiu* ABC *înscris într'un cerc* O *şi fie* A_1, B_1, C_1 *punctele unde înălţimile triunghiului întâlnesc cercul* O. *Să se arate că dreptele lui* SIMSON *faţă de triunghiurile* ABC *şi* $A_1B_1C_1$ *sunt perpendiculare.*

N. CHIRIAC.

Problema se găseşte rezolvată în „La géométrie du triangle“ par TRAIAN LALESCO, ediţia II-a. pag. 15. Enunţul ei este: „Soit $H'_a H'_b H'_c$ le triangle formé par les pieds des hauteurs sur le cercle circonscrit. Les droites des SIMSON d'un point M par raport aux triangles ABC et $H'_a H'_b H'_c$ sont rectangulaires“.

In soluţionarea ei TRAIAN LALESCU se sprijină pe proprietatea: *dreptele lui* SIMSON *ale unui punct* M *de pe un cerc, în raport cu două triunghiuri* ABC *şi* A' B' C' *înscrise în cerc, fac un unghiu constant când* M *descrie cercul* (demonstrată la pag 14). Va fi deci de ajuns să găsim unghiul dreptelor lui SIMSON pentru un punct particular. In cazul problemei noastre să luăm punctul A_1 (în tratat e luat punctul A).

Se ştie că dacă unim picioarele perpendicularelor duse dintr'un punct de pe înălţimea AA_1, pe laturile AB şi AC, obţinem o dreaptă *antiparalelă* cu BC. Dacă acest punct e chiar A_1, rezultă că dreapta lui SIMSON a lui A_1 e antiparalelă cu BC, deci paralelă cu $B_1 C_1$, deoarece triunghiul $A_1 B_1 C_1$ e omotetic cu triunghiul ortic. Dreapta lui SIMSON a lui A_1, faţă de $A_1 B_1 C_1$ este chiar înălţimea din A_1 pe $B_1 C_1$, perpendiculară deci pe orice antiparalelă la BC.

Iată numele rezolvitorilor găsiţi pe coperta G. M. Vol. XIX: FL. VASILESCU, GR. ZAMFIRESCU, O. MAYER, A. PROCA; Vol. XX: E. ABASOHN, L. BĂDESCU, M. MANASE, AL. PANTAZI, GH. BOTEZ, L. HAMBURGER, R. BELIAN, S. GHIOLU, ST. VORONCA, V. NEICU; Vol. XXI: M. GHERMĂNESCU, L. TEODORIU, GH. ALDEA, C. BULGĂREANU; Vol. XXIV: C. H. NICOLAU; Vol. XXV: M. GRÜMBAUM.

G. D. S.

PROBLEMA 2129. *Să se arate că polinomul de gradul al 4-lea:*

$$X = (x+b)^4 - b(2x+a+b)[2(x+a)(x+b)+(a-b)^2],$$

se poate descompune într'un produs de doi factori de gradul al doilea şi să se deducă apoi, de acolo, soluţiile ecuaţiei $X = 0$.

E. N. BARISIEN.

Polinomul se mai poate scrie:

$$X \equiv x^4 + 4bx^3 + 6b^2x^2 + 4b^3x + b^4$$
$$- b(2x + a + b)[2x^2 + 2(a + b)x + a^2 + b^2]$$

$$\therefore \quad (1) \qquad X \equiv x^4 - 6abx^2 - 4ab(a + b)x - ab(a^2 + ab + b^2)$$

Să punem:

$$(2) \qquad X \equiv (x^2 + px + q)(x^2 + p'x + q') \equiv x^4 + (p + p')x^3$$
$$+ (q + q' + pp')x^2 + (pq' + p'q)x + qq'.$$

Din identificarea polinoamelor (1) şi (2) rezultă:

$$p + p' = 0 \; ; \quad q + q' + pp' = -6ab \; ; \quad pq' + p'q = -4ab(a + b);$$
$$qq' = -ab(a^2 + ab + b^2).$$

Inlocuind pe $p' = -p$ în celelalte ecuaţii obţinem:

$$q + q' = p^2 - 6ab \; ; \quad q - q' = \frac{4ab(a + b)}{p}$$

$$\therefore \quad (3) \quad 2q = p^2 - 6ab + \frac{4ab(a + b)}{p} \text{ şi } 2q' = p^2 - 6ab - \frac{4ab(a + b)}{p}.$$

Ducând aceste valori în ultima relaţie obţinem:

$$(4) \quad p^6 - 12abp^4 + 4ab(a^2 + 10ab + b^2)p^2 - 16a^2b^2(a + b)^2 = 0.$$

E deajuns să găsim o valoare a lui p, ca să putem pune polinomul X sub forma unui produs. Se observă că polinomul se anulează pentru $p^2 = 4ab$, deci $p = 2\sqrt{ab}$. Rezultă:

$$p' = -2\sqrt{ab}; \; q = \sqrt{ab}(a + b - \sqrt{ab}); \; q' = -\sqrt{ab}(a + b + \sqrt{ab})$$

de unde descompunerea

$$(5) \qquad X \equiv [x^2 + 2\sqrt{ab}\,x + \sqrt{ab}(a + b - \sqrt{ab})]$$
$$[x^2 - 2\sqrt{ab}\,x - \sqrt{ab}(a + b + \sqrt{ab})].$$

Egalând fiecare factor cu zero, găsim rădăcinile ecuatiei $X = 0$.

Dela primul factor avem:

$$x_{1,2} = -\sqrt{ab} \pm \sqrt{ab - \sqrt{ab}\,(a+b-\sqrt{ab})}$$

$$= -\sqrt{ab} \pm i\sqrt[4]{ab}\,(\sqrt{a}-\sqrt{b})$$

iar dela al doilea factor:

$$x_{3,4} = \sqrt{ab} \pm \sqrt{ab + \sqrt{ab}\,(a+b+\sqrt{ab})}$$

$$= \sqrt{ab} \pm \sqrt[4]{ab}\,(\sqrt{a}+\sqrt{b}).$$

Se poate face imediat o verificare pentru $a = b$.

Pe coperta G. M. am găsit următorii rezolvitori: Vol. XIX: V. CARÂP, S. KAUFMANN; Vol. XX: C. MENCIU, AL. PANTAZI, R. BELIAN, GH. BOTEZ, C. ISTRATI, S. MARCELINO, D. BÂRCALESCU; Vol. XXI: S. GRÜNBERG, N. NEAMȚU, G. ROSENBERG, S. PĂUN, M. DAVIDESCU.

G. D. S.

PROBLEMA 3456. *Care este cel mai mic număr de numere prime absolut, într'un șir de numere consecutive?*

CĂPITAN I. LINTEȘ.

Soluția exactă a acestei probleme nu se poate da. Voiu încerca totuși să dau o serie de considerațiuni, care ar putea să ne dea o idee aproximativă, cel puțin, despre dificultățile problemelor de distribuție a numerelor prime.

Voiu căuta mai întâi în intervale de *100* numere consecutive numărul de numere prime absolut, apoi pentru fiecare interval voiu face diferența de numere prime, astfel obținem tabloul No. 1. Acest tablou cuprinde numerele numai până la *10.000*, servindu-mă pentru aceasta de tabela J. DUPUIS.

Din acest tablou se observă că cel mai mic număr de numere prime într'un interval de *100* numere consecutive este *7*, ceea ce ne-ar face să credem că:

„Numărul cel mai mic de numere prime absolut, într'un șir de numere consecutive, ar putea fi 7%“.

TABLOUL No. 1

Numere consecutive	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
Numere prime	26	47	63	79	96	110	126	140	155	169
Diferențe	26	21	16	16	17	14	16	14	15	14
	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900	2000
	185	197	212	224	241	253	268	280	292	305
	16	12	15	12	17	12	15	12	12	13
	2100	2200	2300	2400	2500	2600	2700	2800	2900	3000
	319	329	344	359	369	380	395	409	421	432
	14	10	15	15	10	11	15	14	12	11
	3100	3200	3300	3400	3500	3600	3700	3800	3900	4000
	444	454	464	480	491	505	518	530	541	552
	12	10	10	16	11	14	13	12	11	11
	4100	4200	4300	4400	4500	4600	4700	4800	4900	5000
	567	576	592	601	612	624	636	648	656	672
	15	9	16	9	11	12	12	12	8	16
	5100	5200	5300	5400	5500	5600	5700	5800	5900	6000
	684	694	705	715	728	740	753	763	779	780
	12	10	11	10	13	12	13	10	16	7
	6100	6200	6300	6400	6500	6600	6700	6800	6900	7000
	798	809	822	837	845	855	865	877	889	902
	12	11	13	15	8	10	10	12	12	13
	7100	7200	7300	7400	7500	7600	7700	7800	7900	8000
	911	921	932	941	952	967	979	989	999	1009
	9	10	11	9	11	15	12	10	10	10
	8100	8200	8300	8400	8500	8600	8700	8800	8900	9000
	1020	1030	1044	1053	1061	1073	1086	1097	1110	1119
	11	10	14	9	8	12	13	11	13	9
	9100	9200	9300	9400	9500	9600	9700	9800	9900	10000
	1131	1143	1154	1165	1180	1187	1200	1211	1223	1232
	12	12	11	11	15	7	13	11	12	9

Ţinând însă seamă că prima diferenţă de *7* apare la *6000*, iar a doua la *9600*, ne face să credem că:

„Perioada de apariţie a acestui minim de 7°/₀ descreşte, pe măsură ce numărul numerelor consecutive creşte, aşa încât acest minim va apare mai des, ceea ce ne face să bănuim că putem avea diferenţe şi mai mici decât 7“.

* * *

Totuşi ţinând seamă de câteva propoziţii stabilite, anume:

— In *„Théorie de nombres“* par LUCAS la pag. 367, se arată că (TCHEBICHEFF):

„Pentru $2n > 7$ există cel puţin un număr prim, între n şi $2(n-1)$“.

— In *„G. M.“* XIV, pag. 129, se arată că:

„Intre n şi e^2n este cel puţin un număr prim“.

— In *„G. M.“* XXXIV, D-l I. B. FLORESCU în problema 3762, arată că:

„Dacă n este un întreg neprim, între $\varphi(n)$ şi n este cel puţin un număr prim“.

Tragem concluzia că:

„Intervalele de numere consecutive în care avem cel puţin un număr prim, cresc pe măsură ce n *creşte, ceea ce ne face să bănuim că perioada de apariţie a minimului de 7°/₀ ar creşte, în loc să descrească, precum am văzut mai sus“.*

* * *

Sub o formă generală, totuşi foarte laborioasă, dacă $I_{B-A}(N)$ reprezintă numărul numerelor prime cu N din intervalul de numere consecutive dela A la B, expresiune stabilită în G. M. XLI — pag. 280, atunci numărul numerelor prime absolut, din intervalul de numere consecutive dela A la B, poate să fie dat de expresia:

$$n = I_{B-A}[2.3.5.7\ldots(\sqrt{B})]$$

unde $(\sqrt{B})$ reprezintă numărul prim imediat inferior lui $\sqrt{B}$, cu condiţia ca să avem $A > (\sqrt{B})$. Dacă $A < (\sqrt{B})$, atunci la numărul n trebuesc adăogate şi numerele prime din intervalul dela $(\sqrt{B})$ la A.

Astfel avem :

$$I_{100-0}\ (2.3.5.7) = 22 + 4 = 26$$

$$I_{200-100}\ (2.3.5.7.11.13) = 47 - 26 = 21$$

$$I_{300-200}\ (2.3.5.7.11.13.17) = 63 - 47 = 16$$

. . . . . .

. . . . . .

In consecinţă problema s'ar reduce la: *căutarea minimului lui* n *pentru un interval* (B — A) *dat.*

Observaţii :

1. La început problema 3456 a fost propusă sub forma:

„Să se arate că într'un şir de o sută de numere consecutive sunt cel puţin zece numere prime absolut".

Au constatat însă că avem intervale de câte o sută numere consecutive, unde sunt mai puţin de zece numere prime, Domnii: G. LASCARIDE şi NICOLAU-DOBRIDOR.

2. Am încercat să stabilesc un grafic al numerelor prime, faţă de numerele consecutive luând pe axele coordonate numerele consecutive, pe diagonala axelor dreapta de variaţie a numerelor consecutive şi am trasat un fel de curbă a numerelor prime, punctată din *10* în *10* numere până la *10.000.* Am constatat că această curbă rămâne cuprinsă între două drepte de înclinări *26%* şi *12%* (coeficient unghiular).

3. Din cele de mai sus rezultă că problema 3456 mai poate fi examinată şi sub alte feţe.

CPT.-C-DOR I. LINTEŞ.

PROBLEMA 4055. *Pe o dreaptă* xy *se notează patru puncte în ordinea* A, C, D, B. *Pe segmentele* AC, DB, AB *ca diametre se descriu semicercuri deasupra lui* AB; *pe* CD *ca diametru se descrie un semicerc sub* AB. *Să se determine centrele de greutate:*

1. *Al perimetrului curbilin al figurei.*
2. *Al suprafeţei limitată de aceste semicercuri.*

V. THÉBAULT.

Soluţie dată de D-nii: G. ST. ROŞCA şi PETRE N. POPESCU.

1. Vom determina centrele de greutate prin coordonatele lor faţă de axa AB şi perpendiculara în A pe AB. Fie C (c, o), D (d, o), B (b, o) şi g_1, g_2, g_3, g_4 centrele de greutate ale perimetrelor semicercurilor AC, CD, DB şi AB ale căror centre sunt

$$O_1\left(\frac{c}{2}, o\right) \quad , \quad O_2\left(\frac{c+d}{2}, o\right) \quad , \quad O_3\left(\frac{d+b}{2}, o\right) \quad \text{şi} \quad O_4\left(\frac{b}{2}, o\right).$$

Punctele g_1, g_2, g_3, g_4 se găsesc pe perpendicularele în O_i pe AB, deci abscisele lui g_i sunt aceleaşi cu ale lui O_i. Depărtarea centrului de greutate al unui arc de cerc de rază R, la coardă este măsurată de

$$R\,\frac{\textit{Lungimea cordei}}{\textit{Lungimea arcului}} \tag{1}$$

Aplicând la cazul figurei din enunţul problemei, se găseşte uşor că

$$g_1\left(\frac{c}{2}, \frac{c}{\pi}\right);\ g_2\left(\frac{c+d}{2}, -\frac{d-c}{\pi}\right);\ g_3\left(\frac{d+b}{2}, \frac{b-d}{\pi}\right);\ g_4\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{\pi}\right).$$

Fie acum G (x, y) centrul de greutate al perimetrului curbilin al figurei. Luând momentele statice faţă de axele Ax, Ay vom avea

$$x\,\Sigma l = \Sigma l_i x_i \quad ; \quad y\,\Sigma l = \Sigma l_i y_i \tag{2}$$

în care Σl este perimetrul curbilin, l_i lungimea unuia din arcele AC, CD,... iar x_i, y_i sunt coordonatele lui g_i.

Ţinând seamă de rezultatele găsite şi înlocuind în (1), vom avea

$$x = \frac{\frac{\pi}{4}\left[c^2 + (c+d)(d-c) + (d+b)(b-d) + b^2\right]}{\pi\left(\frac{b}{2} + \frac{c}{2} + \frac{d-c}{2} + \frac{b-d}{2}\right)} = \frac{b}{2}$$

$$y = \frac{\frac{c^2}{2} - \frac{(d-c)^2}{2} + \frac{(b-d)^2}{2} + \frac{b^2}{2}}{\pi b} = \frac{b^2 + dc - bd}{\pi b}$$

$$\therefore\ G\left[\frac{b}{2}, \frac{b^2 + dc - bd}{\pi b}\right].$$

2. Fie g_1', g_2', g_3', g_4' şi G' centrele de greutate ale semicercurilor de diametre AC, CD, DB, AB şi al suprafeţei curbilinii limitată de ele.

Depărtarea centrului de greutate al unui segment circular, la coarda ce-l subîntinde, fiind $\frac{2}{3}$ din valoarea produsului (1), găsim uşor

$$g_1'\left(\frac{c}{2}, \frac{2c}{3\pi}\right) \; ; \; g_2'\left[\frac{c+d}{2}, -\frac{2}{3}\frac{d-c}{\pi}\right];$$

$$g_3'\left[\frac{b+d}{2}, \frac{2}{3}\frac{b-d}{\pi}\right] \; ; \; g_4'\left[\frac{b}{2}, \frac{2}{3}\frac{b}{\pi}\right].$$

Fie acum M_1, M_2, M_3, M_4, M momentele statice ale suprafeţelor considerate. Din dispoziţia figurei se vede că

$$M = M_4 - M_1 + M_2 - M_3$$

şi aplicând formulele (2), găsim pentru coordonatele x', y' ale lui G', valorile

$$x' = \frac{\frac{\pi}{16}[b^3 - c^3 + (d-c)^2(d+c) - (b-d)^2(b+d)]}{\frac{\pi}{8}[b^2 + (d-c)^2 - c^2 - (b-d)^2} = \frac{b+c+d}{4}$$

$$y' = \frac{\frac{\pi}{8}b^2.\frac{2}{3}\frac{b}{\pi} - \frac{\pi}{8}c^2\frac{2}{3}\frac{c}{\pi} - \frac{\pi}{8}(d-c)^2\frac{2}{3}\frac{d-c}{\pi} - \frac{\pi}{8}(b-d)^2\frac{2}{3}\frac{b-d}{\pi}}{\frac{\pi}{8}[b^2 + (d-c)^2 - c^2 - (b-d)^2]}$$

$$= \frac{b+c-d}{\pi}.$$

D-l D. MAVRODIN a dat o bună soluţie geometrică pentru punctul 1. Pentru punctul 2, raţionamentul şi rezultatul la care a ajuns pe cale geometrică sunt însă eronate.

PROBLEMA 4215. *Se consideră un triunghiu* ABC *şi din piciorul înălţimei vârfului* A *pe latura* BC, *se duc paralele respectiv la laturile* AB *şi* AC. *Aceste două paralele taie pe* AC *şi* AB *în* A' *şi* A''. *Analog se determină punctele* B', B'' *şi* C', C''. *Să se arate că*

$$a^4\overline{A'A''}^2 + b^4\overline{B'B''}^2 + c^4\overline{C'C''}^2 = 4S^2[48R^2 - 5(a^2+b^2+c^2)].$$

GH. TH. GHEORGHIU.

Prima soluție dată de D-ra MARIA DRĂGUȚ și de D-nii: N. N. MIHĂILEANU, S-LT. CONSTANTIN N. AVRAM, I. GH. ȘABAC și MARTIN S. ZIFF. Fie A_1 piciorul înălțimei și M punctul unde această înălțime taie pe A'A". Din asemănarea triunghiurilor CAB și $CA'A_1$ scoatem

$$\frac{A'A_1}{AB} = \frac{A_1C}{BC} \quad \therefore \quad A'A_1 = \frac{c}{a} \cdot A_1C.$$

Dar, din triunghiul dreptunghic

$$CA_1A, \quad A_1C = \sqrt{b^2 - h_a^2},$$

încât

$$A'A_1 = \frac{c}{a}\sqrt{b^2 - h_a^2} \quad \text{și analog} \quad A''A_1 = \frac{b}{a}\sqrt{c^2 - h_a^2}.$$

Pe de altă parte, $A_1M = \frac{1}{2} h_a$ este mediană în triunghiul $A'A_1A''$, încât putem scrie

$$\overline{A'A''}^2 + 4\overline{A_1M}^2 = 2\left(\overline{A_1A'}^2 + \overline{A_1A''}^2\right),$$

de unde scoatem, în baza celor de mai sus,

$$\overline{A'A''}^2 = 2\left[\frac{b^2}{a^2}(c^2 - h_a^2) + \frac{c^2}{a^2}(b^2 - h_a^2)\right] - h_a^2$$

$$= 4\frac{b^2c^2}{a^2} - [2(b^2 + c^2) - a^2]\frac{h_a^2}{a^2}.$$

Dar

$$S = ah_a = bh_b = ch_c = \frac{abc}{4R},$$

încât, putem scrie succesiv,

$$\Sigma a^4 \overline{A'A''}^2 = 12a^2bc^2 - S^2 \Sigma [2(b^2 + c^2) - a^2)]$$

$$= 4S^2[48R^2 - 5(a^2 + b^2 + c)]$$

adică tocmai ce ni se cerea.

A doua soluție dată de D-nii: V. CEAUȘESCU, I. CURCHI, C. IVĂNESCU, C. D. IONESCU-ȚIU, EM. I. MAREȘ, M. MARGULIUS, D. MAVRODIN, M. LEONTE A. NEGREA, S-LT. I. C. PAREPEANU, I. N. SAGER și J. SEGAL. Păstrând aceleași notații ca la soluția precedentă, cum:

$$A_1C = b\cos C \quad \text{și} \quad A_1B = c\cos B,$$

avem

$$A'A_1 = AA'' = \frac{bc}{a}\cos C \quad , \quad A''A_1 = A'A = \frac{bc}{a}\cos B.$$

Din triunghiul A′AA″ scoatem

$$\overline{A'A''}^2 = \frac{b^2c^2}{a^2}\cos^2C + \frac{b^2c^2}{a^2}\cos^2B - 2\frac{b^2c^2}{a^2}\cos B\cos C\cos A,$$

încât

$$a^4\overline{A'A''}^2 = a^2b^2c^2(\cos^2C + \cos^2B - 2\cos A\cos B\cos C).$$

Dar (*Culegere de probleme*, partea I, Cap. X, probl. 3, a)

$$2\cos A\cos B\cos C = \sin^2A + \sin^2B + \sin^2C - 2,$$

şi deci

$$a^4\overline{A'A''}^2 = a^2b^2c^2(4 - \sin^2A - 2\sin^2B - 2\sin^2C).$$

Făcând însumarea acestei expresii cu celelalte două analoage, rezultă

$$\Sigma a^4\overline{A'A''}^2 = a^2b^2c^2[12 - 5(\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C)]$$

$$= 16R^2S^2\left(12 - 5\frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2}\right) = 4S^2[48R^2 - 5(a^2+b^2+c^2)].$$

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4398. *Să se arate că dacă* a, b, c, α, β, γ *sunt şase numere reale, ultimele trei fiind legate prin relaţia*

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

atunci ecuaţia

$$(ab + bc + ca)x^2 - 2(a + b + c)x - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha - 1) = 0,$$

are rădăcini reale.

GH. TH. GHEORGHIU.

Soluţie dată de D-nii IOAN A. ILIE şi CONSTANTIN V. PANTELIMON. Realizantul ecuaţiei date este

$$R = (a + b + c)^2 + 2(ab + bc + ca)(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha - 1) =$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

şi care se mai poate scrie, în baza condiţiei din enunţ,

$$R = (a^2+b^2+c^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+2(ab+bc+ca)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

sau încă

$$R = (a\alpha+b\beta+c\gamma)^2+(a\beta+b\gamma+c\alpha)^2+(a\gamma+b\alpha+c\beta)^2,$$

ceea ce spune că dacă numerele $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ sunt reale, $R > 0$. Problema este rezolvată.

Observare. S'au mai primit şi alte soluţii greşite.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4777. *Fie* g *centrul de greutate al unui tetraedru* ABCD. *Dacă prin un punct* P *se duc plane paralele cu feţele* BCD, CDA, DAB, ABC *care întâlnesc pe* gA, gB, gC, gD *în* α, β, γ, δ, *să se demonstreze că*

$$\frac{\overline{g\alpha}}{\overline{g\,\mathrm{A}}}+\frac{\overline{g\beta}}{\overline{g\,\mathrm{B}}}+\frac{\overline{g\gamma}}{\overline{g\,\mathrm{C}}}+\frac{\overline{g\delta}}{\overline{g\,\mathrm{D}}}=0.$$

V. THÉBAULT.

Soluţie dată de D-l V. ECKSTEIN.

Fie h_a, h_b, h_c, h_d înălţimile tetraedrului şi x, y, z, t distanţele lui P la feţele tetraedrului ABCD. Avem

$$\frac{\overline{g\alpha}}{\overline{g\mathrm{A}}}=\frac{x-\frac{h_a}{4}}{3\frac{h_a}{4}}=\frac{3}{4}\left(\frac{x}{h_a}-\frac{1}{4}\right)$$

$$\therefore\ \sum\frac{\overline{g\alpha}}{\overline{g\mathrm{A}}}=\frac{4}{3}\left(\sum\frac{x}{h_a}-1\right)=0$$

deoarece după o proprietate cunoscută $\sum\frac{x}{h_a}$ este egală cu unitatea.

Bună soluţie analoagă, calculând volumele tetraedrelor PBCD, PACD, ... s'a primit dela D-l IOAN A. ILIE.

PROBLEMA 5067. *O dreaptă* (Δ) *variabilă, trecâna prin punctul fix* P(*p*, *q*) *taie axa* O*x* *în* M *şi dreapta* (D) *de ecuaţie* $f(x, y) = y - mx = 0$ *în* N. *Locul geometric al centrului cercului* OMN *este o iperbolă trecând prin origine, cu asimptotele de direcţii perpendiculare pe* (D) *şi* O*x*, *tangenta în origine fiind* $y : x = f(q, p) : f(p, q)$. *Caz particular :* $m \to \infty$.

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţie dată de D-nii: PETRE V. CAZANACLI (Ismail), GH. D. CÂRDEI (lic. mil. Iaşi), S-LT. M. GRUMĂZESCU, MIRCEA C. NICULESCU (lic. T. Maiorescu, Bucureşti), MIRCEA D. POPA (cl. VII-a lic. mil. Iaşi), ALEXANDRU N. POPESCU-ZORICA (stud. matematici, Bucureşti), TEODOR A. ŞERBAN, I. I. STAMATE (stud. matematici, Cluj) şi MIREL D. STOENESCU (lic. mil. M-rea Dealu).

Enunţul fixând axele şi coordonatele punctului P şi ecuaţia dreptei (D) trecem direct la rezolvarea problemei. Ecuaţia dreptei (Δ) va fi

$$y - q = \lambda (x - p)$$

şi coordonatele punctelor M, N

$$(M) \qquad x = \frac{\lambda p - q}{\lambda} \quad , \quad 0$$

$$(N) \qquad x = \frac{q - \lambda p}{m - \lambda} \quad , \quad \frac{m(q - \lambda p)}{m - \lambda}$$

scriind ecuaţiile mediatoarelor pe OM şi ON, avem

$$x = \frac{\lambda p - q}{2\lambda} \quad , \quad y - m\frac{q - \lambda p}{2(m - \lambda)} = -\frac{1}{m}\left[x - \frac{q - \lambda p}{2(m - \lambda)}\right]$$

rămâne să eliminăm pe λ între aceste ecuaţii, îl scoatem din prima ecuaţie

$$\lambda = \frac{q}{p - 2x}$$

şi substituind în ecuaţia a doua, se obţine ecuaţia locului

$$(\Gamma) \qquad 2x^2 + 2mxy - (p + mq)x + (q - mp)y = 0$$

adică o iperbolă ($\delta = -m^2$), ce trece prin origine (ecuația n'are termen liber), cu asimptotele de direcții

$$x(x + my) = 0$$

deci una paralelă cu Oy ($x = 0$), alta perpendiculară pe (D) ($m' = -1/m$); tangenta în origine (grupul termenilor de gradul 1) este

$$-(p + mq)x + (q - mp)y = 0$$

sau

$$y : x = f(-q, p) : f(p, q)$$

când $m \to \infty$, ecuația se reduce la

$$(H) \qquad 2xy - qx - py = 0$$

deci o iperbolă echilateră cu centrul în mijlocul OP; când m e variabil, (Γ) e o familie de conice trecând prin punctele comune hiperbolei (H) și parabolei (P)

$$(P) \qquad 2x^2 - px + qy = 0$$

locul centrelor conicelor (Γ) este parabola

$$(\Pi) \qquad 8x^2 - 6px - 2qy + p^2 + q^2 = 0.$$

Observare. Fie U și V două puncte oarecare; o dreaptă arbitrară ce trece prin U taie pe Ox în M și MP pe D în N; rezultă că razele UM și VN stau într'o corespondență omografică și intersecția lor X descrie o conică ce trece prin U, V și O pentru $M \equiv 0$. PU, PV taie pe D și Ox în alte două puncte ale locului. Când U și V sunt două puncte la infinit, conica devine o iperbolă cu direcțiile asimptotice OU, OV; când U și V sunt la infinit pe direcții perpendiculare, conica este o iperbolă echilateră; în acest ultim caz

$$\text{ung. } (OX, Ox) = \text{ung. } (D, Ox) + \text{compl. ung. } (\Delta, Ox)$$

sau

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{cotg}[(\Delta, Ox) - (D, Ox)] = \frac{1 + \lambda m}{\lambda - m}$$

la limită, când Δ trece prin O, deci $\lambda = q : p$, avem

$$\lim \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{p + qm}{q - pm}.$$

Făcând o omotetie de centru O, raport 1/2, se obține curba căutată.

PROBLEMA 5188. *In triunghiul* ABC *fie* AM *mediana corespunzătoare vârfului* A *şi* Δ *simetrica acestei mediane faţă de* BC. *Se consideră două cercuri, care trecând unul prin* B *şi altul prin* C, *trec ambele prin* M *şi au al doilea punct comun* N *situat pe* Δ. *Aceste cercuri intersectează a doua oară pe* AB *şi* AC *în* E *şi* F. *Să se arate că* EN *şi* FN *trec prin două puncte isotomice ale lui* BC.

THEODOR G. COCEA.

Soluţie dată de D-nii: HORIA M. BODNĂRESCU, EUGEN G. FILA (stud. Cluj), MIRCEA D. POPA (lic. mil. Iaşi), MIHAIL I. TREFILOV (lic. Brăila).

Fie U şi V intersecţiile dreptelor NE, NF cu BC.

Din cauza patrulaterelor inscriptibile şi a simetricei MN, se observă egalităţile de unghiuri

$$MNU = ABC \quad , \quad UMN = ANB$$

adică triunghiurile UNM, ABM sunt asemenea; deci

$$\frac{MU}{MN} = \frac{AM}{MB}$$

analog

$$\frac{MV}{MN} = \frac{AM}{MC}$$

dar $MB = MC$, deci $MU = MV$ şi punctele U şi V sunt isotomice pe BC.

Observare. Dacă M ar fi arbitrar pe BC, segmentele MU, MV ar fi invers proporţionale cu MB, MC.

PROBLEMA 5213. *Să se demonstreze că dacă* u_n *este termenul de rangul* n *în şirul lui* FIBONACCI, *atunci suma*

$$u_n^2 x^{n+2} - [u_{n+1}^2 - u_n^2 + 2(-1)^n] x^{n+1} - u_{n+1}^2 x^n - x^2 + 2x + 1$$

se divide prin $x + 1$, *oricare ar fi* x.

G-L GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-nii: M. D. POPA, I. V. JAREGHIE (Lic. militar Iaşi) şi C. D. EFTIMIE (Elev inginer).

Grupând termenii în mod convenabil avem

$$E = u_n^2 x^{n+1}(x+1) - u_{n+1}^2 x^n (x+1) - (x^2-1) - 2[(-1)^n x^n - 1]x$$

Primii 3 termeni sunt evident divizibili prin $x+1$, ultimul termen devine

$$-2[x^{2p}-1]x \quad \text{sau} \quad +2[x^{2p+1}+1]x$$

după cum n este pereche sau nepereche şi este evident că şi într'un caz şi în altul şi ultimul termen este divizibil prin $x+1$.

Suma din enunţ este divizibilă prin $x+1$ dacă u_n şi u_{n+1} se înlocuesc cu nişte numere oarecare a şi b.

Au dat foarte bune soluţiuni dovedind că $E(-1)$ este identic nulă orice numere ar fi u_n şi u_{n+1}, D-nii: Fl. J. Abeles, St. Cetăţeanu, P. Constantin, C. D. Eftimie, C. I. Mocanu, Al. I. Rohr.

Expresiunea din enunţ se poate întâlni în cursul rezolvărei problemei 3308, deaceea am pus la coeficienţi numere din şirul lui Fibonacci. Problemei 3308 încă nu i s'a publicat soluţia.

Gh. B.

PROBLEMA 5241. *Se cere a se da toate înmulţirile de forma:*

$$a \times bcd = ecdf,$$

în sistemul zecimal.

I. Ionescu.

Dacă însemnăm cu $\overline{cd}$ numărul care are c zeci şi d unităţi, egalitatea dată se poate scri:

$$(1) \qquad a \times (100b + \overline{cd}) = 1000e + 10\overline{cd} + f,$$

$$(2) \quad \therefore \quad 100(a \times b - 10e) = (10 - a)\,\overline{cd} + f = k.$$

Cum $a \leqslant 9$ reese $k \geqslant 0$. Deci $(a \times b - 10e) > 0$, de unde $e < 0{,}1\ a \times b$. Maximum lui $\overline{cd}$ fiind 98, rezultă $k \leqslant (10-1)\,98 + 7$, adică $k \leqslant 889$ şi după (2) reese $(a \times b - 10e) \leqslant 8{,}89$; deci $(a \times b - 10e) \leqslant 8$. Prin urmare trebue să luăm $a > 1$, $b > 1$, căci e este cel puţin 1.

Pentru a deslega problema procedeul de urmat este următorul. Facem pe rând $a = 2, 3, \ldots, 9$ şi alegem pe e şi b aşa ca să se îndeplinească condiţiile găsite:

$$(3) \qquad e < 0{,}1\ a \times b \quad , \quad a \times b - 10e \leqslant 8.$$

După (2) cu a, b, e calculăm pe k, pe care îl împărţim cu $(10-a)$. Câtul este $\overline{cd}$ şi restul f. Putem micşora pe $\overline{cd}$ cu 1 şi mări pe f cu $(10-a)$ şi găsim un nou sistem de valori. Operaţia se poate repeta până ce f trece de 9. Dacă la această cercetare găsim pentru a, b, c, d, e, f valori diferite, avem o soluţie a problemei. Operaţia nu se mai continuă pe dată ce două din aceste numere ies egale.

Calculele se pot simplifica uneori dacă la aplicarea relaţii (2) putem face simplificări. Iată aici toate calculele necesare:

$a = 2$. Egalitatea (2) devine:

$$25(b-5e) = \overline{cd} + (f/8). \tag{4}$$

Se vede că nu putem lua decât $f = 0$ şi $f = 8$. Egalitatea se poate satisface astfel:

$$\begin{array}{llll} f=0, & b-5e=1, & \overline{cd}=25, & c=a=2 \\ & =2, & =50, & d=f=0. \\ & =3, & =75, & b=8, \quad e=1. \\ f=8, & b-5e=1, & cd=24, & c=a=2. \\ & =2, & =49, & b=7, \quad e=1. \\ & =3, & =74, & b=f=8. \end{array}$$

De aici rezultă două soluţii:

$$2 \times 875 = 1750 \quad , \quad 2 \times 749 = 1498.$$

$a = 3$. Egalitatea (2) devine:

$$100(3b-10e) = 7\overline{cd} + f = k. \tag{5}$$

După prima condiţie (3), cum $b \leqslant 9$, rezultă $e \leqslant 2{,}7$, deci nu putem lua decât $e = 1$ sau $e = 2$. Din $(3b-10e) > 0$ reese $b \geqslant 4$ în primul caz şi $b \geqslant 7$ în al doilea caz. A doua condiţie (3) limitează pe b la cel mult 6 în primul caz şi nu-i pune limită sub 9 în al doilea caz. De aici rezultă:

$$\begin{array}{llll} e=1, & b=4, & k=200, & \overline{cd}=28, \quad f=b=4, \\ & =5, & =500, & =71, \quad d=e=1, \\ & =6, & =800, & >98, \\ e=2, & =7, & =100, & =14, \quad f=e=2. \\ & =8, & =400, & =57, \quad f=1. \\ & =9, & =700, & >98. \end{array}$$

De aici reese soluţia:

$$3 \times 857 = 2571.$$

$a = 4$. Egalitatea (2) devine:

$$(6) \qquad 100(2b - 5e) = 3\overline{cd} + \frac{1}{2} f = \frac{1}{2} k.$$

Se vede de aici că $f = \mathfrak{M}2$.

Pentru $f = 0$ trebue $\overline{cd} = 100 > 98$.

Pentru $f = 2$, dacă $(2b - 5e) = 1$ iese $\overline{cd} = 33$ cu $c = d$.

Pentru $(2b - 5e) = 2$ iese $\overline{cd}$ fracţionar, şi pentru valori superioare iese $\overline{cd} > 98$.

Pentru $f = 6$ egalitatea (6) devine:

$$100(2b - 5e) = 3(\overline{cd} + 1).$$

De aici rezultă că $(2b - 5e) = \mathfrak{M}3$, care nu se poate realiza decât luând $b = 4 = a$ şi $e = 1$, care nu convine, sau $b = 7$ $e = 1$, care dă $\overline{cd} > 98$, sau $b = 9$, $e = 3$ care dă $\overline{cd} = 99 > 98$.

Pentru $f = 8$ relaţia (6) devine:

$$100(2b - 5e) = 3\overline{cd} + 4.$$

Aceasta cere $d = 2$ şi ne rămâne:

$$10(2b - 5e) = 3c + 1,$$

care cere $c = 3$ şi deci $(2b - 5e) = 1$. Aceasta se poate realiza luând $b = 3 = c$, $e = 1$, care nu convine, sau $b = 8 = f$ şi $e = 3$, care deasemenea nu convine.

$a = 5$. Egalitatea (2) devine:

$$500(b - 2e) = 5\overline{cd} + f,$$

care cere $f = 0$ sau $f = 5$. Prima dă $\overline{cd} > 98$, a doua nu convine căci $f = a = 5$.

$a = 6$. Egalitatea (2) devine:

$$50(3b - 5e) = cd + \frac{1}{4} f.$$

Pentru $f = 0$ găsim $\overline{cd} = 50$, deci $d = f = 0$.

Pentru $f = 4$ ese $\overline{cd} = 49$, şi deci $c = f = 4$.

Pentru $f = 8$, $\overline{cd} = 48$ cu $d = f = 8$ sau $cd = 98$ cu $d = f = 8$.

$a = 7$. Egalitatea (2) devine:

$$100(7b - 10e) = 3cd + f.$$

Nu putem lua decât $(7b—10e)=1, 2, 3$ căci altfel iese $\overline{cd} > 98$. In primul caz $b=3$, $e=2$ şi găsim $\overline{cd}=33$ cu $f=1$, $cd=\overline{32}$ cu $f=4$ sau $\overline{cd}=31$ cu $f=7$, care toate au $c=b=3$. In al doilea caz $b=6$, $e=4$ care dă $cd=66$, $f=2$, inadmisibil căci $c=d=3$; sau $\overline{cd}=65$, $f=5$ inadmisibil căci $f=d=5$. In ultimul caz $b=9$, $e=6$ şi $f=\mathfrak{M}3$. Pentru $f=0$ sau $f=3$ găsim $\overline{cd}>98$. Pentru $f=6$ găsim $\overline{cd}=98$ cu $c=b=8$, iar pentru $f=9$ găsim $\overline{cd}=97$ cu $c=b=9$. Nu avem nici o soluţie.

$a=8$. Egalitatea (2) devine:

$$100(4b-5e)=\overline{cd}+\frac{1}{2}f.$$

Nu putem lua $(4b-5e)>1$ căci iese atunci $\overline{cd}>98$. Dar $\frac{1}{2}f$ nu poate fi decât 0, 1, 2, 3, 4. Primele două valori dau $cd>98$, şi $cd=98$ la care $d=a=8$. Pentru $\frac{1}{2}f=3$ găsim $\overline{cd}=97$, iar pentru $\frac{1}{2}f=4$ găsim $\overline{cd}=96$. Ca să avem $(4b-5e)=1$ trebue să luăm $b=4$, $e=3$ sau $b=9$, $e=7$. Aceasta din urmă nu convine căci dă $b=c$. Pentru $\overline{cd}=97$ avem $f=6$ şi deci soluţia:

$$8\times 497=3976.$$

Ipoteza $f=8$ nu convine căci dă $f=a=8$.

$a=9$. Egalitatea (2) devine:

$$100(9b-10e)=cd+f.$$

Nu putem lua $(9b-10e)>1$ căci iese $\overline{cd}>98$. Pentru $f=2, 3, \ldots, 9$, găsim $\overline{cd}=98, 97, \ldots, 91$. Toate au $c=a=9$ şi sunt deci inadmisibile.

I. I.

Problema a fost bine rezolvată de D-l D. D. BOIANGIU (Clasa VIII-a Liceul Traian din Turnul Severin). D-sa a dat şi soluţiile formale:

$$2\times 142=0426\quad,\quad 2\times 374=0748.$$

Au dat soluţii bune şi D-nii: MARIN F. VĂDUVA (Liceul Ion Maiorescu, Giurgiu), FLORIN I. ABELES (Liceul V. Alexandri, Galaţi).

D-l PETRESCU V. ACHILLE a găsit soluţia cu $a=3$.

PROBLEMA 5266. *Fie* ABC *un triunghiu oarecare,* G *centrul său de greutate, iar* A', B', C' *picioarele înălțimilor. Să se arate că cercurile* AGA', BGB', CGC' *formează un fascicol.*

CEZAR COȘNIȚĂ.

Soluție. Cercul de diametru BC trece prin C', B' rezultând relația, H fiind ortocentrul triunghiului:

$$\overline{HB} \cdot \overline{HB'} = \overline{HC} \cdot \overline{HC'}.$$

Din considerații analoage se deduce:

$$\overline{HA} \cdot \overline{HA'} = \overline{HB} \cdot \overline{HB'} = \overline{HC} \cdot \overline{HC'}$$

ceea ce arată că ortocentrul H are *aceeași putere* față de cercurile AGA', BGB', CGC'.

Dar aceste cercuri au un *punct comun:* G.

Urmează că *axele radicale* ale perechilor de cercuri: AGA', BGB'; BGB', CGC'; CGC', AGA' sunt trei drepte care trec atât prin H cât și prin G, adică se reduc la o *singură axă radicală* GH și deci cercurile din enunț formează un fascicol.

Observațiuni. 1°. Au dat soluții bune, observând și că punctul G poate fi oarecare în plan, D-nii: DRĂGHICESCU P. PAUL (lic. militar Iași), FILA GH. EUGEN (student Matematici, Cluj), POPA D. MIRCEA (Clasa VIII-a lic. militar Iași), PANTELIMON CONSTANTIN (Clasa VIII-a lic. militar Iași) și RĂDULESCU GH. OCTAVIAN (Anul I, S. O. A.).

2°. D-l RUSU L. MIRCEA arată că problema e cunoscută sub o formă diferită și generală dintr'o notă a D-lui A. ANGELESCU și anume în „G. M.", Vol. X, pag. 86, astfel: „Dacă printr'un punct al planului ducem cercuri având înălțimile unui triunghiu ca coarde, aceste cercuri se întâlnesc într'un același punct".

A. G.

PROBLEMA 5273. *Două persoane întrebate anul acesta ce vârstă au, răspund:*

Prima: „*Adună cifrele anului nașterii mele și îmi vei găsi vârsta*".

A doua: „*Inmulțește cifrele anului nașterii mele și îmi vei găsi vârsta*". *Se cere vârsta celor două persoane.*

ION C. SCHILERU-DILI.

(Anul acesta este evident 1940).

I. *Cazul primei persoane.*
Anul naşterii poate fi:

a) $18xy = 1000 + 800 + 10x + y$

b) $19xy = 1000 + 900 + 10x + y.$

a) Conform enunţului vom avea:

$$1000 + 800 + 10x + y + 1 + 8 + x + y = 1940$$

$$\therefore \quad 11x + 2y = 131 \quad \therefore \quad y = \frac{131 - 11x}{2}$$

cum:

$$0 \leqslant y \leqslant 9 \quad \text{şi} \quad 0 \leqslant x \leqslant 9$$

vedem uşor că nu avem soluţie.

b) Conform enunţului vom avea:

$$1000 + 900 + 10x + y + 1 + 9 + x + y = 1940$$

$$\therefore \quad 11x + 2y = 30 \quad \therefore \quad y = \frac{30 - 11x}{2}$$

Soluţia evidentă este:

$$x = 2 \quad , \quad y = 4.$$

Deci anul naşterii este 1924, iar vârsta 16 ani.
In adevăr:

$$1924 + 1 + 9 + 2 + 4 = 1940.$$

II. *Cazul celei de a doua persoane.*
Anul naşterii poate fi:

a) $18xy = 1000 + 800 + 10x + y$

b) $19xy = 1000 + 900 + 10x + y.$

a) Conform enunţului vom avea:

$$1000 + 800 + 10x + y\ (1.8.x.y.) = 1940$$

$$\therefore \quad 10x + y + 8xy = 140 \quad \therefore \quad y = \frac{140 - 10x}{1 + 8x}$$

unde vedem uşor că nu avem soluţie.

b) Conform enunțului vom avea:

$$1000 + 900 + 10x + y + (1 \,.\, 9 \,.\, x \,.\, y) = 1940$$

$$\therefore \quad 10x + y + 9xy = 40 \quad \therefore \quad y = \frac{40 - 10x}{1 + 9x}$$

unde se vede ușor că soluția este:

$$x = 1 \quad , \quad y = 3.$$

Deci anul nașterii este 1913, iar vârsta 27 ani.
In adevăr:

$$1913 + 1 \,.\, 9 \,.\, 1 \,.\, 3 = 1940$$

Soluții foarte bune date de D-nii: ALDEA VIRGIL, ANDONIE ST. IANCU, BADEA A. IOAN, DIACONESCU V. CONSTANTIN, DRĂGHICESCU P. PAUL, NEGREA A. MIRCEA, NICULESCU C. MIRCEA, ROHR I. ALEXANDRU, RUSU L. MIRCEA, STOICA V. VICTOR.

Soluții mulțumitoare date de D-nii: ANGHELICHI E. RADU, LEIBOVICI SERGIU, POTOPEANU GH.

Recomand corespondenților noștri de a se ocupa de șirul de numere ce formăm plecând dela un număr dat, prin adunarea la acel număr a sumei sau produsului cifrelor sale.

I. C. S-D.

EXERCIȚII

28. Notațiile fiind cele obișnuite într'un triunghiu, să se demonstreze identitatea:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \sin\frac{B-C}{2} & \cos\frac{A}{2}\cos B & b \,.\, \sin\frac{A}{2} \\ \sin\frac{C-A}{2} & \cos\frac{B}{2}\cos C & c \,.\, \sin\frac{B}{2} \\ \sin\frac{A-B}{2} & \cos\frac{C}{2}\cos A & a \,.\, \sin\frac{C}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

TUDOR STOICESCU.

R. Pentru uşurinţa scrierii voi nota şi face calculul numai a unei singure linii, celelalte operaţii fiind analoage:

$$\Delta_3 = \left| \sin\frac{B-C}{2} \quad \cos\frac{A}{2}\cos B \quad b\,.\sin\frac{A}{2} \right| =$$

$$\left| \sin\frac{B-C}{2} \quad \cos\frac{A}{2}\cos B - \frac{b}{2R}\sin\frac{A}{2} \quad b\sin\frac{A}{2} \right|$$

unde am scăzut coloana III-a din a II-a după ce am amplificat-o cu $\frac{1}{2R}$; în acest caz avem:

$$\Delta_3 = \left| \sin\frac{B-C}{2} \quad \cos\frac{A}{2}\cos B - \sin B\sin\frac{A}{2} \quad b\sin\frac{A}{2} \right| =$$

$$\left| \sin\frac{B-C}{2} \quad \cos\left(\frac{A}{2}+B\right) \quad b\sin\frac{A}{2} \right|; \text{ ori } \sin\frac{B-C}{2} = -\cos\left(\frac{A}{2}+B\right)$$

căci:

$$\cos\left(\frac{A}{2}+B\right) = \cos\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{B}{2}\right) = \cos\left(90-\frac{C}{2}+\frac{B}{2}\right) = \sin\frac{C-B}{2}.$$

Deci $\Delta_3 = 0$ având 2 coloane egale şi de semne contrare.

29. Dacă $0 < x \leqslant \pi$, să se demonstreze neegalitatea:

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin 4x \leqslant \frac{5}{8}\left[\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} + \frac{1}{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right].$$

TUDOR STOICESCU.

R. Notând

$$y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin 4x,$$

derivata este:

$$y' = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 4\cos\frac{x}{2}\cos x\cos\frac{5x}{2}.$$

Anulând derivata şi făcând tabloul de variaţie al funcţiei deducem:

x	0		$\frac{\pi}{5}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{5}$		π
y'	4	+	0	−	0	+	0	−	0
y	0	cr.	K_1 Max.	descr.	$\frac{2}{3}$ min.	cr.	K_2 Max.	descr.	0 min.

unde

$$K_1 = \frac{5}{8}\left[\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} + \frac{1}{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right]$$

iar

$$K_2 = \frac{5}{8}\left[\frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \frac{1}{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right].$$

Acest tablou arată că funcţia dată nu poate în intervalul 0 la π să întreacă prima valoare maximă K_1, lucru ce demonstrează inegalitatea.

30. Să se demonstreze că dacă:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= n + r\frac{p-b}{p-c} + m\frac{p-b}{p-a} \\ y &= r + m\frac{p-c}{p-a} + n\frac{p-c}{p-b} \\ z &= m + n\frac{p-a}{p-b} + r\frac{p-a}{p-c}. \end{aligned}$$

Avem şi $mxy + nyz + rzx = xyz$ unde $p = \frac{a+b+c}{2}$, iar m, n, r numere oarecare.

TUDOR STOICESCU.

R. Se consideră sistemul:

$$\frac{x+y}{a} = \frac{y+z}{b} = \frac{z+c}{c}\,;\quad \frac{m}{z} + \frac{n}{x} + \frac{r}{y} = 1.$$

Notez cu ρ valoarea comună celor 3 rapoarte egale şi avem:

$$x + y = a\rho \quad ; \quad y + z = b\rho \quad \text{şi} \quad z + x = e\rho$$

care dau

$$x + y + z = \frac{\rho}{2}(a + b + c) = \rho p\,;$$

deduc succesiv:

$$n = \rho(p-b) \quad ; \quad y = \rho(p-c) \quad ; \quad z = \rho(p-a).$$

Introduc aceste valori în $\frac{m}{z} + \frac{n}{x} + \frac{r}{y} = 1$ şi avem:

$$\rho = \frac{m}{p-a} + \frac{n}{p-b} + \frac{r}{p-c}.$$

Prin urmare deduc pentru x, y şi z valorile date de (1) în enunţ. Relaţia de verificat este înlocuirea necunoscutelor în ecuaţia $\frac{m}{z} + \frac{n}{x} + \frac{p}{y} = 1$ a sistemului luat pusă sub forma $mxy + nyz + rzx = xyz$ ceea ce demonstrează relaţia cerută.

PROBLEME PROPUSE

5317. Laturile unui patrulater plan sunt de 101,40 m, 120,08 m, 156,31 m, şi 326,25 m. Calculându-se aria lui s'a găsit 18936,21 m^2. S'a calculat bine aria?

I. IONESCU.

5318. Să se găsească forma generală a numerelor întregi x, y şi z, ştiind că verifică relaţia

$$(x-1)(y+1)(z+2) = xyz.$$

EMILIAN MEREUŢĂ.

5319. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Se iau pe razele OA, OB, OC punctele A', B', C' care le împart în acelaş raport. Se cere:

a) Să se arate că perpendicularele scoborâte din A', B', C' respectiv pe BC, CA, AB sunt concurente într'un punct P;

b) Locul lui P, când raportul variază, este o dreaptă ce trece prin O.

S-LT. I. I. BUZINCU.

5320. Fie ABCD un patrulater inscriptibil în cercul O şi EF cea de-a treia diagonală a sa. Se consideră înălţimile triunghiului EBC. Centrele cercurilor, care trecând prin centrul cercului O au cu acesta ca axe radicale câte una din înălţimile triunghiului EBC, au aceeaşi dreaptă D_1. Prin construcţii analoage se obţin pentru triunghiurile EAD, FAB şi FCD dreptele D_2, D_3, D_4. Să se arate că dreptele D_1, D_2, D_3, D_4 sunt concurente în acelaş punct.

THEODOR GH. COCEA.

5321. Se dă un triunghiu ABC şi o transversală Δ, care întâlneşte laturile BC, CA, AB respectiv în M, N, P. Paralelele duse prin M, N, P respectiv AB, BC, CA întâlnesc din nou laturile triunghiului în trei puncte aşezate pe o dreaptă Δ'. Dreptele Δ şi Δ' se taie în punctul O.

Să se arate că paralelele duse prin B, C; C, A; A, B la Δ' şi Δ se întâlnesc respectiv pe AO, BO, CO.

GH. D. SIMIONESCU.

5322. Să se arate că în planul a trei conice omotetice (M), (N), (P) există un punct S ale cărui secante taie conicele respectiv în M', M"; N', N"; P', P", astfel încât:

$$\overline{SM'} \cdot \overline{SM''} = \overline{SN'} \cdot \overline{SN''} = \overline{SP'} \cdot \overline{SP''}.$$

AD. GHEORGHIU.

5323. Câte *Vineri* din cursul anului 1940 cad în ziua de 13 ale lunii?

V. THÉBAULT.

5324. Să se rezolve sistemul

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 = a_1 \quad ; \quad x_2 x_3 + x_3 x_4 = a_2 ; \ldots$$
$$\ldots ; \ x_{2n} x_{2n+1} + x_{2n+1} x_1 = a_{2n} \quad ; \quad x_{2n+1} x_1 + x_1 x_2 = a_{2n+1}.$$

M. CHIRIŢĂ.

5325. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt rădăcinile unui polinom întreg în x de gradul n, atunci expresiunea

$$(h - x_1)(h - x_2) \ldots (h - x_n) - h \Sigma_{n-1} (h - x_\alpha) \ldots$$
$$\ldots (h - x_\lambda) + h^2 \Sigma_{n-2} (h - x_\alpha) \ldots (h - x_\mu) + \ldots - \ldots + (-1)^n h^n,$$

unde am notat prin Σ_p suma tuturor produselor ce se pot face cu factorii de forma $(x - x_\nu)$ luaţi câte p, este egală cu produsul:

$$(-1)^n x_1 x_2 \ldots x_n .$$

D. GEORGESCU-PITEŞTI.

5326. Să se demonstreze că ecuaţiile algebrice de gradul $4n - 1$, în care coeficienţii a_{4n-p-1} corespunzători termenilor x^p, $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ verifică relaţiile

$$\frac{a_{4n-p-1}}{a_{4n-p-3}} = k \quad , \quad \frac{a_{4n-4p-1}}{a_{4n-4p-2}} = h,$$

se pot scrie sub forma

$$(kx^2+1)\,(hx+1)f(x^4)=0$$

şi deci ele sunt rezolvabile algebriceşte dacă $n\leqq 5$.

G. G. CONSTANTINESCU.

5327. Fiind dată funcţiunea

$$y=\operatorname{arctg}\frac{e^{x^2}}{e^{x^2}-1},$$

se cere:

1. Să se studieze variaţia funcţiunii şi să se traseze curba (C) pe care o reprezintă.

2. Fie A punctul unde curba (C) taie axa OY, P_n punctul de pe curbă de abscisă $\frac{1}{n}$, S_n proiecţia sa pe OY, Q_n şi R_n punctele unde tangenta în P_n la curba (C) taie respectiv pe OY şi tangenta în A. Dacă notăm prin:

$$u_n=\overline{AQ_n}\ ,\quad v_n=\overline{AR_n}\ ,\quad w_n=\overline{AR_n}-\alpha\,\overline{S_nP_n},$$

să se arate că seria Σu_n este convergentă, seria Σv_n este divergentă şi apoi să se determine parametrul α în aşa fel ca seria Σw_n să fie şi ea convergentă.

GH. TH. GHEORGHIU.

5328. Să se demonstreze că într'un triunghiu oarecare există relaţia:

$$a^2\operatorname{tg}A+b^2\operatorname{tg}B+c^2\operatorname{tg}C=2S\,(\sec A\sec B\sec C-2).$$

T. STOICESCU.

5329. Să se rezolve ecuaţia:

$$2\cos 2x+\cos 6x=0.$$

G-L GH. BUICLIU.

5330. Un pendul de greutate $G = 100$ gr al cărui fir are lungimea $l = 0{,}6$ m (greutatea firului se neglijează) este mai întâi în poziţia de echilibru. Se întreabă ce viteză orizontală v_0 trebue imprimată pendulului pentru următoarele cazuri:

1. Pendulul va oscila până la o înălţime în care firul face un unghiu de 120^0 cu poziţia iniţială. Se va studia dacă sfoara va rămâne întinsă până la această poziţie.

2. Pendulul nu va oscila, ci va face o învârtitură complectă, sfoara rămânând întinsă în tot timpul mişcării.

Se va studia în ambele cazuri tensiunea în sfoară în diferitele poziţii ale pendulului.

(Se poate lua $g = 10$ m/sec).

GABRIELA ŢIŢEICA.

5331. In actualul război bombardamentele aeriene de mare precizie se execută aproape numai în picaje foarte accentuate.

Admitem că o navă merge cu *36 noduri,* iar un avion inamic, urmărindu-o, o atacă în picaj, subt un unghiu de 80^0 faţă de orizontală, evoluţia executându-se în sensul mersului navei şi în planul vertical de simetrie al ei.

Presupunând că asvârlirea bombei se face când avionul ajunge la o altitudine de *500 m,* viteza de picaj a avionului fiind 700 km/oră, se pune întrebarea: *Care va fi unghiul de vizare utilizat de aviator?*

Rezistenţa aerului opusă bombei se va neglija.

CPT. C-DOR I. LINTEŞ.

ERATĂ. 1°. In tabloul (1) dela pag. 494 se înlocueşte $\sqrt{ba}$ prin $\sqrt{ab}$.

2°. La ultimele egalităţi dela pag. 499 se va scrie factorul $\frac{1}{2}$ înaintea lui b şi înaintea lui c.

3°. La problema propusă 5293, la relaţia 1-a şi a 3-a, se va schimba între ele γ şi γ'.

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Arendt R. E. (5244); *Badea H. I.* (5302); *Bakonyi C.* (5290); *Bârlea-Suhăţeanu Gh. V.* (5210, 91); *Bogdan Gh. Gh.* (5185); *Boiangiu D. D.* (5275, 91); *Cernat T. I.* (5273); *Cetăţeanu St.* (5290, 91); *Cherţman M.* (5186, 205, 83); *Cocea Gh. Th.* (P); *Costin D. Al.* (5275); *Diaconescu V. C.* (4474, 5258, 91); *Dobrescu Valeriu* (5243, 73); *Drăghicescu P. Paul* (3467, 5124, 302, 05, 07); *Florescu Victor* (5268); *Gheorghiu Octavian* (5273, 313); *Giuglan D-tru* (5243, 73); *Holca L. Radu* (5243); *Iancu St. A.* (5291); *Ivan C. Z.* (5185, 275); *Jareghie V. Ioan* (5186, 244, 75); *Jiletcovici G. Al.* (5185, 275); *Mihăilescu C. Const.* (5186, 282, 83, 87); *Moessner A.* (N); *Moldoveanu S. D.* (5273, 82, 83); *Negrea A. Mircea* (4667, 5219, 99, 312, 13); *Niculescu C. Mircea* (5144); *Pantelimon V. Const.* (5185, 218, 68, 75, 80, 97, 99, 301, 05, 07, 13, R); *Petrescu Iulian* (N); *Petrescu R. Gh.* (5160, 98); *Petrescu V. Achile* (5185, 275); *Popa D. Mircea* (3180, 4568, 704, 871, 5050, 193, 209, 80, 81, 97, 300, 01, 05, 07, 12, 13); *Popa N. A.* (5185, 275); *Puchiu I. Gh.* (5185); *Raicu S. Virgil* (5273); *Ripianu D-tru* (5219); *Rohr I. Alex.* (4474, 705, 49, 5091, 134, 305); *Rollea C. V.* (5291); *Russu L. M.* (3939, 5263, 80): *Şerban A. Teodor* (5143, 218, 313); *Ştefanovici I. M.* (5283); *Văduva F. Marin* (5190); *Vasilescu-Stabu Al. M.* (5186); *Vijelie Gh. Eug.* (5227, 36, 60).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE"

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE"

Vol. I, II, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică* Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*
Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE"

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 50 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa :

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon : 3-9803).

C. 64.839

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLV

NUMĂRUL 11. — IULIE 1940

BIBLIOTECA CENTRALĂ ... SIBIIU

SUMARUL

1. Disertaţia lui Johan Binder . . . . . *Victor Marian.*
2. Contribuţiuni la rezolvarea ecuaţiilor de gradul al patrulea . . . . . *I. V. Mătieş.*
3. Câteva consideraţii de geometria triunghiului . . . . . *Iulian Petrescu.*
4. Raportul Comisiunei pentru acordarea premiului de geometrie elementară „G. Ţiţeica“ . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
5. Note Matematice: 45 — 50.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 295.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 1934, 3763, 3916, 4005, 4308, 4724, 4888, 4910, 5124, 5151, 5224, 5271, 5275, 5283, 5287.
10. Exerciţii: 31 — 33.
11. Probleme propuse: 5332 — 5346.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1940

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Comandor Dr. Inginer **I. Linteş**; **D. Stoica**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1939 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 5184, 89, 93, 96, 97, 200, 04, 08, 11, 12, 20, 21, 25, 30, 37, 42, 48, 53, 70, 72, 74, 77, 79, 84, 86, 88, 89, 93, 94, 95, 98, 304, 06, 08, 09, 10, 11, 14, 15, 17, 18, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL XLV. Nr. 11 *SUPLIMENT* IULIE 1940

RECREAŢIUNI

1. **Unitatea e coprinsă în totul.** La o adunare se propune unuia să sărute pe Doamna pe care o iubeşte. Cum a satisfăcut el această dorinţă fără ca să afle lumea adunată acolo pe care Doamnă o iubeşte?

Răspuns. Le-a sărutat pe toate.

I. I.

*

2. **Deosebirea dintre Unire şi Unitate.** (După HELIADE, *«Echilibru între Antiteze»*):

Nu pricepem cum oameni ce se zic belatori înfocaţi ai **Unirii** *sau* **Uniunii** *să apere cu atâta ardoare* **Unitatea.** *Zică-se absolutişti, şi atuncia, de vor fi streini, le respectăm doctrinele, iar de vor fi români, nu îi putem califica decât de conspiratori în contra ordinei noastre legale.* **Unitatea** *este în Rusia: acolo* **unul** *este tot şi ceilalţi* **nulă.** **Unitatea** *este în Franţa; şi când este teroare anarhică la Paris, teroare şi anarhie este în toată Franţa; când este despotism în Capitală, despotismul este şi mai greu în provincie.* **Unitatea** *pe unde este, nu a adus-o decât conchista, şi nu o poate închega decât secole. S'a absorbit sau a pierit Basarabia în Rusia; însă aceasta este uzurparea tratatului dela 1812 şi nu credem că s'a putut închega în 50 ani numai. Şi mai este mult până să se muscălească toţi Basarabenii şi să se legitimeze această uzurpare...*

Unde este **Unire,** *toţi sunt ceva, toţi sunt persoane. Unde este* **Unitate, Unul** *este tot, şi ceilalţi* **nulă** *şi ameninţaţi de a fi reduşi la nimic.*

I. I.

*

3. **Subtilitate!** Cât face 502 cu 502?

Răspuns. Cinci sute Doi cu cinci sute Doi fac o mie de Doi, deci în total două mii!

I. I.

*

4. **Păcăleală!** Câte degete ai la ambele mâini?

Răspuns. Zece.

— Dar la 10 mâini câte ar fi?

— Cel mai des răspuns este 100!

I. I.

*

5. **Inmulţire medievală.** In *Lamma* (Anul III, No. 1 şi 2), la cronica pedagogică, aflăm că locuitorii din Valachia ştiau să înmulţească numere mai mici ca 5 pe de rost. Pentru numere mai mari ca 5 şi mai mici ca 10, de exemplu 8×9, făceau înmulţirea pe degete în felul următor:

„*Numărul 8 este cu 3 mai mare ca 5 şi 9 cu 4; de aceea îndoiesc dela mâna stângă 3 degete şi dela dreapta 4, pe când pe celelalte degete le las întinse.*

Suma degetelor îndoite face 7, aceasta este cifra zecilor, iar produsul degetelor întinse este 2; aceasta este cifra unerilor. Deci produsul este : 7 zecimi şi 2 uneri". I. FOCA.

*

6. **Problemă curioasă.** Pe o vreme călduroasă trei prieteni intră într'o bodegă să se răcorească. La plată li se cere 10 lei de halba de bere. Fac deci 30 de lei. Inainte să plece însă, se gândesc că 10 lei de halbă e un preţ prea ridicat. De aceea ei cer să li se înapoieze ceva. Chelnăriţa dă chelnerului 5 lei să le dea înapoi. Acesta, neştiind să împartă exact 5 lei la trei inşi, îşi opreşte 2 lei, apoi le dă câte un leu de fiecare. La început ei au plătit câte 10 lei ($10 \times 3 = 30$ lei). Acum însă au dat câte 9 lei, deci $9 \times 3 = 27$, care cu cei doi dela chelner fac 29. Unde-i al treizecilea leu?

Autorul şi trimiţătorul necunoscut.

*

7. **8 sau ∞?** Elevul găseşte că limita expresii este *infinitul* şi scrie pe tablă:

$$\text{Lim } F = \infty.$$

Comandantul, care asistase la lecţie, vede egalitatatea, se întoarce spre clasă şi face următoarea morală:

„*Vă plângeţi pe toate căile că D-l Profesor e prea sever. Dar cum vroiţi să vă dea note bune când nici pe opt nu ştiţi, sau nu vroiţi, să-l faceţi ca oamenii! Ia treci D-ta din banca a doua şi scrie-mi pe 8 acolo...*". Elevul şterge pe ∞ din egalitate şi scrie 8.

— „Aşa, Domnilor, exact, frumos şi ordonat, şi veţi avea note bune". Apoi în continuare, arată însemnătatea mare a ştiinţelor matematice!

PAUL I. IONESCU.

*

8. **Socoteala.** IORDACHE GOLESCU dă următorul principiu, foarte bun pentru casieri: „*Cine ia socoteala adesea nu se căieşte*".

I. I.

*

9. **Soluţia enigmei orientale** din *Suplimentul* trecut. Pe hamal nu-l poate chema Teofan, căci atunci negustorul omonim lui Teofan ar locui în Prusa, iar nu în Teopomp. Negustorul cel mai aproape de hamal câştigă de 9 ori cât acesta. Dar 2222 nu e $\mathfrak{M}9$ şi deci Zosima nu este acolo ci la Prusa la Teopomp fiind Teofan. Deci Hamalul este Zosima. Călăuza nu e Daniel căci are un ochiu mai puţin ca aceasta. Deci rămâne să fie Teofan. Rămâne ca numele conducătorului de cămile să fie Daniel. I. I.

*

10. **Matematica în literatură.** La VICTOR PAPILIAN, *„Fără limită"* găsim :

La pag. 24 : *„Zadarnic încerca el să circumscrie visul nelămurit al adolescenței în orbita sufletului"*.

La pag. 76 : *„Universul îi apărea circular, mărginit ca de o atmosferă de libertate și măsurat în diametru cu brațele lui deschise"*.

La pag. 129 : *„dar pe cer nimic alt decât luna plină și puzderie de stele"*.

Când este luna plină se mai vede puzderie de stele ?

D. MUSCELEANU.

Un profesor de limba și literatura franceză a spus :

„Orice compoziție literară e în funcție de proporție".

M. S. CHERȚMAN.

*

11. **Dificultatea matematicilor.** VOLBERG spune : *„Nu există carte de matematică cu citire ușoară, după cum nu există nucă fără coajă"*.

I. I.

*

12. **Formule nematematice.** Formula la basmele populare : *„A fost odată ca nici odată"*.

„Splendide formule industriale, casnice...". Vezi *Ziarul Călătoriilor*, Anul XXVIII, pag. 784.

Formula care preceda numele Domnitorilor dela noi : „Ioo".

I. ILIUȚĂ DĂBULENI.

*

13. **Religiozitatea Matematicianei** AGNESI. Pe un album al Fiului Regelui Suediei ea a scris :

„E mai bine să crezi mult decât puțin".

Maxima ei favorită era :

„O inimă devotată serviciului lui Dumnezeu trebuie sfântă și liberă ; ea nu trebuie să se încarce nici de blamuri, nici de elogii".

I. I.

*

14. **Blestem popular cu numere !** *„Boala de pe 9 sate : Să ți-o pună ție în spate"*.

I. I.

*

15. **Locuri geometrice.** In ora de geometrie :

— Profesorul. *Dă-mi un exemplu de loc geometric !*

— Elevul. *Un dreptunghiu.*

— Profesorul. *Dreptunghiul loc geometric ! De unde asta ?*

— Elevul. *Dela un mare număr de probleme de geometrie care încep astfel : „Un loc în formă de dreptunghiu..."*.

V. GH.

*

16. **Infinitul vede.** In ziarul „*Curentul*“ am citit cândva: „... *In Albalulia sorocul istoriei, strigătele unirii vor fi străbătut văzduhul şi purtate de vânturi vor fi ajuns până la mormintele celor de n'au putut să vază minunea decât cu ochii infinitului...*“.

Prin urmare *infinitul* vede.

I. V. MĂTIEŞ.

Care infinit vede, cel mare sau cel mic, sau şi unul şi altul?

GH. B.

*

17. **Logaritmi şi sentimente.** In cartea „*Catrinel*“ de C. MANOLACHE, la pag. 140, se găseşte următorul pasaj:

„*La 24 de ani un tânăr, desigur nu poate face calcule de precizie, ori măcar de probabilităţi cu logaritmi de milioane de cifre al acestui simţimânt al nemărginirilor*“.

E vorba de iubire.

D. MUSCELEANU.

*

18. **Informaţie precisă!** Putem afirma cu siguranţă că anul viitor creştin va începe la noi în ziua de 1 Ianuarie!

I. I.

*

19. **Algebra lui** ROUSSEAU. In „*Confessions*“ IV găsim:

„*Mi se părea că a deslega o problemă de geometrie prin ecuaţii algebrice, era ca şi cum s'ar cânta învârtind o manivelă. Prima oară când am găsit prin calcul că patratul unui binom era format din patratul fiecăreia din părţi şi din dublul produs al uneia prin alta, cu toată justeţea înmulţirii mele, nu am vrut să crez nimic, până ce nu am făcut figura. Nu că nu aveam un mare gust pentru algebră neconsiderând decât cantitatea abstractă, dar aplicată la întindere, vream să văd operaţiile pe linii; altfel nu pricepeam nimic*“.

I. I.

*

20. **Problema de rudenie.** Când fiica fiicei mele este soră cu nevasta mea? Soluţia în un Supliment viitor.

I. I.

*

21. **Ce este fericirea.** După E. LEGOUVÉ, reţeta ar fi:

„*50 grame de prudenţă cu 10 de îndrăsneală*“.

I. I.

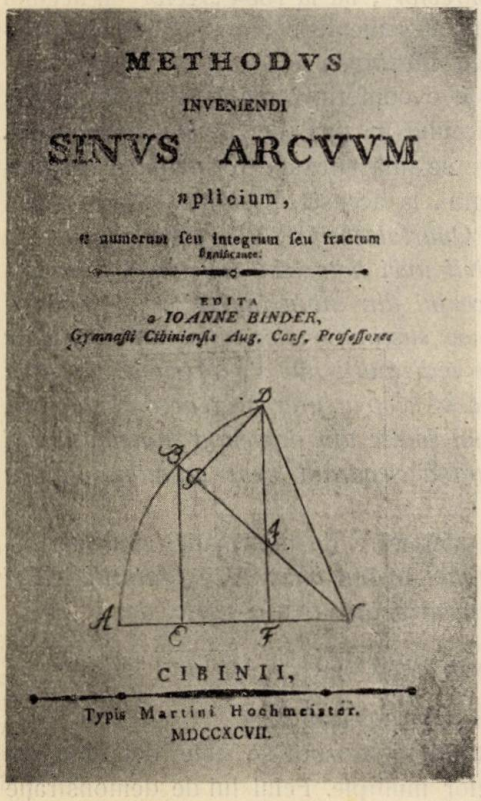
*

22. **O definiţie a lichidelor dată de un elev.** „*Lichidele sunt corpuri care au un fond propriu dar n'au formă proprie*“.

AL. I. ROHR.

DISERTAȚIA LUI JOHANN BINDER

Intre vechile cărți de matematici tipărite în Ardeal este o mică broșură, de abia 16 pagini, apărută în 1797 la Sibiu, care în unele privințe prezintă un interes deosebit. Mai întâi aceasta e prima carte de matematici, care nu e propriu zis un manual didactic, apoi se înșiră printre puținele cărți de acest fel tipărite în Ardeal de către Sași. Broșura e scrisă în latinește și poartă titlul: „METHODVS | INVENIENDI | SINVS | ARCVVM | *n* plicium, | *n* numerum seu integrum seu fractum | significante. | EDITA | a IOANNE BINDER, | Gymnasii Cibiniensis Aug. Conf. Professore. CIBINII, | Typis Martini Hochmeister. | MDCCXCVII".


METHODVS
INVENIENDI
SINVS ARCVVM
plicium,
numerum seu integrum seu fractum
significante.
EDITA
a IOANNE BINDER,
Gymnasii Cibiniensis Aug. Conf. Professore
CIBINII,
Typis Martini Hochmeister.
MDCCXCVII.

Asupra autorului broșurii, JOHANN BINDER, o personalitate marcantă din trecutul Sașilor, am aflat următoarele date. BINDER s'a născut în Mehburg, districtul Sighișoara, la 12 Februarie. A studiat la Sighișoara, la liceul reformat din Odorheiu, apoi la liceul ev. aug. din Sibiu. Își continuă studiile la universitatea din Göttingen, unde avu ca profesor de matematici pe A. G. KÄSTNER [1]). Acesta, într'o scrisoare cu data de 31 Decemvrie 1796, adresată lui PAUL SIPOS, care pe atunci se afla la Viena, amintește de BINDER în termenii următori: „*Ein Siebenbürger* BINDER *hat um 1792 sich*

1) ABRAHAM GOTTHELF KÄSTNER (1719—1800) profesor la Göttingen e cunoscut îndeosebi prin manualele sale didactice și prin «*Geschichte der Mathematik*», 4 vol., Göttingen, 1796—1800. A avut ca elev pe J. C. F. GAUSS.

hi meines Unterrichts bedient, bey einer Preisfrage über die Rechnung des Unendlichen ... Ich habe seitdem keine Nachricht von ihm". Se vede că BINDER nu a menţinut contactul cu fostul său profesor din cauza că el s'a specializat în studiile classice, iar nu în matematici. Intorcându-se în Ardeal, la 1793 BINDER e numit profesor de „*poezie şi limba greacă*" la liceul ev. aug. din Sibiu, având să predea şi matematicele.

BINDER făcea lecţii de matematici în clasele numite pe atunci de Gramatică şi de Sintaxă. Materialul predat era noţiuni de matematici elementare după manualul lui KARSTENS: *Auszug aus den Anfangsgründen.* Fiecare elev din clasele amintite trebuia să asculte matematica şi fizica, fie alternativ, fie deodată, 1 oră pe săptămână. La 1799 BINDER ajunse „*conrector*", iar la 1804 „*rector*" al liceului ev. din Sibiu. La 1801 a fost ales membru corespondent la „*Societät der Wissenschaften zu Göttingen*".

Broşura lui BINDER este o conferinţă publică pe care acesta a ţinut-o în sala festivă a liceului în ziua de 9 Noemvrie 1797. La cele mai multe exemplare se află anexată o invitaţie, tot latinească, tipărită pe două pagini, la această disertaţie. Despre rostul ei, revista „*Siebenbürgische Quartalschrift*", VII, 1801, pag. 72, dă următoarele lămuriri: „*Potrivit unei hotărîri a consistoriului evangelic, fiecare profesor al liceului din Sibiu înainte de a-şi ocupa postul e obligat să scrie şi să susţină o disertaţie.* BINDER, *care funcţionează ca profesor de mai mulţi ani s'a oferit să înceapă el seria disertaţiilor şi în acest scop a prezentat această lucrare, căreia aveau să-i urmeze mai multe din domeniul matematicei şi la sfârşitul căreia pe o pagină separată sunt anunţate câteva teze*".

Dintre aceste teze una singură e de matematici şi are următorul enunţ: „*Dintr'un triunghiu având baza* AC *şi laturile* AB *şi* CB, *dreapta* GH *paralelă cu baza taie a* n-*a parte, dacă*

$$GB = AB \sqrt[n-1]{} \quad \textit{sau dacă} \quad GH = AC \sqrt[n-1]{}\text{"}.$$

Nu ştiu ca BINDER să fi desvoltat această teză.

Subiectul tratat de BINDER în broşura sa este determinarea cosinusului şi sinusului arcelor multiple. Felul lui de demonstraţie şi notaţiile sunt cele obişnuite pe atunci în trigonometrie şi întru câtva diferite de ale noastre. După ce deduce formulele pentru

$\cos(\alpha+\beta)$ şi $\sin(\alpha+\beta)$, punând $\alpha=\beta$ obţine expresiile corespunzătoare pentru $\cos 2\alpha$ şi $\sin 2\alpha$... până la $\cos 6\alpha$, $\sin 6\alpha$. Comparând apoi $(\cos\alpha+\sin\alpha)^n$ desvoltată după formula binomului cu $\sin n\alpha$ şi $\cos n\alpha$, constată că $\cos n\alpha$ cuprinde toţi termenii nepereche, iar $\sin n\alpha$ termenii pereche ai acestei desvoltări, semnele $+$ şi $-$ fiind însă alternative în expresiile lui $\cos n\alpha$ şi $\sin n\alpha$. Astfel pentru $n=6$ obţine:

$$(\cos\alpha+\sin\alpha)^6=\cos^6\alpha+6\cos^5\alpha\sin\alpha+15\cos^4\alpha\sin^2\alpha+20\cos^3\alpha\sin^3\alpha+$$
$$+15\cos^2\alpha\sin^4\alpha+6\cos\alpha\sin^5\alpha+\sin^6\alpha.$$

Deci atunci

$$\cos 6\alpha=\cos^6\alpha-15\cos^4\alpha\sin^2\alpha+15\cos^2\alpha\sin^4\alpha-\sin^6\alpha$$

$$\sin 6\alpha=6\cos^5\alpha\sin\alpha-20\cos^3\alpha\sin^3\alpha+6\cos\alpha\sin^5\alpha.$$

Demonstrează apoi că dacă formulele sunt valabile pentru n, ele vor fi valabile şi pentru $(n+1)$. Prin felul acesta de demonstraţie se evită întrebuinţarea imaginarelor. In urmă, generalizează formulele stabilite pentru fracţiuni de arc punând $n=\frac{1}{u}$, ajungând astfel la serii.

Restul cărţulii cuprinde aplicaţii ale acestei metode. Pornind dela valorile lui $\sin 30^0=0{,}5$ şi $\cos 30^0=\sqrt{0{,}75}$ află pentru $\sin 60^0=0{,}8660254$ şi $\cos 60^0=0{,}5$. Considerând unghiul de 1^0 ca a 30-a parte a unghiului de 30^0 şi calculând primii patru membri ai seriei află valoarea $\sin 1^0=0{,}1743352$. Comparând valoarea aflată în acest fel cu cea dată de tabelele trigonometrice $\sin 1^0=0{,}0174524$ constată că metoda aplicată de el dă patru cifre zecimale precise.

Ca exerciţiu propune să se calculeze $\sin 3^0 6'9''$, menţionând că în acest caz

$$u=3723/36000.$$

La sfârşit autorul avertizează pe cititor că metoda indicată, deşi e generală, nu e întotdeauna comodă, fiindcă există o mulţime de alte metode cari în multe cazuri sunt cu mult mai potrivite şi mai simple. In acest scop trimite pe cititor la cartea lui KÄSTNER: *Geometr. Abhandlungen I. Sammlung.* Ca încheiere spune că ideea

desvoltării acestei metode i-a fost sugerată de ediția a doua a tratatului lui KÄSTNER: *Analysis finitorum.*

Disertația lui BINDER a fost recensată în „*Siebenbürgische Quartalschrift*“ *l. c.* în termenii următori: „*Prin lucrarea de față autorul voia să dea o soluție scurtă și generală a teoremei a doua din trigonometria lui* KÄSTNER. *Fiindcă toate liniile trigonometrice se pot exprima cu ajutorul razei și sinusului, dânsul aplică o metodă generală pentru aflarea sinusului celorlalte linii. Ca să afle din sinusul și cosinusul unui unghiu oarecare sinusul și cosinusul celorlalte, d-l* BINDER *exprimă § 175 din cartea d-lui Cons. de Curte* KÄSTNER: *Anal. endl. Grössen sub forma cea mai generală extinzând expresia arcului multiplu sau al* n*-lea și asupra fracțiilor înlocuind pe* n *cu* 1/*u astfel că expresia* arcus n *devine clară*“.

„*Quartalschrift*“ reproduce apoi următoarea recenzie apărută în „*Göttinger Anzeigen von gelehrten Sachen*“ din 1797, 198 Stück: „*Pornind dela unele teoreme fundamentale din lucrările lui* KÄSTNER, *dă o expresie comodă pentru sinusul și cosinusul arcului de ordinul* n *cu ajutorul coeficienților binomiali. Dacă pentru puterea* n*-a aceștia sunt* A, B, C, D... *și punem pentru un arc simplu* sinus $= a$, cosinus $= b$, *iar* $\frac{a}{b} = e$, *atunci pentru un arc de ordinul* n *avem* sinus $= b\,(Ae - Ce^2 \ldots)$ *unde* n *poate fi și fracționar, iar pentru aplicații mărimile date pot fi luate în așa fel ca seria să convergeze repede. De exemplu* sinus 1° *se calculează din* sinus 30°, *unde*

$$b = \sqrt{0{,}75},\ a = 0{,}5,\ n = 1/30\text{“}.$$

In afară de această disertație modestă BINDER nu a mai publicat nimic din domeniul matematicii, cu toate că și-a propus să continue seria conferințelor cu subiect matematic. Aceasta se explică atât prin faptul că el s'a ocupat mai mult cu filologia, cât mai ales că a murit la etatea de abia 38 de ani.

VICTOR MARIAN.

CONTRIBUȚIUNI LA REZOLVAREA ECUAȚIILOR DE GRADUL AL PATRULEA

Ecuația generală de gradul al patrulea

(1) $$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$$

prin împărțire cu a_0, se aduce la forma

(2) $$x^4 + a'_1x^3 + a'_2x^2 + a'_3x + a'_4 = 0$$

și punând $x - \frac{a'_1}{4}$ în locul lui x, se obține forma generală cea mai restrânsă

(3) $$x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0.$$

Spre a rezolva această ecuație, vom determina două ecuații de grade inferioare lui patru de forma:

(4) $$f(x, y) = 0 \quad \text{și} \quad \varphi(y) = 0.$$

Dacă din prima scoatem $y = h(x)$, din a doua se obține

(5) $$\varphi[h(x)] = 0.$$

Sistemul (4) se caută așa fel, încât ecuația (5) să fie de gradul patru. Se identifică (5) cu (3) și se determină coeficienții sistemului (4).

Sistemul (4), fiind de grad inferior lui patru, îl putem lua de forma:

(6) $$\begin{cases} f(x, y) = a(y)x^2 + b(y)x + c(y) = 0 \\ \varphi(y) \quad = y^2 + my + n = 0 \end{cases}$$

a, b, c fiind funcțiuni de y de forma:

(7) $$a = a_2y - a_1\ ,\ b = b_2y - b_1\ ,\ c = c_2y - c_1.$$

Deci sistemul (4) este de forma:

(8) $$\begin{cases} (a_2y - a_1)x^2 + (b_2y - b_1)x + c_2y - c_1 = 0 \\ y^2 + my + n = 0. \end{cases}$$

Din prima se obține

(9) $$y = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2}$$

care înlocuită în a doua, ne permite să obținem o ecuație de gradul patru în x, pe care identificându-o cu ecuația dată (3), obținem un sistem de cinci ecuații cu necunoscutele: a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, m și n, în număr de opt. Putem determina pe cinci din ele în funcțiune de alte trei și de A, B, C. Pe deoparte acest lucru fiind destul de dificil, iar pe de altă parte substituția (9) cere valori particulare pentru a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 și la fel și pentru m și n, vom încerca să restrângem numărul lor la minimum, fără a particulariza ecuația dată (2) sau (3) pe cât e posibil.

Distingem un caz general și două cazuri particulare.

Cazul I. (Cazul general). Presupunem $a_2 \neq 0$, împărțind numărătorul cu numitorul substituției (9) și simplificând cu a_2, substituția (9) se poate pune sub forma:

$$y = h + \frac{bx + c}{x^2 + b'x + c'}.$$

Presupunând $b \neq 0$, punem $by + h$ în locul lui y, bc în locul lui c și obținem în fine

$$y = \frac{x + c}{x^2 + b'x + c'} \tag{10}$$

care are numai trei coeficienți b', c și c' și împreună cu m și n fiind cinci, se pot determina prin identificarea ecuațiilor (5) cu (3).

Deci înlocuind pe y, dat de (10) în

$$y^2 + my + n = 0$$

se obține

$$nx^4 + (m + 2nb')x^3 + (1 + mb' + mc + nb'^2 + 2nc')x^2 + \\ + (2c + mc' + mcb' + 2nb'c')x + c^2 + mcc' + nc'^2 = 0. \tag{11}$$

Identificăm cu (3) și obținem:

$$\left\{\begin{aligned} n &= 1 \\ m + 2nb' &= 0 \\ 1 + mb' + mc + nb'^2 + 2nc' &= A \\ 2c + mc' + mcb' + 2nb'c' &= B \\ c^2 + mcc' + nc'^2 &= C. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Ţinând seama de prima şi a doua, sistemul se poate scrie:

$$n = 1,\ m = -2b'$$
$$1 - b'^2 + 2(c' - cb') = A$$
$$2c(1 - b'^2) = B$$
$$c'^2 - 2b'cc' + c^2 = C.$$

Din ultima se obţine:

$$c' - b'c = \pm \sqrt{c^2(b'^2 - 1) + C},$$

iar din penultima

$$1 - b'^2 = \frac{B}{2c} \quad \therefore \quad b' = \sqrt{1 - \frac{B}{2c}}$$

şi din a treia

$$\frac{B}{2c} \pm 2\sqrt{C - \frac{Bc}{2}} = A$$

(13) $$\therefore F(c) \equiv 8Bc^3 + 4(A^2 - 4C)c^2 - 4ABc + B^2 = 0.$$

Ecuaţia $F(c) = 0$, numită rezolvanta ecuaţiei de gradul al patrulea (3), ne permite să găsim valorile lui c, fie prin încercări, fie prin formulele lui CARDAN. Rezervând pe cea mai avantajoasă $c = c_0$, ceilalţi coeficienţi sunt:

(14) $$\begin{cases} b' = \sqrt{1 - \frac{B}{2c_0}} = b_0', \quad c' = \frac{1}{2}(A + 2c_0b_0' - B/2c_0) = c_0'. \\ m = -2b_0' = m_0 \quad , \quad n = 1 = n_0. \end{cases}$$

Astfel se cunoaşte complect substituţia (10) şi ecuaţia în y de gradul doi, adică:

(14') $$y^2 + m_0y + n_0 = 0$$
$$y = \frac{x + c_0}{x^2 + b_0'x + c_0'}$$

deci în locul ecuaţiei (3) vom rezolva sistemul (14'), din care obţinem pe y_1, y_2, iar din substituţie, care se mai scrie:

(15) $$yx^2 + (b_0'y - 1)x + c_0'y - c_0 = 0$$

se găsesc cele patru rădăcini x_1, x_2, x_3, x_4 ale ecuaţiei (3), după ce y e înlocuit pe rând cu y_1 şi y_2.

Observare. In stabilirea relației (10) am exceptat $a_2 = 0$, care face obiectul cazului II, precum și $b = 0$. In acest caz ($b = 0$), substituția se poate scrie:

$$y = \frac{c}{x^2 + b'x + c'}$$

și punând $1/y$ în locul lui y, obținem o formă ca

$$y = a''x^2 + b''x + c''$$

și va fi studiată în cazul III mai jos.

Cazul II. Presupunem în substituția (9) $a_2 = 0$, $b_2 \neq 0$, făcând calculele ca la cazul I, obținem

$$y = ax + h + \frac{c}{x + c'}.$$

Punem x în locul lui $x + c'$ și $y + h - ac'$ în locul lui y și obținem

$$y = ax + \frac{c}{x} \tag{16}$$

care înlocuită în

$$y^2 + my + n = 0$$

se obține:

$$a^2x^4 + max^3 + (2ac + n)x^2 + mcx + c^2 = 0$$

identificăm cu ecuația dată

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

și vom obține:

$$a^2 = A,\ ma = B,\ 2ac + n = C,\ mc = D,\ c^2 = E \tag{17}$$

având ca soluții

$$a = \sqrt{A},\ m = B/\sqrt{A},\ c = \sqrt{E},\ n = C - 2\sqrt{AE} \tag{18}$$

precum și condiția:

$$AD^2 - B^2E = 0. \tag{19}$$

Prin substituția (16) se pot soluționa numai ecuațiile de gradul al patrulea, ale căror coeficienți satisfac relația de condiție (19).

Intrucât substituția (16) cuprinde, în cazul particular $a = c = 1$, substituția

$$y = x + 1/x$$

ce serveşte la rezolvarea ecuaţiilor reciproce de gradul al patrulea, ea — substituţia (16) — va permite rezolvarea unei clase mai generale de ecuaţii, care în general nefiind reciproce, le vom numi *ecuaţii pseudo-reciproce de gradul al patrulea*, a căror coeficienţi verifică relaţia (19).

Cazul III. In substituţia (9) considerăm $a_2 = b_2 = 0$, $c_2 \neq 0$, obţinem o substituţie de forma:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Inlocuim $y + c$ în locul lui y şi obţinem

(20) $$y = ax^2 + bx.$$

O înlocuim în:

$$y^2 + my + n = 0$$

obţinem

$$a^2x^4 + 2abx^3 + (b^2 + am)\,x^2 + bmx + n = 0$$

şi identificată cu ecuaţia dată

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

găsim:

(21) $$a^2 = A,\quad 2ab = B,\quad b^2 + ma = C,\quad mb = D,\quad n = E$$

având ca soluţii:

(22) $$a = \sqrt{A},\quad b = B/2\sqrt{A},\quad m = 2D\sqrt{A}/B,\quad n = E$$

şi condiţia

(23) $$B^3 + 8A^2D - 4ABC = 0.$$

Prin substituţia (20) se pot rezolva numai ecuaţiile de gradul al patrulea, având coeficienţi ce verifică relaţia de condiţie (23).

Dacă în substituţia (20) facem $a = 1$, $b = 0$ se obţine $y = x^2$, ce serveşte la rezolvarea ecuaţiilor bipatrate. Substituţia (20) rezolvă deci o clasă mai generală de ecuaţii, care în general nefiind bipatrate, le vom numi *pseudo-bipatrate*. Coeficienţii acestor ecuaţii verifică relaţia (23).

Deci, în locul unei ecuaţii pseudo-bipatrate, se rezolvă ecuaţia

$$y^2 + my + n = 0$$

şi pe urmă

$$ax^2 + bx - y = 0$$

unde a, b, m şi n sunt daţi de (22).

* * *

In găsirea substituției (9) și a celor ce derivă din ea, am utilizat ecuațiile (8), luând cele mai simple funcțiuni pentru a, b, c, date de (7). Dacă se caută alte funcțiuni cu alte grade sub patru, poate s'ar mai găsi noui substituții corespunzătoare lui (9), deci alte metode de rezolvat ecuații de gradul al patrulea.

Ne oprim deocamdată aci, căci în cele tratate, am urmărit să găsim substituția generală, din care fac parte ambele substituții

$$y = x^2 \quad , \quad y = x + 1/x$$

utilizate la rezolvarea ecuațiilor bipatrate și reciproce de gradul al patrulea. Acea substituție generală este dată de (9).

Constatăm însă că urmărind găsirea substituției (9) am dat și peste o metodă generală de rezolvat ecuațiile de gradul al patrulea. Și încă ceva:

Cele trei cazuri de rezolvare, derivate din substituția (9) învederează că metodele de rezolvat ecuațiile bipatrate și reciproce de gradul al patrulea se apropie de o metodă generală. Metodele de până acum păreau cu totul izolate.

Aplicație. Vom rezolva prin această metodă problema 4507 din *Gazeta Matematică*, Vol. XLIV, pag. 204, având enunțul:

Să se rezolve ecuația:

$$x^4 + 4a^2x + a^2(1 - 2a) = 0.$$

Vom determina coeficienții b', c, c', m și n din

$$y = \frac{x + c}{x^2 + b'x + c'} \quad , \quad y^2 + my + n = 0$$

urmând calea expusă la cazul I. Coeficientul c e dat de

$$F(c) = 8Bc^3 + 4(A^2 - 4C)c^2 - 4ABc + B^2 = 0$$

care în cazul $A = 0$, $B = -4a^2$, $C = a^2(1 - 2a)$, este

$$2c^3 + (1 - 2a)c^2 - a^2 = 0.$$

Cu ușurință observăm soluția $c = a$, iar din (14) se găsesc:

$$b' = \sqrt{1 + 2a}, \quad c' = a(1 + \sqrt{1 + 2a}), \quad m = -2\sqrt{1 + 2a}, \quad n = 1.$$

Ecuația în y este

$$y^2 - 2\sqrt{1 + 2a}\, y + 1 = 0$$

$$\therefore \quad y_{1,2} = \sqrt{1 + 2a} + \varepsilon\sqrt{2a} \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

şi din (15), care în cazul nostru este:

$$x^2 + \varepsilon\sqrt{2a}\,x + a(1 + \varepsilon\sqrt{2a}) = 0$$

se obţine:

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{2a} \pm \sqrt{2a(2\sqrt{2a} - 1)}}{2}$$

$$x_{3,4} = \frac{-\sqrt{2a} \pm \sqrt{2a(-2\sqrt{2a} - 1)}}{2}$$

sau:

$$x_{1,2,3,4} = \sqrt{\frac{a}{2}}\left(\varepsilon' + \varepsilon''\sqrt{2\varepsilon'\sqrt{2a} - 1}\right) \quad , \quad \varepsilon' = \pm 1 \quad , \quad \varepsilon'' = \pm 1.$$

Observare. In soluţiile acestei probleme date în *Gazeta Matematică*, Vol. XLIV, pag. 205 şi 207 s'a strecurat câte o greşeală, ceea ce prin prezenta se şi rectifică.

I. V. MĂTIEŞ
Prof. Liceul „Sf. Vasile", Blaj.

CÂTEVA CONSIDERAŢII DE GEOMETRIA TRIUNGHIULUI

Dacă B'C' este o antiparalelă variabilă, punctul $M \equiv (BB', CC')$ poate fi definit prin egalitatea de unghiuri $ABM = ACM$ care atrage omografia fascicolelor BM, CM; deci M descrie o conică; conica trecând prin ortocentrul H rezultă că *locul geometric al lui* M *este o iperbolă echilateră*[1]).

Iperbola trece prin A, B, C, H. Ea trece de asemenea prin A_1 opus lui A în cercul O, căci în adevăr $\sphericalangle ABA_1 = \sphericalangle ACA_1 = \frac{1}{2}\pi$.

Se ştie însă că H şi A_1 sunt simetrice faţă de A', mijlocul laturii BC; iperbola fiind circumscrisă paralelogramului $BHCA_1$ are centrul în centrul A' al lui.

Iperbola trecând prin H rezultă că inversa ei triunghiulară este o dreaptă ce trece prin O. Se ştie că asimptotele ei sunt determinate de dreptele SIMSON corespunzătoare intersecţiilor acestei

1) Acest rezultat este cunoscut; am menţinut demonstraţia autorului fiindcă e simplă şi fiindcă elementele ei revin şi mai departe, în tratare (N. R).

drepte cu cercul O. Aceste drepte se taie în A'; dar intersecția unei drepte S cu BC este proiecția punctului S pe BC este deci *inversa iperbolei, este mediatoarea lui* BC.

Asimptotele vor fi egal depărtate de H pe de o parte și de mijloacele celor două arce BC de pe cercul O.

Voiu determina de asemenea unghiurile pe care axele și asimptotele iperbolei le fac cu BC.

Astfel un cerc de diametru BC — care trece prin picioarele B_h, C_h ale înălțimilor — întâlnește iperbola în încă două puncte D_b, D_c simetrice respectiv punctelor B, C față de una din axe. Dar aceste puncte fiind pe iperbolă, îndeplinesc condițiile

$$\sphericalangle ABD_b = \sphericalangle ACD_b \quad ; \quad \sphericalangle ABD_c = \sphericalangle ACD_c ;$$

ele sunt deci mijloacele arcelor $B_h C_h$ din cercul A'. $A'D_b D_c$ va fi deci perpendiculară pe $B_h C_h$ și va trece și prin O_9, centrul cercului lui EULER și prin mijlocul H_a al lui AH.

Axele iperbolei vor fi deci definite de bisectoarele unghiului făcut de diametrul $A'H_a$ *al cercului lui* EULER *cu latura* BC.

In funcție de unghiurile B, C, unghiurile făcute de axe cu BC sunt

$$\frac{\pi}{4} \pm \frac{B - C}{2}$$

(cu sensurile A'C, A'B respectiv și cu $B > C$).

$A'H_a$, BC formează cu bisectoarele lor — axele iperbolei — un fascicol armonic și deci *axele iperbolei interceptează pe o dreaptă paralelă cu raza* AO, *puncte echidistante de concurența ei cu* BC.

Asimptotele iperbolei fac cu BC (A'C și A'B) respectiv unghiurile

$$\frac{\pi}{2} + \frac{B - C}{2} \quad \text{și} \quad \frac{B - C}{2} .$$

Se poate face deasemenea calculul lungimii axelor iperbolei. Astfel, dacă x_1, y_1 sunt coordonatele lui B în raport cu axele de simetrie ale iperbolei, vom avea $l = \sqrt{x_1^2 - y_1^2}$.

Dar se observă că

$$x_1 = \frac{a}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{B - C}{2}\right) \quad , \quad y_1 = \frac{a}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{B - C}{2}\right)$$

unde a este lungimea laturei BC; şi deci

$$l = \frac{a}{2}\sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{B-C}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{B-C}{2}\right)} = \frac{a}{2}\sqrt{\sin(B-C)}.$$

De oarece segmentul AM este văzut din B şi C sub unghiuri egale, iperbola poate fi încă definită ca locul intersecţiei M a cercurilor egale ABM, ACM.

Pentru $M \equiv A$ rezultă că tangenta în A la iperbolă este tangenta comună a două cercuri egale tangente în A.

Linia centrelor întâlnind mediatoarele laturilor AB, AC în două puncte echidistante de A rezultă că tangenta în A este perpendiculară pe conjugata armonică a razei OA în raport cu cele două mediatoare; transformând într'un fascicol de centru A şi raze perpendiculare pe ale fascicolului precedent, tangenta căutată este conjugata tangentei la cercul ABC faţă de AB, AC; deci *tangenta iperbolei în* A *este simediana din* A [1]).

Tangentele în B şi C sunt evident antiparalele la BC.

IULIAN PETRESCU.
Liceul Gh. Lazăr, Bucureşti.

RAPORTUL COMISIUNEI
PENTRU
ACORDAREA PREMIULUI DE GEOMETRIE ELEMENTARĂ „G. ŢIŢEICA"

Subsemnaţii, membrii ai Comisiunei pentru acordarea premiului de geometrie elementară G. ŢIŢEICA, pe anul 1939, cercetând activitatea corespondenţilor care intră în prevederile regulamentului, din volumul respectiv, am constatat că D-l VICTOR L. FLORESCU, pe atunci elev în clasa VIII-a a liceului militar „N. Filipescu", are o activitate bogată care îl face să iasă în evidenţă faţă de ceilalţi corespondenţi.

1) După o proprietate a transformării cuadratice isogonale, dacă dreapta taie latura BC în A', tangenta în A la conica transformată este isogonala dreptei AA' — aici isogonala medianei (N. R.).

In adevăr, D-sa a publicat la pag. 52 un articol intitulat „Asupra punctelor lui FEUERBACH“ în care reia o chestiune studiată mai înainte încă de trei autori, dându-i o soluţie mai simplă şi mai elegantă. Tot D-sa este singurul rezolvitor al problemei 4966 publicată la pag. 660 şi este citat primul printre rezolvitorii problemei 4797 la pag. 152.

Dacă la această activitate se adaugă faptul că D-l VICTOR L. FLORESCU este unul din corespondenţii cei mai cunoscuţi ai *Gazetei Matematice* remarcându-se prin seriozitatea şi statornicia activităţei sale, după cum a dovedit cu prisosinţă şi cu ocazia concursului din anul trecut, credem că D-sa merită spre a fi distins cu premiul de geometrie elementară G. ŢIŢEICA.

COMISIUNEA PENTRU ACORDAREA PREMIULUI
DE GEOMETRIE ELEMENTARĂ G. ŢIŢEICA

GH. TH. GHEORGHIU, OVIDIU N. ŢINO,
ING. D. STOICA.

Acest raport s'a citit şi aprobat în şedinţa Adunării Generale dela 8/2, 1940.

NOTE MATEMATICE

45. *Măsurarea suprafeţelor la noi acum 110 ani.* In anul 1830 s'a făcut primul *caldarâm* (pavaj de piatră bolovani) în Bucureşti. Pe atunci măsurile de lungime erau *stânjenul* pentru terenuri şi *cotul* pentru ţesături, etc. Nu se ştia că suprafeţele se pot măsura cu stânjenul patrat! De aceea în contractul cu antreprenorii nu se spunea că suprafeţele se vor măsura cu *stânjenul patrat*, ci această măsură erea înlocuită cu expresiunea: „*cu un preţ în lung din lat lat, din îngust îngust*“.

Atunci s'au pavat Podul Mogoşoaiei (azi Calea Victoriei), Podul Târgului de afară (azi Calea Moşilor), Podul Calicilor (azi Calea Rahovei), Podul Beilicului (azi Calea Şerban-Vodă). Acestor străzi le ziceau „*Poduri*“ căci mai înainte erau podite cu grinzi de lemn peste care circulau carele şi trăsurile.

I. IONESCU.

46. † T. L. HEATH. La 16 Martie a murit Sir THOMAS LITTLE HEATH, unul din cei mai buni cunoscători ai matematicelor greceşti, alături de HEIBERG, TANNERY, G. LORIA şi ZEUTHEN. Născut la 5 Octomvrie 1861, HEATH a studiat la Trinity College din Cambridge, împreună cu fratele său mai mare R. S. HEATH, mai târziu profesor de matematici la Birmingham. THOMAS L. HEATH însă nu a păşit pe cariera didactică, ci a intrat în serviciul tresoreriei. Tot timpul liber l-a consacrat istoriei matematicei la Greci, la cunoaşterea căreia a contribuit prin o mulţime de lucrări.

A început prin a scrie articole despre „PAPPUS" şi *„porisme"* în *„Encyclopedia Britannica"*, apoi despre *„The σ of* DIOPHANTUS". Prima lui lucrare mai mare este cartea despre „DIOPHANTUS *of Alexandria"* (1885), căreia îi urmă „APOLLONIUS *of Perga"* (1896), „ARCHIMEDES" cu notaţii moderne, în 2 volume (1897), iar în 1908, cele trei volume ale *Elementelor lui* EUCLID, în traducere engleză, cu adnotaţii. Scoate apoi „ARISTARCHUS *of Samos"*, iar ca o încoronare a cercetărilor sale *„A History of Greek Mathematics"*, în două volume (1921). HEATH a fost membru la *„Royal Society"*.

VICTOR MARIAN.

47. *Numere interesante cu 10 cifre diferite* [1]). Pentru N_6 începând cu 3 am găsit următoarele 91 de soluţiuni:

N_6	N	N_6	N
301 275 489	1 807 652 934	305 817 942	1 834 907 652
301 542 789	1 809 256 734	305 829 417	1 834 976 502
301 587 294	1 809 523 764	305 849 127	1 835 094 762
304 278 915	1 825 673 490	305 984 127	1 835 904 762
304 891 275	1 829 347 650	307 894 215	1 847 365 290
305 417 829	1 832 506 974	308 724 951	1 852 349 706
305 418 279	1 832 509 674	308 729 415	1 852 376 490
305 428 179	1 832 569 074	309 457 182	1 856 743 092
305 794 182	1 834 765 092	309 458 172	1 856 749 032
305 798 421	1 834 790 526	309 458 217	1 856 749 302

1) Urmare la Nota dela pag. 525 Vol. XLV *Gazeta Matematică.*

N_6	N	N_6	N
309 845 721	1 859 074 326	324 508 971	1 947 053 826
309 872 451	1 859 234 706	324 510 897	1 947 065 382
310 578 492	1 863 470 952	324 589 701	1 947 538 206
310 579 842	1 863 479 052	324 708 951	1 948 253 706
310 849 572	1 865 097 432	324 710 895	1 948 265 370
310 872 495	1 865 234 970	325 047 891	1 950 287 346
310 984 572	1 865 907 432	325 104 789	1 950 628 734
312 705 849	1 876 235 094	325 478 901	1 952 873 406
312 705 984	1 876 235 904	327 014 589	1 962 087 534
312 750 489	1 876 502 934	327 089 145	1 962 534 870
312 754 890	1 876 529 340	327 089 514	1 962 537 084
315 042 789	1 890 256 734	327 140 895	1 962 845 370
315 427 890	1 892 567 340	327 145 089	1 962 870 534
315 789 420	1 894 736 520	327 145 890	1 962 875 340
317 209 458	1 903 256 748	327 180 459	1 963 082 754
317 280 459	1 903 682 754	327 180 954	1 963 085 724
317 280 954	1 903 685 724	327 905 418	1 967 432 508
317 805 429	1 906 832 574	327 918 054	1 967 508 324
317 905 428	1 907 432 568	328 054 179	1 968 325 074
317 942 058	1 907 652 348	328 405 971	1 970 435 826
317 928 054	1 907 568 324	328 410 597	1 970 463 582
318 054 279	1 908 325 674	328 470 591	1 970 823 546
318 057 942	1 908 347 652	328 471 059	1 970 826 354
318 452 709	1 908 716 254	328 904 751	1 973 428 506
320 579 418	1 923 476 508	328 910 475	1 973 462 850
320 584 791	1 923 508 746	328 975 041	1 973 850 246
320 597 841	1 923 587 046	328 975 104	1 973 850 624
320 897 451	1 925 384 706	328 975 401	1 973 852 406
320 945 718	1 925 674 308	329 054 178	1 974 325 068
321 058 479	1 926 350 874	329 105 847	1 974 635 082
321 059 784	1 926 358 704	329 178 054	1 975 068 324
321 089 745	1 926 538 470	329 417 058	1 976 502 348
321 709 458	1 930 256 748	329 418 057	1 976 508 342
321 780 459	1 930 682 754	329 705 841	1 978 235 046
321 780 954	1 930 685 724	329 710 584	1 978 263 504
321 809 457	1 930 856 742		

Este de remarcat curiozitatea că între numerele 239 710 584 şi 398 754 210 nu se mai găseşte nici o soluţiune pentru N_6.

G-L GH. BUICLIU.

48. *O consecință în legătură cu indicatorii.*

In *G. M.* XLI — 280 am arătat că:

„Numărul numerelor prime cu n din şirul natural a primelor p numere, este dat de expresiunea:

$$I_p(n) = p - \Sigma E\left(\frac{p}{a}\right) + \Sigma E\left(\frac{p}{ab}\right) - \ldots$$

unde $a, b, \ldots$ sunt factorii primi ai lui n.

Observăm însă că dacă facem $n = p!$, atunci: $I_p(p!)$ reprezintă numărul numerelor prime cu $p!$ din şirul primelor p numere. Dar acest număr nu poate să fie decât unul singur, 1, deci:

1) $$I_p(p!) \equiv 1.$$

Apoi cum:

$$p! = 2^{\alpha} . 3^{\beta} . 5^{\gamma} . 7^{\delta} \ldots$$

urmează că vom avea:

$$p - \Sigma E\left(\frac{p}{2}\right) + \Sigma E\left(\frac{p}{2.3}\right) - \Sigma E\left(\frac{p}{2.3.5}\right) + \Sigma E\left(\frac{p}{2.3.5.7}\right) - \ldots \equiv 1$$

ceea ce constitue o interesantă identitate.

Aplicaţie:

Fie $p = 7$ atunci

$$7! = 2^4 . 3^2 . 5 . 7.$$

Prin urmare:

$$7 - [3 + 2 + 1 + 1] + 1 \equiv 1.$$

Aceasta antrenează deci şi pentru sumă şi produs identităţile:

2) $$S_p(p!) \equiv 1$$

3) $$P_p(p!) \equiv 1.$$

Deasemenea, în *G. M.* XLV — 20, am arătat că:

„Numărul numerelor prime cu n din intervalul de numere consecutive dintre x şi y, este:

$$I_{y-x}(n) = I_y(n) - I_x(n).$$

Dacă facem în această relaţie:

$$y = p \quad ; \quad n = p! \quad \text{şi} \quad x = q$$

atunci avem:

$$I_{p-q}(p!) = I_p(p!) - I_q(p!).$$

Cum însă în intervalul $(p-q)$ nu există nici un număr prim cu $p!$ şi cum $I_p(p!) = 1$, urmează că, dacă $q \leqslant 1$ atunci:

4) $$I_q(p!) \equiv 1.$$

Deci:

5) $$I_{p-q}(p!) \equiv 0$$

dacă $q > 0$, sau:

6) $$I_p(p!) \equiv I_q(p!) = 1.$$

Şi deci vom avea:

7) $$S_p(p!) = S_q(p!) = 1$$

8) $$P_p(p!) = P_q(p!) = 1.$$

CPT. C-DOR I. LINTEŞ.

49. *Incă ceva despre problema 3911.* Asupra acestei probleme s'au publicat notele 48, 49 din vol. XLIV, p. 636, 637 şi nota 7 din vol. XLV, p. 76 [1]). In această problemă se cereau numerile întregi n astfel ca

$$8n^2 - 7n - 1 = (n-1)(8n+1)$$

să fie un cub perfect. Din

$$8n+1 = 8(n-1)+9$$

se vede că $n-1$ şi $8n+1$ nu pot avea alt factor prim comun decât pe 3. Trebue deci să avem

$$n-1 = 3^{\alpha}u^3 \quad , \quad 8n+1 = 3^{\beta}v^3 \quad , \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2 \quad , \quad \alpha+\beta = 0, 3,$$

u, v fiind întregi. Avem trei cazuri de studiat

(I) $$n-1 = u^3 \quad , \quad 8n+1 = v^3,$$

(II) $$n-1 = 3u^3 \quad , \quad 8n+1 = 9v^3,$$

(III) $$n-1 = 9u^3 \quad , \quad 8n+1 = 3v^3,$$

cari prin eliminarea lui n, ne dau respectiv

(I_1) $$v^3 - 8u^3 = 9,$$

(II_1) $$3v^3 - 8u^3 = 3,$$

(III_1) $$v^3 - 24u^3 = 3.$$

---

1) La primirea notei de faţă nu apăruse nota de la pag. 298 a D-lui G. G. CONSTANTINESCU asupra aceleiaşi chestiuni (N. R.).

Ecuaţia (I_1) se scrie

$$(v - 2u)(v^2 + 2uv + 4u^2) = 9$$

şi are unica soluţie $u = -1$, $v = 1$, care ne dă $n = 0$.

In ecuaţia (II_1) u trebue să fie multiplu de 3. Punând

$$u = 3w \quad , \quad z = 2w \quad , \quad v = y$$

găsim

$$(1) \qquad y^3 - 9z^3 = 1.$$

In ecuaţia (III_1) v trebue să se dividă cu 3. Punând

$$v = -3z \quad , \quad y = -2u$$

regăsim ecuaţia (1).

Totul revine la ecuaţia (1). Această ecuaţie e bine cunoscută în teoria ecuaţiilor diophantiene. BORIS DELAUNAY a demonstrat [1]) că *o astfel de ecuaţie nu poate avea decât cel mult o soluţie afară de soluţia evidentă* $y = 1$, $z = 0$.

Pe baza acestei teoreme se vede imediat că singurele soluţii ale ecuaţiei (1) sunt

$$(2) \quad y = 1 \quad , \quad z = 0 \quad , \quad y = -2 \quad , \quad z = -1.$$

Pentru (II_1) prima soluţie (2) ne dă $u = 0$, $v = 1$, deci $n = 1$. A doua soluţie nu dă valoarea întreagă pentru u, deci pentru n.

Pentru (III_1) prima soluţie nu dă valoare întreagă pentru u, deci pentru n. A doua soluţie ne dă $u = 1$, $v = 3$, deci $n = 10$.

In definitiv deci *singurele soluţii ale problemei 3911 sunt*

$$n = 0 \quad , \quad n = 1 \quad , \quad n = 10.$$

E bine să amintim că AXEL THUE, a cărui rezultate importante în teoria numerilor sunt bine cunoscute, a demonstrat şi următoarea teoremă generală [2]):

Dacă a, b, c, d, n sunt numere întregi şi $a \neq 0$, $d \neq 0$, $b^2 - 4ac \neq 0$, $n \geqq 3$, ecuaţia diophantiană

$$ax^2 + bx + c = dy^n$$

nu are decât cel mult un număr finit de soluţii.

TIBERIU POPOVICIU.

---

1) R. DELAUNAY: „*La solution générale de l'équation* $X^3\rho + Y^3 = 1$", C. R. Acad., Science, Paris, **162**, 150—151 (1916).

2) A. THUE: «*Über die Unlösbarkeit der Gleichung* $ax + bx + c = dy$ *in grossen ganzen Zahlen* x *und* y", Archiv für Mathematik og naturvidenskab, **34**, No. 16 (1917).

50. *Teorema celor 3 perpendiculare.* Demonstrația dată, de D-l M. AL. VASILESCU-STABU acestei teoreme, la pag. 303, Vol. XLV, *Gazeta Matematică* este cunoscută. Ea se găsește între altele în *Gazeta Matematică*, Vol. VII, pag. 38, în *Eléments de géometrie, avec des notes* de LEGENDRE, pag. 139, tipărită la Paris în 1860 și probabil și în lucrări mai recente.

M. L. RUSU.

BIBLIOGRAFIE

Boletin Matematico. Anul XIII. Nr. 5. Mai 1940. Buenos-Aires.

Buletinul „I. R. E.". Anul VIII. Nr. 1. Martie 1940. București.

Bulletin de la Section Scientifique, publicat de Academia Română. Tom. XII. Nr. 7. 1940. București. Calculul gradientului pentru un cilindru cu ax vertical de DAN MILCOVEANU.

Idem. Tom. XII. Nr. 8. 1940. București. Note asupra funcțiunilor convexe de ordin superior de TIBERIU POPOVICIU.

Bulletin de mathématiques et de physique pures et appliquées de l'Ecole polytechnique Roi Carol II Bucarest. X-ème Année (1938—1939). No. 1, 2, 3. București 1939.

Sur le degré d'indétermination dans la théorie des équations différentielles, par P. ZERVOS. Du point à l'infini comme point singulier isolé, par D. POMPEIU. Sur l'inversion des transformations dont le déterminant fonctionnel s'annule sans changer de signe, par S. STOÏLOV. Sur un lemme de D. POMPEIU, par MIRON NICOLESCO. Quelques formules de moyenne, par NICOLAS CIORĂNESCU. Une inégalité pour les algébroïdes, par MICHEL GHERMĂNESCU. Sur l'exagone inscriptible à côtés opposés parallèles, par V. THÉBAULT. Sur un théorème de D. POMPEIU, par V. THÉBAULT. Bemerkung über das „Theorema egregium", par D. BARBILIAN. Sur les surfaces de TZITZÉICA, par GH. TH. GHEORGHIU. Triangles trihomologiques aux axes d'homologie concourantes, par JEAN ELIE. Contribution à l'étude D'APPELL sur les applications dé l'homographie en mécanique, par THÉOPHILE VESCAN. Sur un problème de probabilités, par ȘERBAN ȚIȚEICA. Sur une classe d'équations intégrales et leur applications à la statistique, par N. PRAPORGESCU. L'intensité de la pesanteur à la surface de la terre et le pendule gravimétrique HOLWECK-LEJAY par A. CORPACI. La balistique antiaérienne (La balistique nadirale), par Cpt. Com. I. LINTEȘ. Les recherches balistiques au tunnel aérodynamique, par Cpt. Com. I. LINTEȘ. Sur le retrait linéaire au ciment, par C. C. TEODORESCU. Sur les abérrations de sphéricité des systèmes centrés, par B. BIANU. L'influence de la paraffine sur les caractéristiques des bitumes, par V. T. CERCHEZ et

V. NICULESCO. Sur les circuits à impédance réductible à une résistance ohmique, par ERNEST ABASON. Un nouveau système amplificateur pour communications téléphoniques ou Radio-Téléphoniques, par MATEI G. MARINESCO. † GEORGES TZITZÉICA, par E. ABASON. † MATEI M. DRĂGHICEANU, par E. ABASON.

Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara. Tom. 9. Fasc. 3—4. 1940. Timişoara. Sur la zone de convergence des quelques séries syntagmatiques de M. ŞT. BOTEZ. Sur la géométrie du triangle de VINCENZO G. CAVALLARO, Sur des cercles associés à un triangle de V. THÉBAULT, Sur la structure des groupes semi-simples réels de W. BARRETT, La théorie des courbes définies comme l'intersection des deux surfaces représentées paramétriquement de T. VESCAN, Détermination de la pression dans les bouches à feu de M. GHERMĂNESCU, Supralărgirea şi supraînălţarea căii în curbă de I. PROTOPOPESCU, Câteva consideraţiuni asupra determinării planului secant în proiecţiunea stereografică de I. BONEA, Les sédiments de couleur rouge et la formation répétée des sols latéritiques dans les régions Carpathiques de Roumanie de ST. I. MATEESCU, Rezistenţa dinamică a fontei de ŞT. NADAŞAN, Nouveaux domaines de recherches en „Trigonométrie quadratique" de V. ALACI, Notes sur la géométrie du triangle de V. G. CAVALLARO, Einige numerische Identitäten de ALFRED MOESSNER, Sur le problème de la projection bicentraie dans un espace à quatre dimensions de M. ŞT. BOTEZ, Equilibre avec frotement sur une surface fixe de M. GHERMĂNESCU, Introduction à l'étude statistiques des équation du mouvement des fluides de T. VESCAN, Zur Theorie Vektorfelder de R. RĂDULEŢ.

Cuvântul Şcoalei. Organ al cercului didactic al profesorilor secundari, de stat din ţinutul Nistru. Director: I. I. MACOVEI. Anul I. Nr 2. Aprilie-Iunie 1940. Chişinău. Publicaţii şcolare periodice din Basarabia de I. ZABOROVSCHI.

Deutsche Mathematik, publicată de TH. VAHLEN. Anul IV. Caetul 2. Aprilie 1939. Leipzig.

Journal de mathématiques élémentaires, publicat de H. VUIBERT. Anul 64. Nr. 7. 1 Iunie 1940. Paris.

Pitagora, revista de matematici. Anul V. Nr. 9. 10 Iunie 1940. Bucureşti. Triunghiuri aritmetice pentru patrate şi cuburi consecutive de I. V. MATIEŞ, Asemănare, — ortologie — omologie, de G. D. SIMIONESCU.

Revista matematică din Timişoara, Anul XX. Nr. 4. Iunie 1940. O clasă interesantă de trapeze de O. N. ŢINO. Funcţiuni pseudo-hiperbolice, studiu elementar de E. VIŞA.

Ştiinţă şi Progres. Anul VI. Nr. 3. Aprilie-Iunie 1940. Tg.-Mureş. Proprietăţi ale conicelor deduse din ecuaţiile lor parametrice de N. DONCIU. Proprietăţi ale triunghiului de CEZAR IVĂNESCU. Volumul trunchiului de piramidă de MIRCEA D. POPA.

Ţara visurilor noastre. Anul IV. Nr. 27. Iunie 1940. Oradea.

Universidad nacional de La Plata. Publicaţiuni ale facultăţii de ştiinţe fizico-matematice. Nr. 126. lanuarie 1940. Estudio de la evolucion fluvial que determina el endicamiento del Rio San Juan de JOSÉ S. GANDOLFO.

Idem Nr. 127. lanuarie 1940. La Plata. Revista. Asupra teoriei transformărilor lineare şi asupra seriilor divergente de R. P. CESCO. Paramorfismul unui grup de A. E. SAGASTUME BERRA.

FLORICA MARG. CARACUDOVICI. *Aplicaţii geometrice ale calculului vectorial.* Biblioteca revistei „PITAGORA". Monografia Nr. 6. 1940. Bucureşti.

CPT. C-DOR ING. I. LINTEŞ. *Balistica Antiaeriană.* (Extras din Revista Artileriei. Nr. 3/1940).

LT.-COL. ING. ION LINTEŞ. *Théses* présentées a l'école polytechnique „Roi Carol II" de Bucarest. Faculté de mécanique et d'électricité pour obtenir le grad de Docteur-ingénieur. 1-ère thèse: „La précision, l'usure et la vie des bouches à feu et des armes portatives". 2-ème thèse: „L'étude de la résistence aérodynamique des corps et révolution dans le cas des vitesses hypersoniques. 3 lunie 1940. Bucureşti.

MIHAÎL MANOÎLESCO. *Die theoretische Problematik des Aussenhandels.* Synthese-Beweisführung-Polemik. (Extras din „Weltwirtschaft an der Universität Kiel. 1940).

PETRE SERGESCU. *Un mare dascăl:* TEODOR COŞTESCU. Cluj 1940.

ING. D. A. STAN. *Grinzi curbe plane, încărcate cu forţe normale pe planul lor, Două forme ale unor linii de influenţă.* (Extras din Buletinul Soc. Politechnice, Dec. 1938).

E. BOREL et A. CHÉRON. *Théorie Mathématique du bridge à la portée de tous.* (Monographies des probabilités. V. Gauthier Villars Paris 1940). Un volum de 392 pag. 175 fr. fr.

Ilustrul matematician E. BOREL, creatorul noţiunii de măsură a mulţimilor, descoperitorul funcţiunilor quasianalitice şi al sumării exponenţiale, cercetătorul profund al seriilor divergente, este şi un mare organizator. D-sa a creat, în 1898, celebra „Colecţie BOREL" de monografii asupra teoriei funcţiunilor, care au avut un rol foarte însemnat în desvoltarea acestui domeniu în primele decenii ale veacului al XX-lea. Profesor de fizică matematică şi calculul probabilităţilor la Sorbona, după războiul 1914 – 18, D-sa a terminat în 1939 un monumental *Tratat de Calculul Probabilităţilor*, în 19 fascicule. Ca o completare, D-sa a început, în 1937, publicarea unei colecţii de monografii asupra probabilităţilor, care va juca în fizica matematică acelaşi rol fundamental pe care colecţia de teoria funcţiunilor îl joacă în analiza matematică.

Ultimul volum din această nouă colecţie era cules la tipografie în momentul isbucnirii războiului actual. E scris de D-nii: E. BOREL şi A. CHÉRON şi e consacrat teoriei matematice a jocului de Bridge. E o carte care poate fi citită de oricine are o cultură matematică medie şi cunoaşte jocul. Autorii au

studiat probabilităţile diferintelor evenimente ce se întâlnesc în acest joc (amestecarea şi împărţirea cărţilor, declaraţiile, jocul cărţii, marca, etc.), sunt probleme ştiinţifice obiective în care intervine şi elementul psihologic subiectiv în aprecierea probabilităţii. Se dau astfel numeroase exemple de greşeli de raţionament în aplicarea probabilităţilor.

Calculele prezintă o perfecţie neatinsă în cărţi similare. Ele au fost făcute cu ajutorul maşinii de calculat, nu cu formule aproximative (ca, de pildă, a lui STIRLING). Sunt consemnate în 131 de tablouri, din studiul cărora se pot deduce anume reguli pentru linia cea mai probabilă de condus jocul pentru reuşită.

Viaţa sufletească a omului nu se poate desfăşura ca o maşină. Pe lângă ocupaţiile serioase, trebuesc şi recreaţii. Matematica are privilegiul de a porni de la multe astfel de recreaţii pentru a construi edificii pur ştiinţifice, cu aplicaţii imense în ştiinţă şi industrie. Calculul probabilităţilor a pornit în 1654 de la probleme simple de jocuri de noroc, pentru a ajunge la metodele statistice fundamentale din fizica matematică contimporană. Fericită însuşire a matematicii de a uni plăcutul cu folositorul. In lungul şir de recreaţii matematice, început de *Epigramele Antologiei Greceşti*, trecând peste operele celebre ale lui BACHET DE MÉZIRIAC, OZANAM, peste noua carte a D-lui KRAÏTCHIK, volumul D-lor BOREL şi CHÉRON ilustrează această simbioză a creaţiei cu recreaţia.

P. SERGESCU.

G. SINGIER. *Les correspondances algébriques* (1, 1), (2, 1), (2, 2): Applications aux courbes et aux surfaces du deuxième et du troisième degré. Paris. Librairie Vuibert.

Fie $f(u, v) = 0$ o relaţie algebrică între două variabile u şi v, de grad respectiv m şi n. Dacă v este dat, se obţin pentru u, m valori reale sau imaginare, distincte sau confundate, finite sau infinite; dacă u este dat, se obţin pentru v, n valori. Corespondenţa între variabilele u şi v se numeşte corespondenţa (m, n).

Dacă variabilele u şi v sunt parametrii a două varietăţi unicursale, relaţia $f(u, v) = 0$ stabileşte între elementele celor două varietăţi o corespondenţă (m, n).

Volumul de care ne ocupăm, tratează, după o pregătire suficientă, proprietăţi şi aplicaţii ale corespondenţelor (1, 1), (2, 1), (2, 2) la conice, cubice plane şi strâmbe, cuadrice şi suprafeţe riglate de ordinul 3.

O carte scrisă în spiritul cunoscutelor Complemente de geometrie modernă ale lui CH. MICHEL şi al geometriei lui DUPORCQ.

C. IONESCU-BUJOR.

VICTOR MARIAN. *Vechile greutăţi medicale (farmaceutice) din Ardeal.* (Extras din revista „*Clujul medical*" No. 12, Anul 1939). Cluj.

CERERI

295. Mi s'a spus că ar exista în limba română un istoric al cifrelor, în o broşură aparte. Care este titlul şi autorul ei?

I. I.

Răspuns la cererea Nr. 293. (Anul XIV, pag. 479).

Revista „*Curierul Matematic*" a inceput a apare în anul 1925—1 Martie, fiind redactată de N. BOTEA, O. BOLGIU şi I. FÂNTÂNEANU, elevi ai Liceului Cantemir-Vodă din Bucureşti, apărând lunar, până la 1928.

Colecţia este epuizată şi se poate găsi la Biblioteca *Academiei Române* şi a *Gazetei Matematice.*

Având un volum disponibil, îl ofer D-lui MIRCEA ŞTEFANOVICI, care îl poate ridica dela *Gazeta Matematică.*

E. BOTEA.

DIVERSE

a) Şedinţele Societăţii.

In ziua de 11 Iulie 1940, orele 18 $^1/_2$, a avut loc la Casa „GAZETA MATEMATICĂ" şedinţa lunară pentru facerea copertei. Inainte de a se intra în ordinea de zi, membrii prezenţi au păstrat un minut de reculegere, ca manifestare a durerii ţării pentru ocuparea Basarabiei şi a Bucovinei de nord de către U. R. S. S.

b) Sporirea Bibliotecii.

AL. MANICATIDE & C. S. POPESCU. Geometrie pentru clasa II-a. Ploeşti 1909.

AL. MANICATIDE & C. S. POPESCU. Geometrie pentru clasa III-a. Ploeşti 1909.

AL. MANICATIDE & C. S. POPESCU. Geometrie în spaţiu pentru clasa IV-a. Ploeşti 1909.

AL. MANICATIDE & C. S. POPESCU. Geometrie în spaţiu pentru clasa VI-a c. m. Ploeşti 1909.

Donate de D-l I. IONESCU, Inginer.

THÉODORE CRIVETZ. Essai sur le postulat D'EUCLIDE. Bucarest 1895.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1934. *O bară grea, omogenă,* AB, *cântărind* p kg/m., *se sprijină pe două puncte de reazem fixe* C *şi* D, *situate pe aceeaşi orizontală. La extremităţile barei, în* A *şi* B, *sunt atârnate două greutăţi* P *şi* Q. *Să se găsească condiţiile de echilibru, cunoscând pe* P, Q, p *şi lungimele*

$$CA = a,\ AB = b,\ BD = c.$$

Știind că

$p = 2{,}2$ kg/m., $P = 37{,}5$ kg., $a = 1{,}12$ m., $b = 3{,}75$ m., $c = 0{,}58$ m., *să se determine limitele între care trebue să rămână coprins* Q, *ca să fie echilibru, precum și presiunele din* C *și* D.

A. G. IOACHIMESCU.

Fie R_c și R_d reacțiunele din C și D, aplicând teorema momentelor succesiv față de D și C, trebue să avem:

$$R_c(b-a-c) - P(b-c) + Qc - p(b-c)\left(\frac{b-c}{2}\right) + pc\,\frac{c}{2} = 0$$

sau

$$R_c(b-a-c) = P(b-c) - Qc + \frac{1}{2}G(b-2c),$$

$G = pb$ greutatea proprie a barei AB,

$$\therefore \quad (1) \quad R_c = \frac{2P(b-c) - 2Qc + G(b-2c)}{2(b-a-c)}$$

$$= \frac{(2P+G)(b-c) - (2Q+G)c}{2(b-a-c)};$$

permutând pe P cu Q și pe c cu a, vom avea:

$$\therefore \quad (2) \quad R_d = \frac{2Q(b-a) - 2Pa + G(b-2a)}{2(b-a-c)}$$

$$= \frac{(2Q+G)(b-a) - (2P+G)a}{2(b-a-c)}.$$

Bara fiind simplu rezemată în C și D, reacțiunele R_c și R_d trebue să fie pozitive, deci trebue să avem:

$$(2P+G)(b-c) > (2Q+G)c \text{ și } (2Q+G)(b-a) > (2P+G)a$$

sau (3)
$$\frac{b-c}{c} > \frac{2Q+G}{2P+G} > \frac{a}{b-a},$$

care sunt condițiile de echilibru căutate.

Pentru datele numerice

$G = pb = 2{,}2 \times 3{,}75$ kg. $= 8{,}25$ kg., $2P + G = (75 + 8{,}25)$ kg. $= 83{,}25$ kg., $b-c = 3{,}75-0{,}58 = 3{,}17$ m., $b-a = 3{,}75-1{,}12 = 2{,}63$ m.,

condiţiile (3) devin:

$$\frac{3,17}{0,58} > \frac{2Q + 8,25}{83,25} > \frac{1,12}{2,63}$$

sau

$$\frac{3,17 \times 83,25}{0,58} > 2Q + 8,25 > \frac{1,12 \times 83,25}{2,63};$$

calculând prima limită prin lipsă şi a doua prin exces, se găseşte:

$$223,38 \text{ kg} > Q > 13,605 \text{ kg},$$

$$R_c = \frac{259,03 - 416Q}{4,10}, \quad R_d = \frac{5,26\,Q - 71,25}{4,10}.$$

IOAN C. VASILIU.

PROBLEMA 3763. *Să se demonstreze că purtând raza pe cerc de 6 ori se înscrie un exagon regulat fără însă a se servi în demonstraţie de proprietăţi unghiulare ale figurilor ci numai de relaţiuni metrice sau areolare.*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-l I. C. BOIAN.

Fie O centrul unui cerc, AB un diametru, BC o coardă egală cu raza. Aplicăm teorema lui PITAGORA triunghiului ABC înscris într'un semicerc:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 = (2R)^2 - R^2 = R^2, \quad \overline{AC} = R\sqrt{3}.$$

Fie D simetricul lui C faţă de O, deci $\overline{COD}$ un diametru. Prin urmare triunghiul ACD este înscris într'un semicerc şi deci:

$$\overline{AD}^2 = \overline{DC}^2 - \overline{AC}^2 = (2R)^2 - 3R^2 = R^2, \quad \overline{AD} = R.$$

Ca şi pentru AC găsim acum:

$$\overline{BD}^2 = 3R^2, \quad BD = R\sqrt{3}.$$

Fie E mijlocul arcului $\overline{BD}$. Dreapta $\overline{OE}$ taie coarda $\overline{BD}$ în mijlocul ei H şi este perpendiculară pe dânsa. Deci:

$$\overline{OH}^2 = \overline{OD}^2 - \overline{DH}^2 = R^2 - \left(\tfrac{1}{2} R\sqrt{3}\right)^2 = \tfrac{1}{4} R^2, \quad \overline{OH} = \tfrac{1}{2} R.$$

Apoi:

$$\overline{HE} = \overline{OE} - \overline{OH} = R - \tfrac{1}{2} R = \tfrac{1}{2} R.$$

Triunghiul DHE ne dă:

$$\overline{DE}^2 = \overline{DH}^2 - \overline{HE}^2 = (\tfrac{1}{2} R\sqrt{3})^2 - (\tfrac{1}{2} R)^2 = R^2.$$

Deci $\overline{DE} = \overline{EB} = R$.

Fie F mijlocul arcului $\overline{AC}$. Se arată la fel că şi coardele $\overline{AF}$, $\overline{CF}$ sunt egale cu R. Prin urmare poligonul AFCBED se poate obţine purtând raza pe cerc de 6 ori.

Soluţie dată de D-l N. N. VELICESCU.

Fie exagonul regulat ABCDEF înscris în cercul O. Trei laturi consecutive vor fi deci înscrise într'un semicerc. Prin urmare linia $\overline{AD}$ trece prin centrul O al cercului şi împarte exagonul în două părţi egale, simetrice faţă de diametrul $\overline{AD}$.

Fiecare din aceste două patrulatere egale au latura $\overline{BD}$ cât diametrul cercului şi celelalte trei egale cu latura l a exagonului regulat înscris în cerc.

Ducem razele $\overline{OB}$, $\overline{OC}$. Triunghiurile isoscele OAB, OBC, OCD au bazele $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = l$ şi laturile egale cât raza R a cercului. Ele sunt deci egale şi au înălţimile duse din D şi C pe $\overline{AD}$ egale. Figura ABCD este deci un trapez isoscel.

Ariile S_1 şi S_2 ale trapezului şi exagonului sunt dar:

$$S_1 = \tfrac{1}{2}(2R + l)\,h \qquad S_2 = 2S_1 = (2R + l)\,h.$$

Dar aria S_2 e semiperimetrul $\times$ apotema $= \tfrac{1}{2}\,6lh = 3lh$. De aci scoatem:

$$(2R + h)\,h = 3lh.$$

Deci purtând R de 6 ori pe cercul O înscriem un exagon regulat.

PROBLEMA 3916. *Să se descompună expresiunile:*

$$\sqrt[4]{A \pm \sqrt{B}}$$

într'o sumă de două radicale. Să se extindă cazul pentru expresiuni de forma:

$$\sqrt[2n]{A \pm \sqrt{B}}.$$

CPT. I. LINTEŞ.

Ulterior propunerei acestei probleme, D-l G. G. CONSTANTINESCU a studiat problema transformărei expresiunilor:

$$E_{m,n} = \sqrt[m]{A \pm \sqrt[n]{B}}$$

într'o sumă sau diferenţă de două iraţionale, în revista PITAGORA I, Nr. 3 şi 5, demonstrând teorema:

„*Expresiunea* $E_{m,n}$ *este totdeauna transformabilă într'o sumă sau diferenţă de două iraţionale, dacă* m *n'are factori primi mai mari ca* 7, *adică dacă* m *este de forma:* $2^{\alpha}.3^{\beta}.5^{\gamma}.7^{\lambda}$."

In cazul problemei Nr. 3916, D-l G. G. CONSTANTINESCU, arată că expresiunea $E_{4,2}$ se poate transforma uşor utilizând o teoremă de reducere dată de D-sa în articolul citat, prin care se arată că transformarea expresiunei $E_{2m,n}$, revine la aceea a expresiunei $E_{m,n}$, ceea ce pentru $E_{4,2}$ revine la transformarea expresiunei $E_{2,2}$ care este clasică.

Cu aceasta socotesc problema 3916 rezolvată.

La această problemă nu s'a primit nici o soluţie.

I. L.

PROBLEMA 4005. *Se dau ecuaţiile*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a^p x^2 + b^p x + c^p = 0$$

şi să se compare rădăcinile lor, p *fiind un număr pozitiv.*

CĂP. GH. NICULESCU.

Un început de soluţie a fost dat de D-l ION LEUCÓ. Problema de altfel este o aplicaţie a studiului D-lui Prof. ION IONESCU publicat în volumele III, IV şi V din *Gazeta Matematică*, aşa încât a reda soluţia completă, nu prezintă interes.

Totuşi, pentru familiarizarea actualilor corespondenţi cu chestiuni de această natură, voiu schiţa în cele ce urmează, comparaţia rădăcinilor ecuaţiilor

$$(1) \qquad P_1(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

$$(2) \qquad P_2(x) = a'x^2 + b'x + c' = 0$$

pentru cazul rădăcinilor reale, rămânând ca acei ce vor dori să aprofundeze chestiunea să citească studiul D-lui Prof. I. IONESCU.

Presupunând că $\alpha_1 < \beta_1$ şi $\alpha_2 < \beta_2$ sunt rădăcinile ecuaţiilor (1) şi (2), se ştie că un număr λ în raport cu rădăcinile α_1, β_1 poate fi aşezat în una din ordinele

$$\lambda, \alpha_1, \beta_1 \; ; \quad \alpha_1, \lambda, \beta_1 \; ; \quad \alpha_1, \beta_1, \lambda$$

după cum avem respectiv

$$\begin{cases} aP_1(\lambda) > 0 \\ P_1'(\lambda) < 0 \end{cases} \qquad aP_1(\lambda) < 0 \qquad \begin{cases} aP_1(\lambda) > 0 \\ P_1'(\lambda) > 0 \end{cases}$$

$P_1'(\lambda)$ fiind valoarea primei derivate a polinomului $P_1(x)$ pentru $(x = \lambda)$.

In virtutea acestui fapt, semnul expresiunilor

$$aP_1(\alpha_2)\, aP_1(\beta_2) = \frac{a^2}{a'^2} E \quad , \qquad a'P_2(\alpha_1)\, a'P_2(\beta_1) = \frac{a'^2}{a^2} E,$$

este acelaşi cu al expresiunii

$$E = (ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb')$$

la care mai adăogăm expresiunile

$$E_1 = P_1'(\alpha_2)\, P_1'(\beta_2) = (ab' - ba')^2 - a^2 (b'^2 - 4a'c')$$

$$E_2 = P_2'(\alpha_1)\, P_2'(\beta_1) = (ab' - ba')^2 - a'^2 (b^2 - 4ac)$$

şi cu ajutorul acestor trei expresiuni E, E_1, E_2, vom putea distinge condiţiunile în cari rădăcinile ecuaţiilor (1) şi (2) vor putea fi aşezate în una din următoarele şase ordine

I	II	III
$\alpha_2, \beta_2, \alpha_1, \beta_1$	$\alpha_2, \alpha_1, \beta_1, \beta_2$	$\alpha_2, \alpha_1, \beta_2, \beta_1$
$\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$	$\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \beta_1$	$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$.

Intr'adevăr:

Primul grup de două aşezări fiind caracterizat prin faptul că rădăcinile α_2, β_2 sunt exterioare intervalului rădăcinilor α_1, β_1 expresiunile $aP_1(\alpha_2)\, aP_1(\beta_2)$ sunt pozitive, deci $E > 0$, iar

$$\begin{matrix} P_1'(\alpha_2) \lesseqgtr 0 \\ P_1'(\beta_2) \lesseqgtr 0 \end{matrix} \quad \therefore \quad E_1 > 0 \qquad \begin{matrix} P_2'(\alpha_1) \gtreqless 0 \\ P_2'(\beta_1) \gtreqless 0 \end{matrix} \quad \therefore \quad E_2 > 0$$

după cum ne referim la prima sau a doua ordine.

Semnele expresiunilor E, E_1, E_2 fiind aceleaşi pentru ambele aşezări, distingerea lor va rezulta din observaţia că avem respectiv

$$\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} \gtreqless \frac{\alpha_2 + \beta_2}{2} \qquad \text{sau} \qquad \frac{ab' - ba'}{aa'} \gtreqless 0.$$

Al doilea grup de aşezare fiind caracterizat prin faptul că rădăcinile α_2, β_2 sunt ambele exterioare sau interioare intervalului rădăcinilor α_1, β_1 rezultă $E > 0$, iar

$$\left.\begin{array}{l} P_1'(\alpha_2) < 0 \\ P_1'(\beta_2) > 0 \end{array}\right\} \quad \therefore \quad E_1 < 0 \qquad E_2 \gtrless 0$$

sau

$$\left.\begin{array}{l} P_2'(\alpha_1) < 0 \\ P_2'(\beta_1) > 0 \end{array}\right\} \quad \therefore \quad E_2 < 0 \qquad E_1 \gtrless 0$$

după cum ne referim la prima sau a doua aşezare, aşa încât distingerea celor două aşezări se va face prin observaţia că avem respectiv

$$\beta_1 - \alpha_1 \gtrless \beta_2 - \alpha_2 \qquad \frac{b'^2 - 4a'c'}{a'^2} \gtrless \frac{b^2 - 4ac}{a^2}.$$

In fine, al treilea grup de aşezare fiind caracterizat prin faptul că una din rădăcinile α_2, β_2 este conţinută în intervalul rădăcinilor α_1, β_1, iar cealalaltă este exterioară acestui interval, rezultă $E < 0$, iar semnele expresiilor E_1 şi E_2 pot varia, astfel încât distingerea celor două aşezări se va face prin observaţia că avem respectiv

$$\frac{\alpha_2 + \beta_2}{2} \lessgtr \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} \qquad \text{sau} \qquad \frac{ab' - ba'}{aa'} \gtrless 0.$$

In concluzie avem următoarele cazuri cu aşezările respective

$$E > 0 \begin{cases} E_1 > 0 \begin{cases} \dfrac{ab' - ba'}{aa'} > 0 & \alpha_2\ \beta_2\ \alpha_1\ \beta_1 \\ \dfrac{ab' - ba'}{aa'} < 0 & \alpha_1\ \beta_1\ \alpha_2\ \beta_2 \end{cases} \\ E_2 > 0 \\ \text{Cel puţin una din expresiile } E_1, E_2 \text{ este negativă} \begin{cases} \dfrac{b'^2 - 4a'c'}{a'^2} > \dfrac{b^2 - 4ac}{a^2} & \alpha_2\ \alpha_1\ \beta_1\ \beta_2 \\ \dfrac{b'^2 - 4a'c'}{a'^2} < \dfrac{b^2 - 4ac}{a^2} & \alpha_1\ \alpha_2\ \beta_2\ \beta_1 \end{cases} \end{cases}$$

$$E < 0 \begin{cases} \dfrac{ab' - ba'}{aa'} > 0 & \alpha_2\ \alpha_1\ \beta_2\ \beta_1 \\ \dfrac{ab' - ba'}{aa'} < 0 & \alpha_1\ \alpha_2\ \beta_1\ \beta_2 \end{cases}$$

unde n'am omis decât cazul când cele două ecuaţii au o rădăcină comună.

G. G. C.

PROBLEMA 4308. *Fiind dat polinomul*

$$P(x) = x^2 + 3x + 2,$$

se cere să se rezolve ecuaţia

$$27\,P(x)\,P(x+2)\,P(x+4) + 320 = 0.$$

GH. TH. GHEORGHIU.

Soluţie dată de D-nii: PAUL D. DOBRESCU, O. D. KLINGER, GRIGORE MARTEŞ, PANAIT C. MAZILU, DIMITRIE D. MAVRODIN şi M. MĂNESCU. Polinomul dat se mai poate scrie

$$P(x) = (x+1)(x+2),$$

şi deci ecuaţia ce se cere să rezolvăm

$$27(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6) + 320 = 0,$$

sau grupând factorii convenabil,

$$[3(x+1)(x+6)][3(x+2)(x+5)][3(x+3)(x+4)] + 320 = 0;$$

$$(3x^2+21x+18)(3x^2+21x+30)(3x^2+21x+36) + 320 = 0.$$

Făcând aici substituţia:

$$3x^2 + 21x + 30 = y,$$

obţinem

$$y(y-12)(y+6) + 320 = 0;$$

$$y^3 - 6y^2 - 72y + 320 = 0.$$

Se constată cu uşurinţă că această din urmă ecuaţie are drept rădăcini: 4, 10, — 8, încât rezolvarea ecuaţiei date se reduce la rezolvarea ecuaţiilor

$$3x^2 + 21x + 26 = 0,$$

$$3x^2 + 21x + 20 = 0,$$

$$3x^2 + 21x + 38 = 0,$$

care ne dau rădăcinile

$$x_{1,2} = \frac{-21 \pm \sqrt{129}}{6}, \quad x_{3,4} = \frac{-21 \pm \sqrt{201}}{6}, \quad x_{5,6} = \frac{-21 \pm i\sqrt{15}}{6}.$$

Observare. S'au mai primit şi alte soluţii decât cele menţionate, care însă conţineau greşeli de calcul sau erau necomplecte.

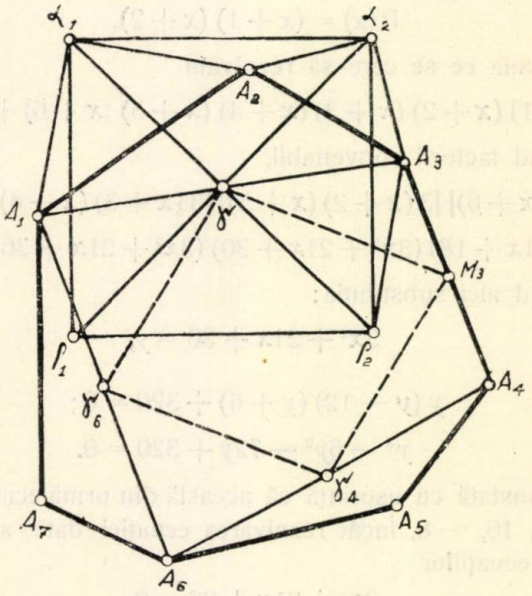
GH. TH. GH.

PROBLEMA 4724. *Să se construiască un poligon convex de şapte laturi cunoscând centrele patratelor construite exterior sau interior pe laturile sale.* V. THÉBAULT.

Soluţie dată de D-l VIRGIL ECKSTEIN.

Fie $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ poligonul de construit; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_7$ centrele patratelor construite exterior pe laturile $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_7A_1$. Construim spre interior pe $\alpha_1\alpha_2$ ca latură patratul $\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2$ de centru γ. Observăm că triunghiurile $\alpha_1A_2\alpha_2$, $\beta_2A_3\alpha_2$ au

$$\alpha_1\alpha_2 = \alpha_2\beta_2 \quad \text{şi} \quad \alpha_2A_2 = \alpha_2A_3$$



prin construcţie, iar unghiurile

$$\sphericalangle\, \alpha_1\alpha_2A_2 = \sphericalangle\, A_3\alpha_2\beta_2$$

căci au $\alpha_1\alpha_2 \perp \beta_2\alpha_2$ şi $A_2\alpha_2 \perp A_3\alpha_2$, tot prin construcţie, deci triunghiurile $\alpha_1A_2\alpha_2$, $\beta_2A_3\alpha_2$ sunt egale, şi prin urmare

$$\sphericalangle\, \alpha_2\alpha_1A_2 = \sphericalangle\, A_3\beta_2\alpha_2.$$

Dar $\sphericalangle\, \alpha_2\alpha_1A_2$ este egal şi cu $\sphericalangle\, A_1\alpha_1\beta_1$ pentru că au laturile perpendiculare, deci

$$\sphericalangle\, A_1\alpha_1\beta_1 = \sphericalangle\, A_3\alpha_2\beta_2$$

şi cum $\sphericalangle\, \beta_1\alpha_1\beta_2$, $\sphericalangle\, \alpha_1\beta_2\alpha_2$ sunt egale între ele şi egale cu $\frac{\pi}{4}$

rezultă

$$\sphericalangle A_1\alpha_1\beta_2 = \sphericalangle A_3\beta_2\alpha_1$$

adică $A_1\alpha_1$ şi $A_3\beta_2$ sunt paralele, ele fiind şi egale, rezultă că $A_1\alpha_1 A_3\beta_2$ este un paralelogram al cărui centru este în centrul γ al patratului $\alpha_1\alpha_2\beta_2\beta_1$.

Mijloacele γ, γ_4, γ_6 ale laturilor A_1A_3, A_4A_6, A_6A_1 al patrulaterului $A_1A_3A_4A_6$, de exemplu sunt cunoscute, se deduce imediat mijlocul M_3 al laturei A_3A_4, complectând paralelogramul $\gamma\gamma_6\gamma_4M_3$. Din aproape în aproape se obţin astfel mijloacele M_1, M_2, ..., M_7 ale tuturor laturilor poligonului. Problema revine deci la următoarea problemă cunoscută sub numele de teorema lui A. PROUHET (F. G. M. *Géometrie* pag. 253): *Un poligon de* $2n+1$ *laturi este determinat când i se cunosc mijloacele tuturor laturilor.*

Se deduce că enunţul problemei 4724 poate fi generalizat pentru un poligon de $2n+1$ laturi.

Observaţiuni. 1°. D-l D. RIPIANU a calculat prin geometria analitică distanţele vârfurilor eptagonului la un sistem de axe dreptunghiulare, atunci când se cunosc distanţele la acele axe ale centrelor patratelor construite ca în enunţ. Soluţia aceasta analitică este interesantă, însă în probleme de construcţii preferăm soluţiile care rezolvă problema pe cale geometrică cu ajutorul riglei şi al compasului.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4888. *Să se demonstreze că expresia:*

$$2x(x-1)\ldots(x-n+1) - 2C_{2n}^{1}(x-1)\ldots(x-n+1)(x-2n+1) +$$
$$+ 2C_{2n}^{n}(x-2)\ldots(x-n+1)(x-2n+1)(x-2n+2)+\ldots$$
$$\ldots + 2C_{2n}^{p}(-1)^p(x-p)\ldots(x-n+1)(x-2n+1)\ldots(x-2n+p)+$$
$$\ldots + (-1)^n C_{2n}^{n}(x-n+1)\ldots(x-2n+n)$$

este independentă de x, apoi să i se calculeze valoarea.

G. CĂLUGĂREANU.

Soluţia acestei probleme, propusă în Nr. din Noemvrie, Vol. XLIII al *Gazetei Matematice*, a fost dată de autorul ei în revista *„Matematica"* din Cluj, în Vol. XIV.

G. M.

PROBLEMA 4910. *Să se demonstreze că expresia*

$$E \equiv \cos(2k+1)\,a + \sin(2k+1)\,a$$

este divizibilă cu $(\cos a \pm \sin a)$, *după cum* k *este par sau impar.*

GH. D. SIMIONESCU.

Soluția I-a dată de D-rele ANA C. GEREANU, MIOARA I. CRĂCIUNESCU (studente, București) și D-nii: TR. PREDOIESCU-ȚÂNȚĂRENI, IOAN STREDER (lic. mil. Iași).

Expresia dată se mai poate scrie:

$$E \equiv \cos 2ka \cos a - \sin 2ka \sin a + \sin 2ka \cos a + \cos 2ka \sin a$$

$$\therefore \quad (1) \quad E \equiv (\cos a + \sin a)\cos 2ka + (\cos a - \sin a)\sin 2ka.$$

1°. Presupunem $k = 2m$. E deajuns să arătăm că al doilea termen din (1) e divizibil prin $(\cos a + \sin a)$, deoarece pentru primul termen chestiunea este evidentă. Insă:

$$\sin 4ma = C_{4m}^{1}\cos^{4m-1}a \sin a - C_{4m}^{3}\cos^{4m-3}a \sin^3 a$$
$$+ C_{4m}^{5}\cos^{4m-5}a \sin^5 a - \ldots - C_{4m}^{4m-5}\cos^5 a \sin^{4m-5} a$$
$$+ C_{4m}^{4m-3}\cos^3 a \sin^{4m-3} a - C_{4m}^{4m-1}\cos a \sin^{4m-1} a.$$

Desvoltarea are $2m$ termeni, coeficienții egal depărtați de extremi fiind egali, deci grupând termenii avem:

$$\sin 4ma = C_{4m}^{1}\sin a \cos a\,(\cos^{4m-2}a - \sin^{4m-2}a)$$
$$- C_{4m}^{3}\sin^3 a \cos^3 a\,(\cos^{4m-6}a - \sin^{4m-6}a) + \ldots$$
$$+ C_{4m}^{2m-1}\sin^{2m-1}a \cos^{2m-1}a\,(\cos^2 a - \sin^2 a).$$

Cum fiecare paranteză din această desvoltare e divizibilă prin $(\cos a + \sin a)$, rezultă că $\sin 4ma$ e divizibil cu aceeași câtime. Deci pentru $k = 2m$ expresiunea dată se divide prin $(\cos a + \sin a)$.

2°. Luăm $k = 2m + 1$. Va trebui să arătăm acum că prima parte a expresiei (1), adică $\cos 2(2m+1)\,a$, este divizibil prin $(\cos a - \sin a)$. Desvoltând, avem:

$$\cos(4m+2)\,a = \cos^{4m+2}a - C_{4m+2}^{2}\cos^{4m}a \sin^2 a$$
$$+ C_{4m+2}^{4}\cos^{4m-2}a \sin^4 a + \ldots + C_{4m+2}^{4m}\cos^2 a \sin^{4m} a - C_{4m+2}^{4m+2}\sin^{4m+2} a.$$

Desvoltarea are $(2m+2)$ termeni şi grupându-i pe cei egali depărtaţi de extremi obţinem:

$$\cos(4m+2)a = (\cos^{4m+2}a - \sin^{4m+2}a)$$
$$- C^{2}_{4m+2}\sin^2 a\cos^2 a(\cos^{4m-2}a\sin^{4m-2}a) + \ldots$$
$$\pm C^{2m}_{4m+2}\cos^{2m}a\sin^{2m}a(\cos^2 a - \sin^2 a)$$

din care se observă că $\cos(4m+2)a$, deci primul termen al expresiei (1) e divizibil prin $(\cos a - \sin a)$.

q. e. d.

Soluţii asemănătoare au fost date de D-nii: S-LT. GRIGORE MARTEŞ, D-TRU RIPIANU, AUREL I. CORNĂŢEANU, MARIUS BRĂTAN (lic. mil. Craiova) şi MIRCEA D. POPA (lic. mil. Iaşi).

Soluţia II-a dată de D-nii: OCTAVIAN GH. RĂDULESCU, DINU D. BUZNEA (elevi lic. mil „N. Filipescu") şi ISAC SOLOMON (lic. Internat, Iaşi).

Se aduce expresia la forma (1) dela prima soluţie.

1°. $k = 2m$. După cum s'a văzut la prima soluţie este deajuns ca $\sin 4ma$ să fie divizibil prin $(\cos a + \sin a)$, adică să se anuleze odată cu această cantitate, deci pentru $a = k\pi - \frac{\pi}{4}$. Inlocuind avem:

$$\sin 4m\left(k\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin(4mk\pi - m\pi) = \sin m(4k-1)\pi = 0.$$

q. e. d.

2°. $k = 2m+1$. De data aceasta va trebui ca $\cos 2(2m+1)a$ să se anuleze odată cu $(\cos a - \sin a)$, deci pentru $a = k\pi + \frac{\pi}{4}$.

Avem:

$$\cos(4m+2)\left(k\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(2m+1)\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \cos\left[2k'\pi + (2m+1)\frac{\pi}{2}\right] = 0,$$

deoarece la un număr întreg de perioade se adaogă un număr fără soţ de $\frac{\pi}{2}$.

q. e. d.

Soluția III-a. Pornim dela formulele cunoscute:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad ; \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

care ne dau pentru expresia noastră:

$$(2) \qquad E = \frac{(1-i)\, e^{(2k+1)ia} + (1+i)\, e^{-(2k+1)ia}}{2}$$

și în mod analog:

$$(3) \qquad \cos a + \sin a = \frac{(1-i)\, e^{ia} + (1+i)\, e^{-ia}}{2};$$

$$(4) \qquad \cos a + \sin a = \frac{(1+i)\, e^{ia} + (1-i)\, e^{-ia}}{2}.$$

1°. Expresiunea (3) se anulează pentru:

$$e^{2ia} = -\frac{1+i}{1-i} = -i$$

care introdus în (2) ne dă:

$$E = \frac{(1-i)(-i)^k \cdot e^{ia} + (1+i)(i)^{+k} \cdot e^{-ia}}{2}$$

unde se vede că dacă avem $k = 2m$, atunci $(i)^k$ se scoate factor și rămâne tocmai expresia (3), ceea ce arată că (2) e divizibilă cu (3) și *că dacă* $k \neq 2m$ *atunci* (2) *nu e divizibilă cu* (3).

2°. Expresiunea (4) se anulează pentru: $e^{2ia} = i$, care introdus în (2) ne dă:

$$E = \frac{(1-i)(i)^k e^{ia} + (1+i)(-i)^k e^{-ia}}{2},$$

iar pentru $k = 2m + 1$ vom avea:

$$E = (i)^{2m} \frac{(1-i)(i)\, e^{ia} + (1+i)(-i)\, e^{-ia}}{2} = i^{2m} \frac{(1+i)\, e^{ia} + (1-i)\, e^{-ia}}{2}$$

ceea ce arată că (2) este divizibilă cu (4), dacă avem $k = 2m + 1$.

PROBLEMA 5124. *Fie în triunghiul dreptunghiu* ABC, BB_1, CC_1 *bisectoarele unghiurilor ascuțite* B_1, C_1; I *intersecția lor;* AD *înălțimea;* AA_b, AA_c *bisectoarele unghiurilor* BAD, DAC, B_2, C_2 *intersecțiile dreptelor* BB_1, CC_1 *cu* AD *și* I_1 *intersecția dreptelor* $A_b C_2$, $A_c B_2$. *Să se demonstreze că*

1°. *Patrulaterul* $A_b I I_1 A_c$ *este inscriptibil.*

2°. *Patrulaterele* $ABA_b I$ *și* $ACA_c I$ *sunt deasemenea inscriptibile.*

SLT. I. GH. ZAMFIRESCU.

Soluția I-a dată de D-nii: MIREL D. STOENESCU (lic. mil. M-rea Dealu), M. AL. VASILESCU-STABU (cl. VII-a lic. G. Lazăr, București).

1°. Se observă pe o figură, relațiile unghiulare

$$\text{ung. } BAA_c = \text{ung. } BAD + \text{ung. } DAA_c = C + \frac{B}{2} = 90^0 - \frac{B}{2}$$

deci BI și AA_c *sunt perpendiculare*; A și A_c sunt simetrice față de BI; B_2 fiind situat tot pe BI, avem

$$\text{ung. } B_2 AI = \text{ung. } B_2 A_c I.$$

Analog

$$\text{ung. } C_2 AI = \text{ung. } C_2 A_b I$$

deci unghiurile $I_1 A_b I$ și $I_2 A_c I$ sunt egale și *patrulaterul* $A_b I I_1 A_c$ *este inscriptibil.*

2°. Avem deasemenea

$$\text{ung. } IAA_c = \text{ung. } IAC - \text{ung. } A_c AC = 45^0 - \frac{B}{2} = \frac{C}{2} = \text{ung. } ICA_c$$

deci *patrulaterul* $ACA_c I$ *este inscriptibil.*

Analog, pentru patrulaterul $ABA_b I$.

Soluția II-a dată de D-nii: HORIA M. BODNĂRESCU, PAUL P. DRĂGHICESCU (cl. V-a), MIRCEA D. POPA (lic. mil. Iași).

Demonstrăm întâi punctul 2° (ca la soluția precedentă).

Patrulaterul $IACA_c$ fiind inscriptibil,

$$\text{ung. } A_b A_c I = \text{ung. } IAC = 45^0$$

analog ung. $A_c A_b I = 45^0$ și *unghiul* $A_b IA_c$ *este drept.*

Avem apoi din cauza bisectoarelor

$$\frac{B_2 A}{B_2 D} = \frac{BA}{BD} \quad ; \quad \frac{A_c C}{A_c D} = \frac{AC}{AD}$$

dar, din triunghiurile asemenea BAD, CAD, avem

$$\frac{BA}{BD} = \frac{AC}{AD}$$

deci

$$\frac{B_2 A}{B_2 D} = \frac{A_c C}{A_c D}$$

rezultă că $B_2 A_c$ este paralelă cu AC; analog $C_2 A_b$ este paralelă cu AB, adică *unghiul* $A_b I_1 A_c$ *este drept.*

deci $$\text{ung. } A_b I_1 A_c = \text{ung. } A_b I A_c$$

şi *patrulaterul* $A_b I I_1 A_c$ *este inscriptibil.*

Observări făcute de D-l M. VASILESCU-STABU:

1°. Intersecţia dreptelor $A_c C_2$ cu $A_b B_2$ se află deasemenea pe cercul $A_b I I_1 A_c$.

2°. Proprietăţile din enunţ se păstrează dacă în locul lui I se ia I_a şi bisectoarele exterioare în locul celor interioare.

PROBLEMA 5151. *Să se găsească patratul perfect de nouă cifre* abcdefghk *ştiind că*

$$abc + ghk = def + 1.$$

V. THÉBAULT.

Soluţie dată de D-l ST. CETĂŢEANU (Elev inginer, Bucureşti). Fie N^2 patratul căutat. Conform enunţului avem

$$N^2 = abc \times 10^6 + def \times 10^3 + ghk \qquad (1)$$

$$abc + ghk = def + 1. \qquad (2)$$

Adunăm (1) cu (2) şi grupând termenii convenabil obţinem

$$N^2 - 1 = abc(10^6 - 1) + def(10^3 + 1) = (10^3 + 1)[abc10^3 - abc + def]$$

sau ţinând seamă de (2)

$$(N - 1)(N + 1) = 1001\ [1000abc + ghk - 1] \qquad (3)$$

care arată că $(N - 1)(N + 1)$ trebue să se dividă prin

$$1001 = 7 \times 11 \times 13$$

pentru aceasta este necesar şi suficient să se găsească un întreg m sau 2 întregi x şi y, pentru care să avem una din următoarele 8 grupe de ecuaţiuni în numere întregi.

$1^0.\ N+1=1001m$ sau $2^0.\ N-1=1001m$

$3^0.\ \begin{cases} N+1=143x \\ N-1=7y \end{cases}$; $4^0.\ \begin{cases} N+1=7x \\ N-1=143y \end{cases}$

$5^0.\ \begin{cases} N+1=91x \\ N-1=11y \end{cases}$; $6^0.\ \begin{cases} N+1=11x \\ N-1=91y \end{cases}$

$7^0.\ \begin{cases} N+1=77x \\ N-1=13y \end{cases}$; $8^0.\ \begin{cases} N+1=13x \\ N-1=77y. \end{cases}$

Să le examinăm pe rând.

Ecuaţia 1⁰. Din

$$N^2<999999999 \quad \therefore \quad N<31622$$

se vede că în 1^0 trebue să se dea lui m valori aşa încât

$$1001m-1<31622 \quad \therefore \quad m<32.$$

Dând lui m succesiv valorile 1, 2,..., 32 se obţine următorul tabel de 22 soluţiuni pentru N

m	N	N^2	m	N	N^2
1	1.000	001.000.000	12	12.011	144.264.121
2	2.001	004.004.001	13	13.012	169.312.144
3	3.002	009.012.004	14	14.013	196.364.169
4	4.003	016.024.009	15	15.014	225.420.196
5	5.004	025.040.016	16	16.015	256.480.225
6	6.005	036.060.025	17	17.016	289.544.256
7	7.006	049.084.036	18	18.017	324.612.289
8	8.007	064.112.049	19	19.018	361.684.324
9	9.008	081.144.064	20	20.019	400.760.361
10	10.009	100.180.081	21	21.020	441.840.400
11	11.010	121.220.100	22	22.021	484.924.441

Pentru $m>22$ se găsesc numere N de forma 1^0 şi mai mici ca 31.622, dar patratele lor nu satisfac condiţia (2).

Ecuația 2°. Ca și la 1° găsim următorul tablou de 22 soluțiuni:

m	N	N^2	m	N	N^2
0	1	000.000.001	11	11.012	121.264.144
1	1.002	001.004.004	12	12.013	144.312.169
2	2.003	004.012.009	13	13.014	169.364.196
3	3.004	009.024.016	14	14.015	196.420.225
4	4.005	016.040.025	15	15.016	225.480.256
5	5.006	025.060.036	16	16.017	256.544.289
6	6.007	036.084.049	17	17.018	289.612.324
7	7.008	049.112.064	18	18.019	324.684.361
8	8.009	064.144.081	19	19.020	361.760.400
9	9.010	081.180.100	20	20.021	400.840.441
10	10.011	100.220.121	21	21.022	441.924.484

Ecuațiile 3°. Din aceste ecuații se scoate

$$7y = 143x - 2 = 140x + 3x - 2$$

care arată că $3x - 2$ trebue să se dividă prin 7 deci x trebue să fie dat de $x = 7m + 3$

pe care ducându-l în 3° găsim

$$N = 1001m + 428.$$

Dând aici lui m valorile 0, 1,... se găsesc următoarele 22 soluțiuni:

m	N	N^2	m	N	N^2
0	428	000.183.184	12	12.440	154.753.600
1	1.429	002.042.041	13	13.441	180.660.481
2	2.430	005.904.900	14	14.442	208.571.364
3	3.431	011.771.761	15	15.443	238.486.249
4	4.432	019.642.624	16	16.444	270.405.136
5	5.433	029.517.489	17	17.445	304.328.025
6	6.434	041.396.356	23	23.451	549.949.401
7	7.435	055.279.225	24	24.452	597.900.304
8	8.436	071.166.096	25	25.453	637.845.209
10	10.438	108.951.844	26	26.454	699.814.116
11	11.439	130.750.621	27	27.455	752.776.025

Ecuațiile 4⁰. Ca la 3⁰ se găsește

$$7x - 1 = 143y + 1$$

$$\therefore \quad y = 7m + 4 \quad \text{și} \quad x = 143m + 82 \quad \therefore \quad N = 1001m + 573.$$

Deci următoarele 22 soluțiuni:

m	N	N^2	m	N	N^2
0	573	000.328.329	11	11.584	134.189.056
1	1 574	002.477.476	12	12.585	158.382.225
2	2.575	006.630.625	13	13.586	184.579.396
3	3.576	012.787.776	14	14.587	212.780.569
4	4.577	020.948.929	15	15.588	242.985.744
5	5.578	031.114.084	17	17.590	309.408.100
6	6.579	043.283.241	18	18.591	345.625.281
7	7.580	057.456.400	19	19.592	383.846.464
8	8.581	073.633.561	22	22.545	510 534.025
9	9.582	091.814.724	23	23.596	556.771.216
10	10.583	111.999.889			

Ecuațiile 5⁰ conduc la

$$91x - 1 = 11y + 1 \quad \therefore \quad x = 11m + 8 \quad \therefore \quad N = 1001m + 727$$

care dă soluțiile, în număr de 27

m	N	N^2	m	N	N^2
0	727	000.528.529	14	14.741	217.297.081
1	1.728	002.985.984	15	15.742	247.810.564
2	2.729	007.447.441	16	16.743	280.328.049
3	3.730	013.912.900	17	17.744	314.849.536
4	4.731	022.382.361	18	18.745	351.375.025
5	5.732	032.355.324	19	19.746	389.904.516
6	6.733	045.333.289	20	20.747	430.438.009
7	7.734	059.814.756	21	21.748	472.975.504
8	8.735	076.300.225	22	22.749	517.517.001
9	9.736	094.789.696	24	23.751	612.612.001
10	10.737	115.283.169	26	26.753	715.723.009
11	11.738	137.780.644	28	28.755	826.850.025
12	12.739	162.282.121	30	30.757	945.993.049
13	13.740	188.787.600			

Ecuaţiile 6⁰ dau 20 soluţiuni pentru

$$11x - 1 = 91y + 1 \quad \therefore \quad N = 1001m + 274$$

m	N	N^2	m	N	N^2
0	274	000.075.076	11	11.285	127.351.225
1	1.275	001.625.625	12	12.286	150.945.796
2	2.276	005.180.176	13	13.287	176.544.369
3	3.277	016.738.729	15	15.289	233.753.521
4	4.278	018.301.284	16	16.290	265.364.100
5	5.279	024.864.841	17	17.291	298.978.681
6	6.280	039.438.400	18	18.292	334.597.264
8	8.282	068.591.524	20	20.294	401.836.436
9	9.283	086.174.089	21	21.295	453.477.025
10	10.284	105.760.656	23	23.297	542.750.209

Ecuaţiile 7⁰ conduc la

$$77x - 1 = 13y + 1 \quad \therefore \quad N = 1001m + 846$$

şi dau următoarele 21 soluţiuni:

m	N	N^2	m	N	N^2
0	846	000.735.736	11	11.857	140.588.449
1	1.847	003.411.409	12	12.858	165.328.164
2	2.848	008.111.104	14	14.860	220.819.600
3	3.849	014.814.801	15	15.861	251.571.321
4	4.850	023.522.500	16	16.862	284.327.044
5	5.851	034.234.201	18	18.864	355.850.496
6	6.852	046.949.904	19	19.865	394.618.225
7	7.853	061.669.609	22	22.868	522.945.424
8	8.854	078.393.316	23	23.869	569.729.161
9	9.855	097.121.025	27	27.873	776.904.129
10	10.856	117.852.736			

Ecuaţiile 8^0 dau 20 soluţiuni.

$$13x - 1 = 77y + 1 \quad \therefore \quad N = 1001m + 155$$

m	N	N^2	m	N	N^2
0	155	000.024.025	10	10.165	103.327.225
1	1.156	001.336.336	11	11.166	124.679.556
2	2.157	004.653.649	13	13.168	173.396.224
3	3.158	009.972.964	14	14.169	200.760.561
4	4.159	017.297.281	16	16.171	261.501.241
5	5.160	026.625.600	17	17.172	294.877.584
6	6.161	037.957.921	19	19.174	367.642.276
7	7.162	051.294.244	22	22.177	491.819.329
8	8.163	066.634.569	24	24.179	584.624.041
9	9.164	083.978.896	27	27.182	738.861.124

Problema are deci în total 154 soluţiuni dintre care 86 sunt numai formal numere de 9 cifre.

Notă. 1°. D-l T. C. ŞTEFAN, Elev ofiţer, Şcoala ofiţeri de geniu, Bucureşti a găsit pe aceeaşi cale 42 soluţiuni, din care 1 de formă.

2°. Propunătorul problemei a indicat numai soluţia 111999889.

3°. D-l VĂDUVA F. M. (Lic. „I. Maiorescu" Giurgiu), folosind nota D-lui G-L GH. BUICLIU din *Gazeta Matematică*, Vol. XL, pag. 50, a găsit numai soluţia 208571364. In nota citată se dau toate patratele scrise cu 9 cifre diferite, ori în problema de faţă nu se spune în enunţ că cifrele sunt neapărat diferite.

GH. B.

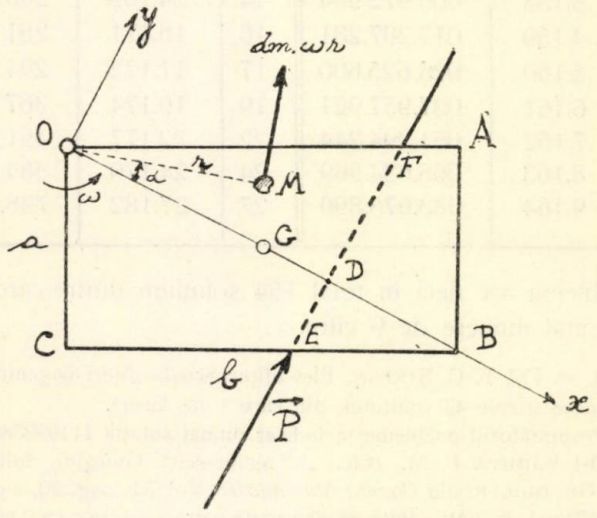
PROBLEMA 5224. *O placă dreptunghiulară de dimensiuni* a *şi* b *este aşezată pe un plan lucios orizontal. Să se determine punctele periferice în care aplicând o percusiune orizontală să obţinem pentru placă o mişcare de rotaţie cu centrul instantaneu situat în unul din vârfurile sale.*

ALEXANDRU STOENESCU.

Fie O centrul instantaneu de rotaţie după ciocnire, ω iuţeala unghiulară în jurul acestui centru, $\vec{P}$ vectorul percusiunii.

Să considerăm un element infinitesimal M de massă *dm* situat la distanţa *r* de O. Iuţeala acestui element este nulă înainte de ciocnire şi ωr după ciocnire, iar vectorul reprezentând variaţia cantităţii de mişcare este perpendicular pe OM şi are mărimea $dm \cdot \omega r$.

Pentru rezolvarea problemei, vom ţine seamă de faptul că, în ciocniri, sistemul de vectori elementari ai variaţiei cantităţilor de mişcare şi sistemul percusiunilor formează două sisteme echivalente.



Pentru a determina vectorul $\vec{P}$, va fi deci necesar să însumăm vectorii elementari $dm \cdot \omega r$. Alegând sistemul de axe rectangulare OBx şi Oy date de figură şi notând $\alpha = \sphericalangle (OM, Ox)$ avem prin proiecţiuni:

$$P_x = \int dm \cdot \omega r \sin\alpha = \omega \int dm \cdot y = \omega m y_G = 0$$

$$P_y = \int dm \cdot \omega r \cos\alpha = \omega \int dm \cdot x = \omega m x_G = \omega m \frac{OC}{2} = \frac{\omega n \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

G fiind centrul de greutate al plăcii, iar x_G şi y_G coordonatele sale.

Rezultă:

$$\vec{P} = \vec{P}_y = \frac{\omega m \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Percusiunea P este deci perpendiculară pe diagonala OB. Să însemnăm cu x_0 distanța OD dela O la $\vec{P}$.

Prin momente în O obținem.

$$Px_0 = \int dm \,.\, \omega r \,.\, r = \omega \int r^2 dm = I_0 \omega$$

I_0 fiind momentul de inerție polar în O.

Rezultă:

$$x_0 = \frac{I_0 \omega}{P} = \frac{\frac{m(a^2+b^2)}{3} \,.\, \omega}{\frac{\omega m \sqrt{a^2+b^2}}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{a^2+b^2} = \frac{2}{3} \,.\, \overline{OB}\,.$$

Ducând o perpendiculară pe OB la distanța $\overline{OD} = \frac{2}{3} \,.\, \overline{OB}$ se obțin punctele cerute E și F.

La această problemă s'au primit soluții parțiale dela D-nii: HERESCU CONSTANTIN și DOVGAN V. GHEORGHE, elevi cl. VIII-a B Liceul Militar „Ștefan cel Mare", Cernăuți.

AL. ST.

PROBLEMA 5271. *Să se rezolve ecuațiile:*

$$\sin(\cos x) = \cos(\sin x) \quad , \quad \operatorname{tg}(\operatorname{cotg} x) = \operatorname{cotg}(\operatorname{tg} x).$$

I. IONESCU.

Soluție dată de D-nii: D. D. BOIANGIU și P. P. DRĂGHICESCU.

Prima ecuație o putem scri:

$$\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - \cos x\right) = \cos(\sin x),$$

$$\therefore \quad \tfrac{1}{2}\pi - \cos x = 2k\pi \pm \sin x,$$

$$\therefore \quad (\pm \sin x + \cos x)^2 = \tfrac{1}{4}\pi^2 (1 - 4k)^2,$$

$$\therefore \quad \pm \sin 2x = \tfrac{1}{4}\pi^2 (1 - 4k)^2 - 1.$$

Pentruca această ecuație să admită rădăcini, trebuie ca:

$$-1 \leqslant \tfrac{1}{4}\pi^2 (1 - 4k)^2 - 1 \leqslant +1,$$

$$-3 \leqslant \pi^2 (1 - 4k)^2 \quad , \quad \pi^2 (1 - 4k)^2 \leqslant 5.$$

Prima neegalitate este evidentă, iar a doua nu este posibilă pentru $k = 0$ căci $9\pi^2 > 5$, iar dacă avem $k \leqslant -1$ şi $k \geqslant 1$ atunci $9\pi^2$ trece peste 5. Ecuaţia întâia este dar imposibilă.

A doua ecuaţie este propusă în *Culegerea de Probleme de Trigonometrie* Partea I, la Capitolul XIV problema 42, unde este dată soluţia:

$$\sin 2x = 4/\pi\,(2k + 1),$$

k având orice valoare întreagă, positivă sau negativă, afară de 0 şi -1. Dând valori întregi lui k, cu table putem calcula pe $2x$ şi apoi pe x. Astfel pentru $k = 1$ găsim $\sin 2x = 4/3$ şi pentru $k = -2$ găsim $\sin 2x = -4/3$. Găsim pentru x unghiul de $12^0\,33'\,24''$ în primul cadran, de unde expresiunea generală a unghiurilor x:

$$x = 2k \pm 12^0\,33'\,24'' \quad \text{şi} \quad x = (2k + 1)\,\pi - 12^0\,33'\,24''.$$

Dând alte valori lui k în expresiunea lui $\sin 2x$ găsim alte soluţiuni în număr nelimitat.

Soluţiunile trebuesc apoi exprimate în *radiani.*

PROBLEMA 5275. *In triunghiul* ABC *de ortocentru* H, *fie* M_a *mijlocul medianei din vârful* A, *fie* E_1 *mijlocul distanţei* AH, *iar* E_2, E_3 *mijloacele distanţelor* AE_1, E_1H. *Să se arate că* $\overline{M_a E_2}$ *şi analoagele, obţinute prin aceleaşi construcţii pentru celelalte vârfuri, sunt egale.*

Aceeaşi proprietate pentru $\overline{M_a E_3}$ *şi analoagele.*

IULIAN PETRESCU.

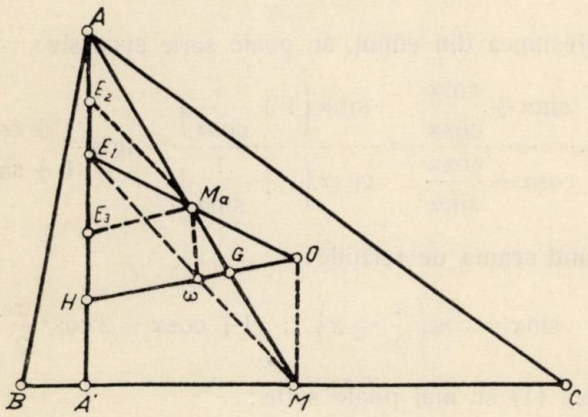
Soluţie dată de D-nii: H. M. BODNĂRESCU (Şc. Politechnică, Bucureşti), M. D. POPA, P. P. DRĂGHICESCU, S. R. TURCU, AL. I. ROHR, Z. C. IVAN, AUREL N. POPA, I. V. JAREGHIE, AL. G. JILETCOVICI, ACHILE V. PETRESCU, C. I. PASCARIU (Lic. militar, Iaşi), M. I. TREFILOV (Lic. „N. Bălcescu", Brăila).

1. Fie M mijlocul lui BC. In triunghiul MAE_1, $\overline{M_a E_2}$ este paralelă cu ME_1 şi egală cu jumătate din lungimea $\overline{ME_1}$ care se ştie că este diametrul cercului celor 9 puncte deci egală cu raza R a cercului ABC. Rezultă

$$M_a E_2 = M_b E_2' = M_c E_2'' = \frac{R}{2} \cdot$$

2. Fie O centrul cercului ABC. Se ştie că O, M_a, E_1 sunt colineare şi că figura $MOAE_1$ este un paralelogram cu centrul în M_a. Rezultă că M_a este mijlocul lui OE_1 şi că deci în triunghiul OE_1H, dreapta $M_a E_3$ unind mijloacele a două laturi este paralelă cu OH şi egală cu jumătate din OH. La fel se arată că

$$\overline{M_a E_3} = \overline{M_b E_3'} = \overline{M_c E_3''} = \frac{\overline{OH}}{2} \cdot$$



1°. S'au primit bune soluţiuni, dar mai puţin simple de la D-nii: P. V. CONSTANTIN (Lic. militar, Iaşi), E. M. DRAGOMIR (Lic. militar, Târgovişte), M. S. ROSENZWEIG (Lic. „Meşotă", Braşov) şi AL. D. COSTIN (Lic. militar, Tg.-Mureş).

2°. D-nii P. G. ŢOCU (Lic. militar, Cernăuţi), D. D. BOIANGIU (Lic. T. Severin) şi J. SEGAL (Student, Bucureşti) au dat bune soluţiuni analitice, dar prea complicate pentru o problemă aşa de simplă şi elementară.

3°. D-l J. SEGAL a trimis şi o foarte bună soluţie prin coordonate trilineare şi una prin coordonate izotrope.

Pentru coordonatele izotrope se poate consulta cu folos broşura *L'emploi des droites isotropes comme axes de coordonnées* par A. HAARBLEICHER, care a fost recenzată în *Gazeta Matematică*, Vol. XXXVII, pag 176.

G-L GH. B.

PROBLEMA 5283. *Să se arate că expresia*

$$\frac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha + \operatorname{cotg}\alpha}$$

are totdeauna o valoare pozitivă.

LT. IOAN C. SAVIN.

Soluția I-a dată de Maica GOGÂȚĂ DROSIDA (Cluj) și de D-nii: V. ALDEA (Târgoviște), I. ANDONIE (București), R. ANGHELICHI (Tg.-Mureș), C. BAKONYI (Timișoara), A. BERECHET (Târgoviște), D. DIACONESCU (București), EUGEN FILA și V. HERBEA (Cluj), ST. IONESCU (Cernăuți), S. LEIBOVICI, M. MOSCOVICI și I. PETRESCU (București), M. ROSENZWEIG (Brașov), M. TREFILOV (Brăila).

Expresiunea din enunț, se poate scrie succesiv:

$$E = \frac{\sin\alpha + \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\cos\alpha + \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\sin\alpha\left(1 + \dfrac{1}{\cos\alpha}\right)}{\cos\alpha\left(1 + \dfrac{1}{\sin\alpha}\right)} = \operatorname{tg}^2\alpha\,\frac{1+\cos\alpha}{1+\sin\alpha}. \quad (1)$$

Ținând seama de relațiile:

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad ; \quad 1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$$

expresiunea (1) se mai poate scrie:

$$E = \operatorname{tg}^2\alpha\,\frac{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}\right)} = \left[\frac{\operatorname{tg}\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)}\right]^2.$$

Expresiunea dată fiind un patrat perfect, rezultă că este totdeauna pozitivă, pentru oricare valoare a lui α.

Soluția II-a. Ținând seama de relațiunile:

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} \quad ; \quad \operatorname{tg}\alpha \quad \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} \quad (2)$$

expresiunea din enunţ se poate scrie:

$$E = \frac{\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} + \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} + \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \times \dfrac{\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)+\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}}{\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}}$$

$$= \frac{8\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\left(1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2}.$$

Expresiunea scrisă sub această formă, se vede uşor că este totdeauna pozitivă pentru oricare valoare a lui α.

Această soluţie este susceptibilă de următoarea generalizare:

Să se arate că dacă n, este un număr întreg şi pozitiv, expresiunea:

$$E = \frac{\sin^n\alpha \pm \operatorname{tg}^n\alpha}{\cos^n\alpha \pm \operatorname{cotg}^n\alpha} \tag{3}$$

are totdeauna o valoare pozitivă.

In adevăr ţinând seama de relaţiile (2) punând:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = t$$

expresiunea (3) devine:

$$E = \frac{\left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right)^n + \left(\dfrac{2t}{1-t^2}\right)^n}{\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)^n + \left(\dfrac{1-t^2}{2t}\right)^n} = \left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^n \frac{\dfrac{(1-t^2)^n+(1+t^2)^n}{(1-t^2)^n\ \ (1+t^2)^n}}{\dfrac{(2t)^n+(1+t^2)^n}{(2t)^n\ (1+t^2)^n}}$$

$$= \left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^{2n} \frac{(1-t^2)^n + (1+t^2)^n}{(2t)^n + (1+t^2)^n}.$$

Se observă că primul factor $\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^{2n}$ este totdeauna pozitiv, pentru oricare valoare a lui α şi pentru n, întreg.

Să arătăm că şi al 2-lea factor:

$$\frac{(1-t^2)^n + (1+t^2)^n}{(2t)^n + (1+t^2)^n}$$

este pozitiv pentru oricare valoare a lui α şi pentru n întreg şi pozitiv.

Numărătorul este pozitiv deoarece:

$$(1-t^2)^n + (1+t^2)^n = 2(1 + C_n^2 t^4 + C_n^4 t^8 + \ldots + t^{2n})$$

adică este suma a n numere pozitive.

Numitorul deasemeni este pozitiv deoarece:

$$(1+t^2) \geqslant 2t$$

cum:

$$1 + t^2 > 0$$

pentru oricare valoare a lui α şi pentru n întreg şi pozitiv rezultă imediat că:

$$(1+t^2)^n + (2t)^n > 0$$

oricare ar fi α, iar n întreg şi pozitiv.

Al 2-lea factor fiind deasemeni pozitiv, rezultă că întreaga expresiune este pozitivă.

Printr'un raţionament analog se demonstrează că:

$$\frac{\sin^n\alpha - \operatorname{tg}^n\alpha}{\cos^n\alpha - \operatorname{cotg}^n\alpha} > 0$$

pentru oricare valoare a lui α, iar n întreg şi pozitiv.

Observaţiuni.

1°. S'au primit 11 soluţii incomplecte.

2°. 36 corespondenţi, elevi ai unui liceu, au trimis o soluţie identică, de aceea nu le menţionăm numele aici.

LT. I. S.

PROBLEMA 5287. *Care sunt patratele de patru cifre scrise numai cu două feluri de cifre?*

I. IONESCU.

Soluție dată de D-nii: D. D. BOIANGIU (Liceul Traian, Turnu-Severin) și C. C. BAKONYI (Liceul Diaconovici Loga, Timișoara).

Fie a și b două cifre. Patratele ar putea fi de formele:

1) $aabb$, 2) $abab$, 3) $aaab$,

4) $aaba$, 5) $abaa$, 6) $baaa$

1. Patratul are rădăcina $\mathcal{M}\,11$, și deci ar putea fi 0, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99. Ridicându-le la patrat găsim o singură soluție:

$$88^2 = 7744.$$

2. Patratul este $ab \times 101$, și cum $ab < 101$, nu putem avea soluție.

3. Terminația ab poate fi 00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96. Cu aceste numere formăm numere de forma $aaab$ și extragem rădăcina lor patrată. Se găsesc trei soluții formale:

$$1^2 = 0001 \quad , \quad 2^2 = 0004 \quad , \quad 3^2 = 0009.$$

4. Cu aceleași terminații ca la (3), formăm numere de forma $aaba$. Printre ele nu se găsește nici un patrat perfect.

5. Numărul $abaa$ se termină cu două cifre identice. In aceste condiții, dela (3) se vede că sunt numai terminațiile 00 și 44. In primul caz $O b$ este terminația unui patrat și de aci soluțiile formale:

$$10^2 = 0100 \quad , \quad 20^2 = 0400 \quad , \quad 30^2 = 0900.$$

In al doilea caz apare numărul $4b\,44$. Rădăcina începe cu 6 sau 7 și se termină cu 2 sau 8. Nici unul însă din numerele 62, 68, 72, 78 nu are patratul său de forma $abaa$. Nu avem dar soluție în acest caz.

6. Terminația poate fi după (5) una din grupele 00 sau 44. Patratele ar putea fi de forma $b000$ sau $b444$. Primul dă soluția formală:

$$00^2 = 0000.$$

Pentru al doilea dăm valori lui b şi extragem rădăcina patrată. Găsim soluţia:

$$38^2 = 1444.$$

In definitiv, problema admite soluţiile 1444 şi 7744, precum şi soluţiile formale 0000, care cere însă $a = b$ şi 0001, 0004, 0009, 0100, 0400, 0900.

Soluţiile 1444 şi 7744, au fost găsite prin încercări directe sau prin căutarea în table de patrate de D-nii: C. C. MIHĂILESCU, V. G. BÂRLEA, SUHĂŢEANU, GH. TOPÂRCEANU, C. V. DIACONESCU, V. C. ROLEA.

EXERCIŢII

31. Se dă un paralelogram ABCD; din vârful C se coboară perpendicularele CF şi CE pe latura AB şi diagonala BD; să se stabilească relaţia:

$$\overline{BD}^2 - \overline{CD}^2 = BE \cdot \overline{BD} + \overline{BA} \cdot \overline{BF}.$$

TUDOR STOICESCU.

R. Din triunghiul BCD avem:

$$\overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 - 2\overline{BE} \cdot \overline{BD}. \qquad (1)$$

Ducem perpendiculara din B pe DC şi fie I piciorul ei; din acelaşi triunghiu avem:

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2\overline{CD} \cdot \overline{CH} \quad \text{însă} \quad \overline{CD} = \overline{AB}, \ \overline{CI} = \overline{FB}$$

şi deci în mărime şi în semn $\overline{IC} = \overline{BF}$ adică relaţia de mai sus devine

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + 2\overline{BA} \cdot \overline{BF}. \qquad (2)$$

Prin scăderea relaţiei (2) din relaţia (1) avem după reduceri şi simplificări relaţia din enunţ.

32. Dacă α este unghiul format de mediana AM a unui triunghiu dreptunghic, cu ipotenuza BC avem

$$2(b^4 + c^4) = a^4(\cos^2\alpha + 1).$$

F. TURTOIU.

R. Avem $\alpha = 2C$ (sau suplimentar); deci

$$\sin\alpha = \sin 2C = \frac{2bc}{a^2}$$

şi

$$\cos^2\alpha = 1 - 4\frac{b^2c^2}{a^4}$$

deci

$$a^4(1 + \cos^2\alpha) = 2(a^4 - 2b^2c^2) = 2(b^4 + c^4).$$

33. Fie A', B', C' picioarele bisectoarelor triunghiului ABC; dacă S_A este triunghiul cu vârful în A şi baza B'C', iar S_B, S_C analoagele lui şi S_I triunghiul A'B'C', să se demonstreze relaţia:

$$4S_A \cdot S_B \cdot S_C = s \cdot S_I^2.$$

TUDOR STOICESCU.

R. Observăm că

$$\frac{\overline{BA'C'}}{\overline{BCA}} = \frac{\overline{BA'} \cdot \overline{BC'}}{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}; \quad \text{insă} \quad \frac{\overline{BA'}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{BC}}{BA + AC}$$

sau: $\overline{BA'} = \dfrac{ac}{b+c}$ iar $\overline{BC'} = \dfrac{ac}{a+b}$;

prin urmare

$$\overline{BA'C'} = s \cdot \frac{ac}{(a+b)(b+c)} = S_B;$$

la fel vom avea:

$$\overline{CB'A'} = s \cdot \frac{ab}{(b+c)(c+a)} = S_C \quad \text{şi} \quad \overline{AC'B'} = s \cdot \frac{bc}{(c+a)(a+b)} = S_A.$$

Făcând produsul

$$(1) \qquad S_A \cdot S_B \cdot S_C = s^3 \cdot \left[\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right]^2;$$

se ştie însă că

$$\overline{A'B'C'} = S_I = s \cdot \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)};$$

(a se vedea de ex.: „Exercices de géométrie moderne", par G. PAPELIER, Tome I, pag. 122. Inlocuind în (1) avem relaţia din enunţ.

PROBLEME PROPUSE

5332. Care sunt patrulaterele inscriptibile într'un cerc ale căror laturi sunt laturi ale poligoanelor regulate convexe înscrise în cerc?

I. IONESCU.

5333. Să se găsească cifra n şi numărul N al cărui patrat se obţine scriind numerele $N \pm n$ unul după altul.

G-L GH. BUICLIU.

5334. Să se împartă un număr dat N în trei întregi x, y, z așa în cât produsul xyz sau suma $x^2+y^2+z^2$ să fie cât mai mare posibil.

Aplicație pentru N = 100; 101 și 102.

V. THÉBAULT.

5335. Să se demonstreze că ecuația

$$x^6+y^6=u^6+v^6$$

este imposibilă în numere întregi.

M. GHERMĂNESCU.

5336. Într'un triunghiu echilateral triunghiul median este echilateral și reciproc.

Cum trebue să fie un triunghiu pentru ca triunghiul ortic să fie echilateral?

Cum trebue să fie un triunghiu pentru ca triunghiul format de picioarele bisectoarelor să fie echilateral?

O. N. ȚINO.

5337. Se notează cu A', B', C' ortopolurile medianelor AA_1, BB_1, CC_1 ale triunghiului ABC față de acest triunghiu. Să se demonstreze:

1). Că segmentele AA', BB', CC' se exprimă în funcție de laturile și suprafața triunghiului ABC prin formulele

$$\overline{AA'}=la \quad ; \quad \overline{BB'}=mb \quad ; \quad \overline{CC'}=nc$$

unde

$$l=\frac{(3b^2+c^2-a^2)(3c^2+b^2-a^2)}{8S(2b^2+2c^2-a^2)}\,;\quad m=\frac{(3c^2+a^2-b^2)(3a^2+c^2-b^2)}{8S(2c^2+2a^2-b^2)}\,;$$

$$n=\frac{(3a^2+b^2-c^2)(3b^2+a^2-c^2)}{8S(2a^2+2b-c^2)}\,;$$

2). Că laturile a', b', c ale triunghiului A'B'C' și aria lui S' sunt date de formulele

$$a'^2=a^2+m^2b^2+n^2c^2-4(m+n)S+(b^2+c^2-a^2)mn$$
$$b'^2=b^2+n^2c^2+l^2a^2-4(n+l)S+(c^2+a^2-b^2)nl$$
$$c'^2=c^2+l^2a^2+m^2b^2-4(l+m)S+(a^2+b^2-c^2)lm$$
$$2S'=2(1+mn+nl+lm)S-(la^2+mb^2+nc^2).$$

D. V. IONESCU.

5338. Fie M un punct în planul unei conice circumscrisă unui triunghiu oarecare, iar A', B', C' intersecțiile unei drepte Δ, ce trece prin M, cu laturile BC, CA, AB.

A", B", C" fiind intersecția conicei cu dreptele AM, BM, CM, să se arate că dreptele A'A", B'B", C'C" se întâlnesc în același punct situat pe conica considerată.

VICTOR L. FLORESCU.

5339. Fie A', B', C' mijloacele segmentelor interceptate respectiv de perechile de laturi AB, AC; BC, BA; CA, CB ale unui triunghiu ABC pe o transversală Δ.

Să se arate că dreptele AA', BB', CC' sunt tangente la o conică circumscrisă triunghiului ABC.

LOCOT. I. GH. ZAMFIRESCU.

5340. O dreaptă variabilă trecând prin o, taie dreptele (m), (n), în m, n. Intersecția $p \equiv [(im), (jn)]$ descrie o conică (p), trecând prin i, j, $[(m), (n)]$, $[(oi), (n)]$, $[(oj), (m)]$.

Natura conicei (p) depinde de situația lui j în raport cu parabola (ω) înscrisă triunghiului format de (n), (oi), $(o\mu) \parallel (m)$ și a cărei axă are direcția dreptei ce unește pe i cu intersecția $[(m), (o\nu) \parallel (n)]$.

N. N. MIHĂILEANU.

5341. Un cerc (C) cu raza R are centrul C pe bisectoarea unghiului drept AOB. O tangentă variabilă la cercul (C) taie pe OA și OB în D și E. Să se afle, în coordonate carteziene și polare, locul descris de mijlocul lui DE, și să se construiască în cazul OC = 2R.

N. ABRAMESCU.

5342. Să se demonstreze că dacă ecuațiile algebrice de grad par

$$f_i(x) = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

admit numai rădăcini imaginare, atunci și ecuațiile de forma:

$$\Sigma \lambda_{hij\ldots} f_h(x) f_i(x) f_j(x) \ldots = 0$$

se bucură de aceeași proprietate, dacă parametrii $\lambda_{hij\ldots}$ sunt cantități nenegative.

G. G. CONSTANTINESCU.

5343. Să se desvolte în serie funcţia:

$$f(x) = \frac{2x^5 - 3x^4 - x^3 + 8x^2 - 10x + 5}{x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1}.$$

GH. TH. GHEORGHIU.

5344. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\sin\left(\frac{n-1}{3n}\pi + \frac{A}{n}\right)\sin\left(\frac{n-1}{3n} + \frac{B}{n}\right)\sin\left(\frac{n-1}{3n}\pi + \frac{C}{n}\right)$$

$$\leqq \sin\left(\frac{n\pi}{3n+3} + \frac{A}{n+1}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{3n+3} + \frac{B}{n+1}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{3n+3} + \frac{C}{n+1}\right),$$

unde A, B, C sunt unghiurile unui triunghiu oarecare şi n un întreg pozitiv.

LT. C. D. IONESCU-ŢIU.

5345. Două bare fără greutate alcătuesc un unghiu drept rigid AOB, ce se poate roti în jurul centrului O, fix, al unui cerc vertical de rază r.

Un inel D foarte mic, prin care trece atât cercul cât şi bara OA, este legat de un punct C, fix, al cercului (OC face 45° cu verticala în sus) cu un fir elastic, ce trage inelul cu o forţă proporţională cu lungimea lui. La capetele A şi B sunt atârnate respectiv greutăţile P şi Q.

Neglijând orice frecare se cere unghiul α făcut de OA cu verticala (în jos), în cazul echilibrului, precum şi reacţiunea din O.

GH. D. SIMIONESCU.

5346. O placă plană de formă oarecare se roteşte în planul său în jurul unui punct fix O.

La un moment dat se liberează punctul O fixându-se în acelaşi timp un alt punct O_1 al plăcii.

Să se determine locul geometric al punctului O_1 astfel ca după schimbarea legăturilor placa să aibă iuţeala nulă.

Aplicaţie: un triunghiu echilateral de latură a mobil în jurul unuia din vârfuri.

ALEXANDRU STOENESCU.

ERATĂ. La nota din josul paginei 525 se va înlocui XLIV prin XLV.

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Backonyi C. (5329); *Badea A. I.* (5329); *Bodnărescu M. H.* (5319, P); *Bojiu C. D.* (5299); *Cristea C.* (5185, 283); *Cruceru Gh. Const.* (5291, 99, 328, 29); *Diaconescu V. Const.* (5299, 303); *Eftimie D. C.* (5265, 82, 83, 90, 91, 307, 19, 21, 29); *Florescu I. B.* (P); *Gheorghiu E. Oct.* (5300, 19); *Gospodin Tudor* (5285, 97, 300, 01); *Holea Radu* (5260); *Ionescu Cicerone* (5260); *Iorgulescu N. Florin* (5328, 29); *Irimescu Paul* (5299); *Leibovici Sergiu* (5313, 19, 29); *Miroslav Tudorel* (5185, 305); *Moscovici E. N.* (5299, 329); *Niculescu C. Mircea* (5202, 06); *Petrescu Iulian* (5031, 166, 86, 215, 57, 90, 307, 19, 29, P); *Popa D. Mircea* (2647, 778); *Racoviceanu Gr. Vlad* (5282, 83, 99, 300); *Raicu S. Virgil* (5245); *Ripianu D-tru* (5292, 96, 301, 12, 16, 27); *Rosenzweig S.* (5319, 29); *Rusu L. M.* (3167, 4817, 985, 5218, 19, 85); *Sbârnea D. Gh.* (5265, 82, 83, 328); *Şenchi M. E.* (5329); *Ştefanovici I. Mircea* (5167, 257, 329); *Văduva F. M.* (5329).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică* Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*
Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 50 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa :

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon : 3-9803).

C. 65.390

1939-1940 complet.

CIII R 21

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLV

NUMĂRUL 12. — AUGUST 1940

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNEA" SIBIIU

SUMARUL

1. Observatorul astronomic Batthyanian din Alba Julia . . . . . *I. Ionescu.*
2. Despre o curbă specială . . . . . *A. Myller.*
3. Raport pentru decernarea premiului „Spiru Haret" . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
4. Note Matematice: 51 — 55.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 296.
7. Diverse.
8. Probleme rezolvate: 3096, 4226, 4474, 4970, 5201, 5207, 5240, 5257, 5259, 5269, 5310, 5315.
9. Exerciții: 34 — 37.
10. Probleme propuse: 5203, 5347 — 5361.
11. Tabla de Materii.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1940

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Comandor Dr. Inginer **I. Linteş**; **D. Stoica**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijă în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice.*

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1939 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 5184, 89, 93, 96, 97, 200, 04, 08, 11, 12, 20, 21, 25, 30, 37, 42, 48, 53, 70, 72, 77, 79, 86, 88, 89, 93, 94, 95, 98, 304, 06, 08, 09, 11, 14, 18, 20, 22, 23, 25, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 39, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

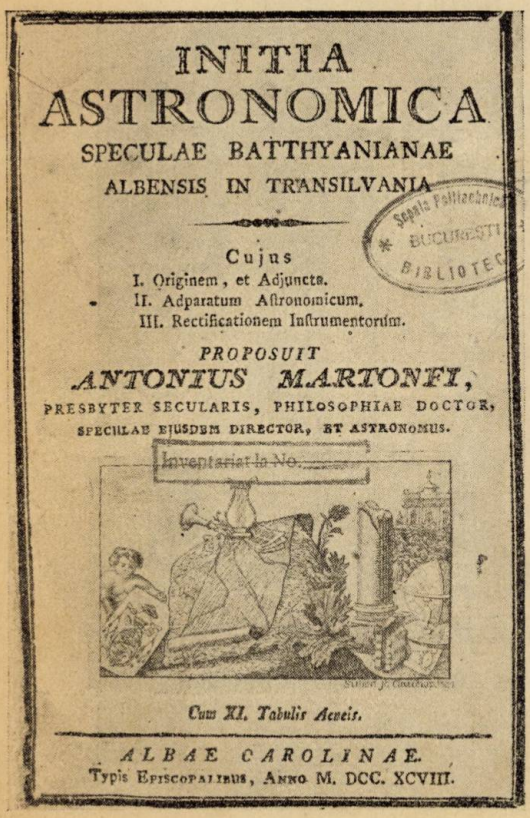
EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale,* Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

OBSERVATORUL ASTRONOMIC BATTHYANIAN DIN ALBA JULIA

In cursul anului trecut D-l Inginer O. PĂDURARU mi-a atras atenţiunea asupra unei cărţi din Biblioteca Şcoalei Politecnice REGELE CAROL II din Bucureşti, a cărei primă pagină are următorul coprins:

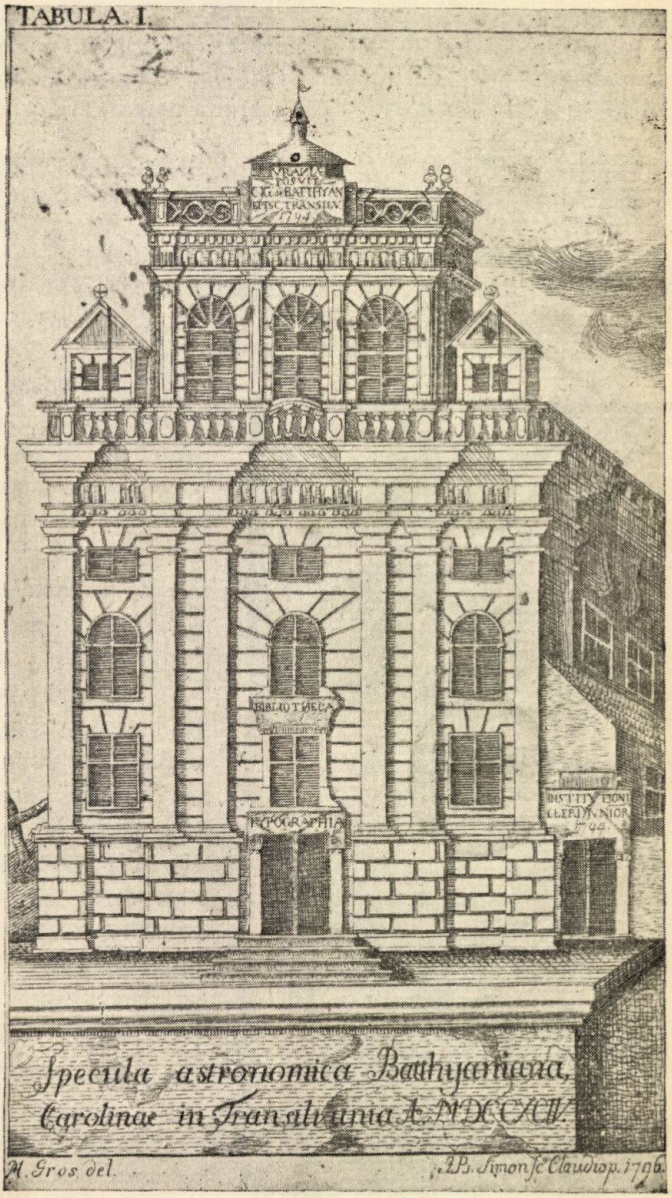
INITIA | A S T R O N O M I C A | SPECULAE BATHYANIANIAE | ALBENSIS IN TRANSILVANIA | *Cujus* | *I. Originem et Adjuncta.* | *II. Adparatum Astronomicum.* | *III. Rectificationem Instrumentorum* | *Proposuit.* | ANTONIUS MARTONFI, : *Presbyter Secularis, Philosophiae Doctor,* | *Speciilae Ejusdem Director, Et Astronomus.* | *Cum XI Tabulis Aeneis.* | *Albae Carolinae.* | *Typis Episcopalibus, Anno M.DCC.XCVIII.*


INITIA
ASTRONOMICA
SPECULAE BATTHYANIANAE
ALBENSIS IN TRANSILVANIA
Cujus
I. Originem, et Adjuncta.
II. Adparatum Aſtronomicum.
III. Rectificationem Inſtrumentorum.
PROPOSUIT
ANTONIUS MARTONFI,
PRESBYTER SECULARIS, PHILOSOPHIAE DOCTOR,
SPECULAE EJUSDEM DIRECTOR, ET ASTRONOMUS.
Cum XI. Tabulis Aeneis.
ALBAE CAROLINAE.
Typis Episcopalibus, Anno M. DCC. XCVIII.

Din această carte lipsea Tabela III, şi cum nu ştiam ce a devenit azi acest Observator astronomic, am pus în Volumul XLIV al *Gazetei Matematice* la pag. 530, *Cererea* No. 285 în care am reprodus, prin fotografie, titlul cărţii şi faţada observatorului aşa cum este dată în volumul tipărit la 1798, şi am cerut să mi se trimită o fotografie după planşa ce lipsea şi date asupra actualei clădiri. Acele clişee sunt reproduse aci.

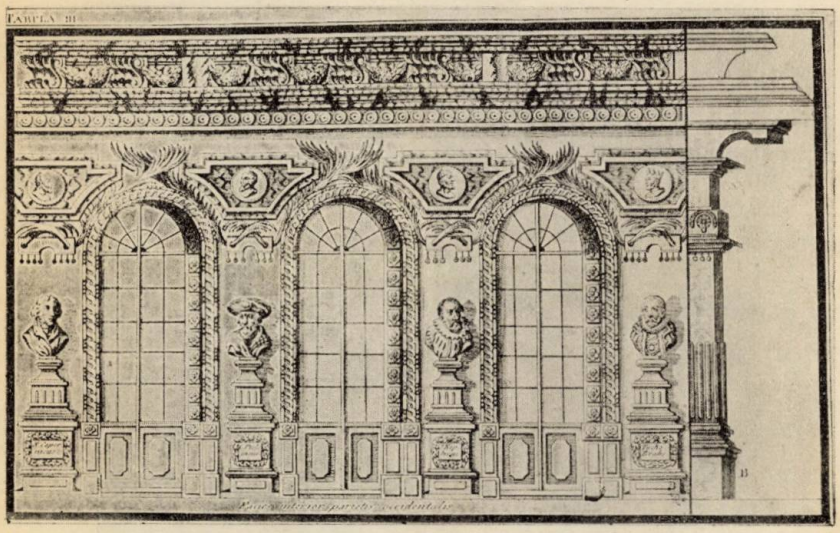
La această *Cerere* am primit două răspunsuri. Primul dela D-l VICTOR MARIAN, neobositul cercetător în domeniul istoriei

matematicilor la noi în ţară. D-sa mi-a comunicat că Biblioteca Universităţii din Cluj posedă două exemplare din cartea lui MARTONFI,



după care mi-a trimis şi o fotografie a planşei No. III, pe care

îl voiu alătura exemplarului Şcoalei Politecnice. Reproduc aci această planşă ca să se vadă cu ce bogăţie erau decorate sălile Observatorului şi anume peretele pe care erau puse busturile lui COPERNIC, PTOLEMEU, KEPLER şi TYCHO-BRAHE. Mai reproduc după două cărţi poştale, trimise de D-l V. MARIAN, vederea actuală exterioară a clădirii şi pe cea interioară a Bibliotecii actuale, care funcţionează în localul vechiului Observator. D-l V. MARIAN, care a vizitat acea Bibliotecă, spune că localul se găseşte azi aproape în starea în care erea când deservea Observatorul. Aparatele rămase sunt strânse într'un Muzeu; se arată vizitatorilor ca o curiositate linia

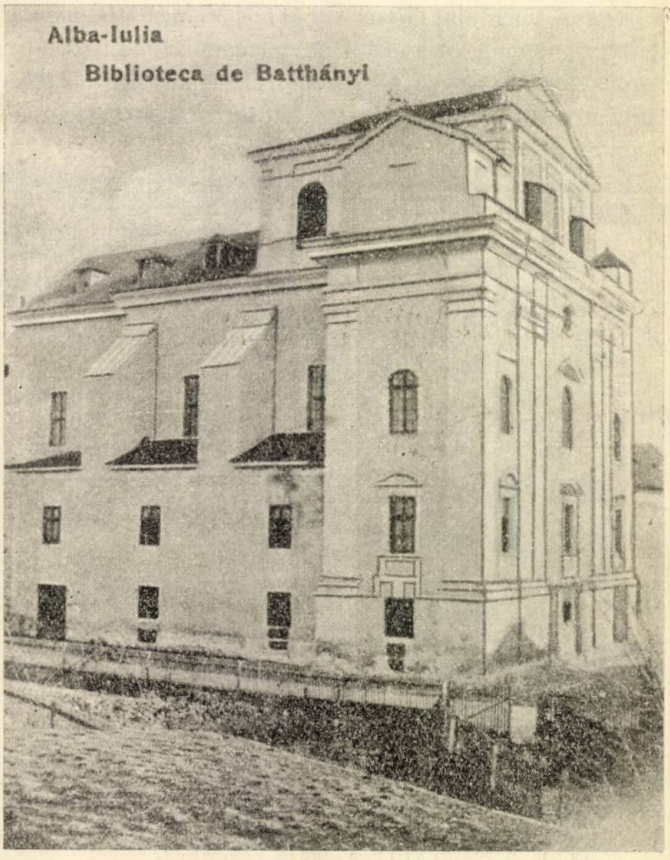


Sala Observatorului.

Meridianului şi pe terasa din dreapta un periscop de unde se vede cetatea Albei Juliei. In clădire se găsesc azi manuscrise vechi foarte interesante, printre care şi unul de geometrie de prin secolul XIV — XV.

D-l V. MARIAN a găsit că MARTONFI a fost profesor, la Alba Julia, de drept bisericesc dela 1782 la 1788. Observatorul a fost construit de Episcopul romăno-catolic BATTHYANY din Alba Julia şi era proprietatea Episcopiei; în el locuia şi Episcopul. Dânsul a trimis pe MARTONFI la Viena de a luat instrumentele astronomice dela un Colegiu Jesuitic desfiinţat şi le-a adus la Alba Julia,

cu care a făcut Observatorul punând pe MARTONFI Director. Acesta însă moare în 1799, fără a-şi fi putut forma un succesor în seama căruia să lase grija Observatorului şi de aceea acesta a funcţionat din ce în ce mai rău până la 1857 când s'a transformat în Muzeu şi Bibliotecă.



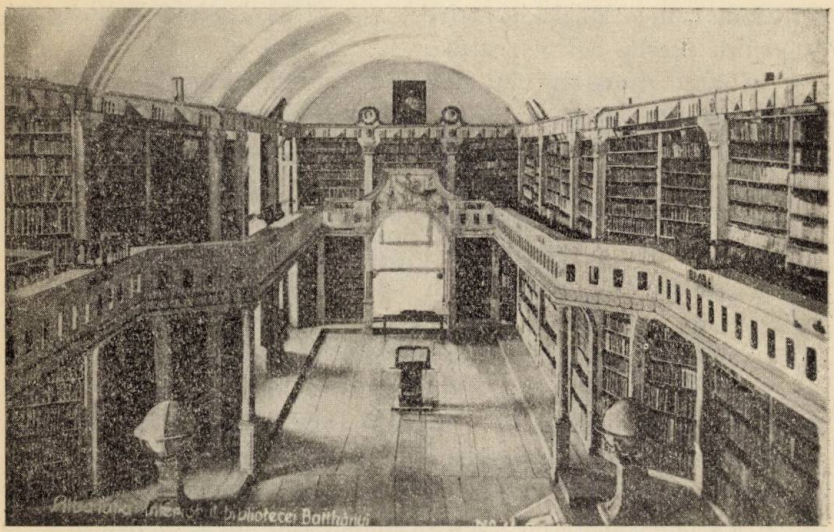
Vederea exterioară.

MARTONFI a fost elev al lui MAXIMILIAN HELL, astronom vienez şi frate cu Episcopul IOSIF MARTONFI, mort la 1815.

Un al doilea răspuns, la *Cererea* No. 285, mi-a fost trimis de D-l I. I. STAMATE, un harnic corespondent al *Gazetei Matematice,* Student la Universitatea din Cluj, — împreună cu două

fotografii scoase după unul din exemplarele dela Universitatea din Cluj (No. 36680) din Biblioteca „REGELE FERDINAND I".

Descrierea Observatorului publicată de ANTONIUS MARTONFI conţine 424 pagini încadrate cu două linii de grosimi diferite formând dreptunghiuri de 175 × 105. El începe cu o *Prefaţă* mare de 24 pagini, care mi-a fost tradusă în întregime de D-l NICODIM LĂCUSTEANU, renumit latinist al nostru şi fost profesor de limba latină în Bucureşti. Pentru munca şi buna voinţă ce a depus îi



Biblioteca actuală.

exprim şi pe această cale mulţumirile mele. Traducerea o voiu depune la Biblioteca *Gazetei Matematice*. Prefaţa începe cu cuvintele următoare:

„*Am dat acestei cărţi numele de* **Inceputurile astronomice,** *pentrucă acum de curând a apărut în Transilvania leagănul Astronomiei şi al studiilor noastre astronomice. Şi am mai numit-o* **Bathyniane,** *pentru că vreau să arăt că tot Institutul acesta cu anexele sale: clădirea, instrumentele, profesorii, ajutoarele, biblioteca, natura artistică a tutulor monumentelor, se datoresc lui* BATTHYIANIUS; *el le-a hrănit şi a avut grije, ca aceea ce a fost la început sub un bun auguriu, să ajungă la maturitate, pentru*

ca să-i fie spre veşnică pomenire, pentru dragostea lui de patrie şi de ştiinţă".

MARTONFI se războieşte apoi cu cei ce au criticat înfiinţarea Observatorului. El împarte judecăţile oamenilor în trei categorii. In prima clasă pune pe cei „*care primind dela Stat fructul meritelor sale, îl întrebuinţează pentru splendoarea şi binele ţării*". In a doua categorie pune pe cei din „*neamul cârtitorilor, care se mai numesc trăncănitorii în cât merită mai mult să fie despreţuiţi, de cât să fie certaţi cu multe vorbe.* In a treia categorie pune pe cei ce nu cunosc unele lucruri dar vor să se instruiască şi spune că pentru aceştia a scris cartea.

Autorul caută să arate rolul şi importanţa Astronomiei fără să critice celelalte ştiinţe. „*Folosul fiecăreia este preţios pentru ţară*". Arată rolul justiţiei, religiei, politicei, dar spune că dela mama lor astronomia a venit ideia de lege. Cosmografia arată starea întregii maşinării a lumii. Ea a înlăturat prejudecăţile, a arătat rolul globului nostru în Univers. Ce ar fi făcut geografia fără hărţile pe care a arătat astronomia cum se fac şi navigaţie prin darea de mijloace de a se dirija vasele de pe un punct la altul al pământului. Când nu vede nici un semn pe imensitatea apelor navigatorul îşi ridică ochii spre cer şi se îndreaptă. Busola a venit mult mai târziu şi nu are precizia ce o dă astronomia. Calendarul este opera astronomiei. Istoria şi-a corectat datele evenimentelor comparându-le cu anumite aparițiuni astronomice, ca eclipsele. Astronomia a eliminat din fizică fantasmagoriile. Ea a desfiinţat astrologia şi fleacurile ei magice. Laudă pe astronomi şi pe cei ce i-au ajutat şi încurajat.

MARTONFI laudă apoi pe BATTHYANUS care a înfiinţat Observatorul dela Alba Julia.

La finele prefaţei autorul anunţă ce cărţi are de gând să mai scrie. Al doilea volum zis *Bieniul astronomic* s'ar ocupa cu metodele observaţiilor astronomice. In *Trieniul astronomic* se vor face aplicaţiile la geometrie şi geografie. Aci mai spune: „*In această parte că-mi va fi cu putinţă să fac o delimitare exactă a Transilvaniei noastre*". Ar fi urmat *Quadrieniul astronomic* în care ar fi descris Cronologia sacră şi profană. In *Quinquieniul* astronomic s'ar fi coprins aplicaţiunile la navigaţiune. In fine în *Sexeniul astronomic* s'ar fi studiat fundamentele Filosofiei naturale. Aci urma să scrie şi rezultatele cercetărilor din Observatorul din Alba Iulia.

Restul cărţii coprinde trei părţi.

In partea I MARTONFI se ocupă de fondatorul Observatorului, astronomic IGNATIUS BATTHYANI, Episcop florentin ajuns la Alba Julia, şi de împrejurările în care a avut loc construcţia clădirei, despre locul unde a fost pusă, despre orizontul ei, despre soliditatea, comoditatea şi estetica ei.

In partea I se descriu aparatele Observatorului: gnomoane şi aplicarea lor, orologii, cuadrante, diviziunea cercurilor şi vernierele, micrometre diverse, cu descrierea părţilor lor, cuadrane murale, măsurarea înălţimilor, sectoare astronomice, telescoape, barometre, termometre, anemometre, etc.

In partea III se ocupă cu întrebuinţări diverse ale aparatelor cu verificarea şi rectificarea lor. Aci se dau şi exemple numerice pentru lămurirea regulilor date.

Cartea este însoţită de 11 planşe. Planşa I dă faţada Observatorului şi a fost reprodusă la *Cererea* Nr. 285; Planşa II dă planul distribuirii camerelor clădirii; planşa III e reprodusă aci; planşa IV dă interesantele picturi de pe pereţi în legătură cu astronomia, iar celelalte planşe au desemne de aparate şi instrumente, afară de planşa X pe care sunt şi figuri demonstrative.

Cartea este foarte interesantă căci ne arată cum se împlânta ştiinţa în ţinuturile româneşti încă înainte de secolul trecut.

I. IONESCU.

DESPRE O CURBĂ SPECIALĂ

Résumé. Equation et nouvelles propriétés de la courbe dont la longueur de la tangente est proportionnelle au segment intercepté par cette tangente sur l'axe Ox. La surface engendrée par cette courbe lorsque son plan tourne autour de Ox et qu'en même temps elle se transforme par homothétie.

GASTON JULIA, în *„Exercices d'Analyse“* tome III se ocupă de o curbă specială cu ocazia următorului problem. (Problème No. 3, p. 19).

Fiind dată o dreaptă şi un punct O pe dânsa, să se afle curbele cu proprietatea că luând un punct oarecare M pe una oarecare din ele, raportul distanţei MP a acestuia la dreapta dată

către distanţa OR a punctului la tangenta în M să fie constant oricare ar fi M pe curbă.

$$\frac{MP}{OR} = m.$$

In cele ce urmează e vorba de câte-va proprietăţi noi ale acestor curbe interesante, de ecuaţia lor polară şi mai ales de o suprafaţă formată cu ajutorul acestor curbe.

Dacă luăm dreapta dată ca Ox, punctul O ca origine, însemnăm cu T intersecţia tangentei în M cu Ox şi numim α unghiul xTM al axei Ox cu tangenta, avem

$$MP = MT \sin\alpha$$

$$OR = OT \sin\alpha.$$

Prin urmare

$$\frac{MT}{OT} = m. \tag{1}$$

Curbele din problema menţionată, pe care să le numim curbe J, pot fi deci definite şi prin proprietatea (1) de a avea lungimile tangentelor proporţionale cu tăieturile tangentelor pe Ox.

Prin punctele M să construim cercuri cu centrele în punctele T. Din cauza relaţiunii (1) e evident că locul extremităţilor diametrelor perpendiculare pe Ox e format de dreptele

$$y = \pm mx$$

şi toate aceste cercuri sunt tangente la dreptele

$$y = \pm \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}} x.$$

Deoarece MT e tangenta la curbă şi în acelaşi timp rază a cercului cu centrul în T, rezultă că curbele J sunt traiectoriile ortogonale ale cercurilor considerate.

Curbele J sunt toate homotetice între ele cu centrul de homotetie în O. In adevăr, dacă executăm o astfel de homotetie, cercurile considerate se schimbă unele cu altele şi prin urmare şi traiectoriile lor ortogonale.

Să însemnăm cu θ unghiul polar xOM şi cu ν unghiul razei vectoare cu tangenta. Având în vedere (1), rezultă din triunghiul OMT

$$\frac{\sin\theta}{\sin\nu} = m. \tag{2}$$

Numind ρ raza vectoare OM, înlocuind $\sin v$ cu valoarea lui în funcție de $\operatorname{tg} v$ și utilizând formula bine cunoscută

$$\operatorname{tg} v = \frac{\rho d\theta}{d\rho},$$

deducem din (2)

$$(3) \qquad \frac{d\rho}{\rho} = \pm \frac{\sqrt{m^2 - \sin^2\theta}}{\sin\theta} d\theta$$

care este ecuația diferențială a curbei J.

Integrarea, care se reduce la o cuadratură, se efectuează spre exemplu cu ajutorul substituției

$$\pm \frac{\sqrt{m^2 - \sin^2\theta}}{\cos\theta} = t$$

și se obține

$$(4) \quad \rho = \pm c \sqrt{\left(\frac{\pm\sqrt{m^2-\sin^2\theta} - m\cos\theta}{\pm\sqrt{m^2-\sin^2\theta} + m\cos\theta}\right)^m \left(\frac{\pm\sqrt{m^2-\sin^2\theta} + \cos\theta}{\pm\sqrt{m^2-\sin^2\theta} - \cos\theta}\right)},$$

unde cu c s'a însemnat o constantă arbitrară. Această formulă se mai poate scrie și astfel:

$$(5) \quad \rho = \pm c' \sqrt{\left(\frac{m\cos\theta \mp \sqrt{m^2-\sin^2\theta}}{m\cos\theta \pm \sqrt{m^2-\sin^2\theta}}\right)^m \left(\frac{\cos\theta \pm \sqrt{m^2-\sin^2\theta}}{\cos\theta \mp \sqrt{m^2-\sin^2\theta}}\right)},$$

unde

$$c' = c(-1)^{\frac{m+1}{2}}$$

și deoarece constanta c în (4) poate fi și imaginară, o pot alege în așa fel ca c' să fie o constantă arbitrară reală.

Ambele expresii (4) și (5), când considerăm c și c' reale, sunt ecuațiile polare ale curbelor J și, după cum vom vedea, (4) corespunde cazului $m > 1$, iar (5) cazului $m < 1$.

Dacă schimbăm θ în $-\theta$ în (4) sau (5), ρ nu se schimbă, deci curba e simetrică față de Ox.

Din cauza semnului $\pm$ dinaintea valorii lui ρ în (4) sau (5), reiese că curba e simetrică față de O. Prin urmare curba J e simetrică față de ambele axe.

Observăm că dacă în (4) sau (5) schimbăm semnul dinaintea lui

$$(6) \qquad \sqrt{m^2 - \sin^2\theta}$$

atunci ρ se transformă în $1/\rho$. Curba J are deci două ramuri ce se transformă una în alta prin inversiune.

Dacă schimbăm în (4) sau (5) m în $-m$, atunci ρ nu se schimbă. Deci e deajuns a considera cazul $m > 0$.

Pentru a obține forma curbelor J, se studiază pe rând în intervalul dela $\theta = 0$ la $\theta = \pi/2$ variațiile funcțiilor din parantezele de sub semnul radical, apoi variația lui v și în urmă se deduce variația lui ρ. E însă de observat că trebuesc deosebite două cazuri.

In cazul $m > 1$ funcțiunile din parantezele de sub semnul radical din formula (4) sunt pozitive, când θ variază între 0 și $\pi/2$ și deci ρ e real. Forma curbei e arătată de figura 1 și ecuația ei e dată de (4).

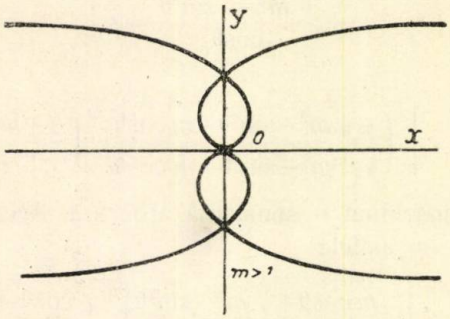


Fig. 1

In cazul $m < 1$ se consideră numai intervalul în care radicalul (6) e real, adică dela $\theta = 0$ la $\theta = \theta_0$, unde θ_0 e astfel că $\sin\theta_0 = m$. In acest interval funcțiunile din paranteze în formula (5) sunt pozitive, ρ e real și deci considerăm ecuația (5) ca fiind a curbei. Forma curbei e dată de figura 2.

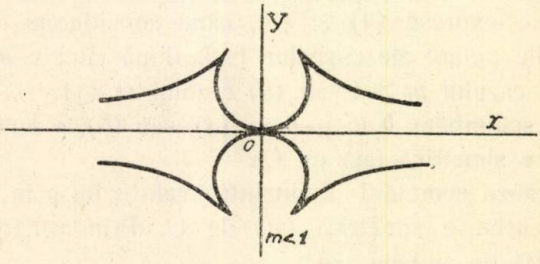


Fig 2

Să ne închipuim că planul curbei J se învârtește în jurul axei Ox și în același timp curba se transformă prin homotetie,

centrul de homotetie rămânând fix pe axă, iar coeficientul de homotetie schimbându-se după o lege dată arbitrar. Se naşte astfel o suprafaţă a cărei ecuaţie în coordonate sferice este

$$\rho = \varphi(\omega)\, f(\theta) \tag{7}$$

unde ω este longitudinea, θ colatitudinea, ρ raza vectoare, $f(\theta)$ membrul al doilea al ecuaţiei (4) sau (5), $\varphi(\omega)$ o funcţie arbitrară ce reprezintă coeficientul de homotetie.

Funcţia $\rho = \varphi(\omega)$ poate fi interpretată şi ca ecuaţia polară a unei curbe fixe directoare situată în planul ecuatorial $\theta = \pi/2$, care este întâlnită necontenit de curba J variabilă prin homotetie şi al cărei plan se învârteşte în jurul axei.

Suprafaţa (7) are proprietatea că taie planele prin axă (meridiane) sub un unghiu constant dealungul curbei de intersecţie.

Proprietatea se demonstrează, spre exemplu, diferenţiind (7) şi scriind rezultatul astfel:

$$\frac{\varphi f'}{\rho}\rho\, d\theta + \frac{\varphi' f}{\rho \sin\theta}\rho \sin\theta\, d\omega - d\rho = 0.$$

Cantităţile $\rho d\theta$, $\rho \sin\theta d\omega$, $d\rho$ reprezentând componentele unui segment infinitesimal PP' după cele 3 direcţii ale liniilor de coordonate sferice ce trec prin P, relaţiunea aceasta exprimă că toate segmentele PP' ce trec prin P şi aparţin suprafeţei (7) sunt perpendiculare pe segmentul de componente

$$\frac{\varphi f'}{\rho}\ ,\ \frac{\varphi' f}{\rho \sin\theta},\ -1$$

sau de componente proporţionale

$$\varphi f' \sin\theta\ ,\ \varphi' f\ ,\ -\varphi f \sin\theta$$

care determină, prin urmare, normala la suprafaţă. Dacă însemnăm cu α, β, γ unghiurile ce normala la suprafaţă face cu direcţiile celor trei linii de coordonate sferice, avem

$$\frac{\varphi f' \sin\theta}{\cos\alpha} = \frac{\varphi' f}{\cos\beta} = \frac{-f\varphi \sin\theta}{\cos\gamma} = \sqrt{\varphi^2 (f^2 + f'^2)\sin^2\theta + \varphi'^2 f^2},$$

de unde

$$\cos\beta = \frac{\varphi' f}{\sqrt{\varphi^2 (f^2 + f'^2)\sin^2\theta + \varphi'^2 f^2}}.$$

In virtutea ecuației (3), unde ρ trebue înlocuit cu f, avem

$$\frac{f'^2+f^2}{f^2}=\frac{m^2}{\sin^2\theta}$$

și deci

$$\cos\beta=\frac{\varphi'}{\sqrt{m^2\varphi^2+\varphi'^2}}.$$

Prin faptul că β reprezintă unghiul suprafeței cu planul meridian și e funcție numai de ω, proprietatea e demonstrată.

Această proprietate de a tăia planele meridiane sub unghiu constant este echivalentă, după teorema lui IOACHIMSTHAL cu aceea că curbele meridiane J sunt linii de curbură. Avem astfel un exemplu de suprafață cu linii de curbură asemenea între ele.

A. MYLLER.

Notă. După o indicație ce mi-a fost comunicată de D-l ILIE POPA, suprafața discutată în acest articol răspunde întrebării No. 1731 puse de D-l N. J. HATZIDAKIS (Athènes) în 1903 în „Intermédiaire des Mathématiciens“ (t. VII).

A. MYLLER.

RAPORT PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „SPIRU HARET“

Subsemnații, membrii în Comisiunea pentru premiul „SPIRU HARET“, cercetând ultimul volum al *Gazetei Matematice* dela 15 Septemvrie 1938 la 15 Septemvrie 1939, nu am găsit nici un articol și nici o notă de Mecanică.

In concluzie, conform articolului 4 al regulamentului premiului, decidem ca valoarea premiului să se adauge la premiul anului sau anilor următori.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „SPIRU HARET“

ING. CEZAR ORĂȘEANU, AL. I. STOENESCU, C-DOR ZAPAN.

Aprobat în ședința Adunării Generale dela 8.II.1940.

NOTE MATEMATICE

51. *Triunghiul Egiptian.* In tratatul „*Grandes Voûtes*", Vol. III, pag. 335 de PAUL SÉJOURNÉ, se dă numele de *triunghiu egiptian*, triunghiului dreptunghic cu laturile 3, 4, 5, pe care unii îl consideră de origină indiană. El servea în construcţiuni pentru a face bolţi ţuguiate, în felul următor. Se descrie un cerc O cu raza 3. Sub el se duce tangenta TAT', cu TA = TA' = 4 dela punctul de tangenţă T. Din A şi A' se descriu arce de cerc cu raza 8 până ating primul cerc. Distanţele OA = OA' sunt de lungimea 5. Raportul între săgeata şi deschiderea bolţii este astfel de 6/8 = 0,75.

Asemenea bolţi s'au găsit la mormintele lui RAMESSEUM din Egipt şi FIRUAZ-ABAD din Persia.

I. I.

52. *Curiozitate aritmetică.* Dacă se consideră numărul ciclic 142857 şi patratul curios

$$88^2 = 7744 = 7700 + 44$$

se observă că

$$(142857 \times 5 + 1) \times 7700 + 44 = 5500002200 + 44$$
$$= 5500002244 = 74162^2.$$

Acest patrat este primul patrat de forma *aabb... mmnn* în sistemul zecimal şi corelaţia între 88^2, numărul ciclic şi 74162^2 este destul de curioasă.

V. THÉBAULT.

53. *Asupra unei probleme de construcţie.* D-l G-l GH. BUICLIU a rezolvat pe cale analitică la pag. 473, Vol. XLIV, *Gazeta Matematică* următoarea problemă de construcţie:

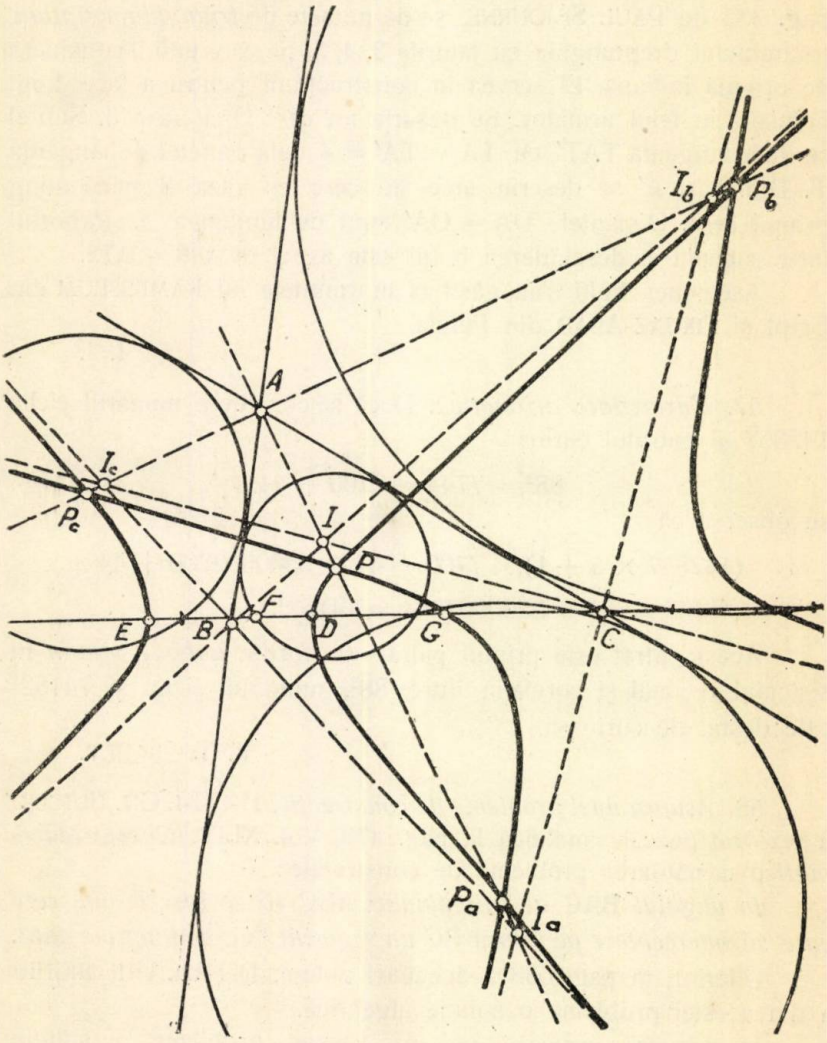
In unghiul BAC *al triunghiului* ABC *să se înscrie un cerc care să intercepteze pe latura* BC *un segment* FG, *de lungime dată.*

Ulterior, la pag. 638 a aceluiaşi volum, D-l AD. GHEORGHIU a dat acestei probleme o soluţie algebrică.

In cele ce urmează voi da acestei probleme o soluţie geometrică.

Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC, iar P şi ρ centrul şi raza cercului care determină pe BC coarda FG, de lungime dată $2l$.

Să căutăm deocamdată locul punctului P pentru care cercul (P) este tangent la dreapta AB şi interceptează pe BC segmentul FG de lungime $2l$.



Curba, loc al lui P, taie pe BC numai în două puncte D şi E, egal depărtate de B şi care se determină ducând paralele la AB la o depărtare l de B. Aceste puncte sunt poziţiile centrului P pe latura BC. Curba este deci o conică.

Depărtările lui P la AB şi BC sunt respectiv ρ şi $\sqrt{\rho^2 - l^2}$. Centrul cercului (P) nu poate fi deci pe bisectoarea unghiului ABC decât la infinit căci

$$\rho > \sqrt{\rho^2 - l^2},$$

iar raportul

$$\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - l^2}}$$

devine 1 numai pentru $\rho = \infty$.

Deducem că P descrie o hiperbolă echilateră având ca asimptote bisectoarele unghiului ABC.

La fel locul lui P pentru care cercul (P) este tangent la AC şi taie pe BC după un segment de lungime $2l$ este o hiperbolă echilateră având ca asimptote bisectoarele unghiului ACB.

Cele 2 hiperbole se taie în 2 puncte P, P_a pe bisectoarea interioară şi în două puncte P_b, P_c pe bisectoarea exterioară a unghiului A.

Vom avea 4, 3 sau 2 solutii după cum cele două hiperbole taie bisectoarea AI, sunt tangente la această bisectoară sau nu o întâlnesc deloc.

Construcţia punctelor P se poate face cu rigla şi compasul, pentru că se cunoaşte construcţia punctelor de intersecţie ale unei drepte cu o hiperbolă căreia i se cunosc asimptotele şi un punct. Dreapta este una din bisectoarele unghiului A, iar punctul cunoscut este D sau E.

Problema aceasta este un caz particular al problemei în care s'ar cere ca cercul (P) să determine pe laturile triunghiului ABC segmente de lungimi diferite $2l$, $2m$, $2n$.

In *Exercices de Géométrie* par F. G. M. septième édition, se indică la pag. 377 N. 881 că problema generală nu se poate rezolva cu rigla şi compasul, căci construcţia depinde de intersecţia a 3 hiperbole.

Când 2 segmente sunt egale între ele şi cercul (P) este tangent la una din laturi, una din hiperbole se reduce la două drepte.

Când cele 3 segmente sunt egale între ele, punctele P sunt chiar centrele cercurilor tritangente laturilor triunghiului ABC. Acest caz este tratat în *Exercices de Géométrie* par F. G. M., ediţia citată, la problema 221, Nr. 881.

G-L GH. I. POPESCU.

54. *Asupra unei ecuaţii funcţionale.* Ecuaţia funcţională

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\,\varphi(y)$$

studiată de D-l G. VAN DER LYN — Matematica, XVI, 91 — Mai poate fi soluţionată desvoltând în serie TAYLOR — după puterile variabilei y — funcţiunile ce depind de această variabilă.

Se obţin atunci condiţiunile

(1) $\qquad \varphi^{(2n+1)}(0)=0 \qquad$ pentru $n=0,1,2,\ldots$

(2) $\qquad f^{(2n)}(x)=f(x)\,\varphi^{(2n)}(0) \qquad$ pentru $n=0,1,2,\ldots$

Integrala comună ecuaţiilor diferenţiale (2) este de forma

$$f(x)=\alpha e^{kx}+\beta e^{-kx}$$

astfel încât rezultă relaţiunile

$$\varphi^{(2n)}(0)=k^{2n} \qquad \text{pentru } n=0,1,2,\ldots$$

care împreună cu (1) arată că trebue să avem

$$\varphi(x)=\frac{e^{kx}+e^{-kx}}{2}$$

constanta k putând fi reală sau imaginară.

G. G. CONSTANTINESCU.

55. *O problemă de construcţie* [1]). Se dă un triunghiu oarecare ABC. Se cere a se construi, cu linia şi compasul, cercul tangent laturilor AB şi BC, în care cele două coarde DE şi HK să fie egale una cu alta.

Să considerăm problema rezolvită. Coardele DE şi HK fiind egale una cu alta, perpendicularele OP şi OQ, coborîte pe ele din centrul O al cercului, sunt şi ele egale. Deci OP = OQ.

---

1) Această notă a fost trimisă ca problemă de propus, la 17 Iulie 1939. Nu s'a putut propune căci aceeaşi problemă fusese propusă de autorul ei în *Ştiinţă şi Progres* din Decemvrie 1938. Asupra acestei probleme de construcţie a se vedea soluţia şi generalizarea dată de D-l G-L GH. BUICLIU în *Gazeta Matematică*, Vol. XLIV, pag. 358.

N. R.

Ori, avem pe figură:

$$OP = AO \sin(A - \alpha)$$

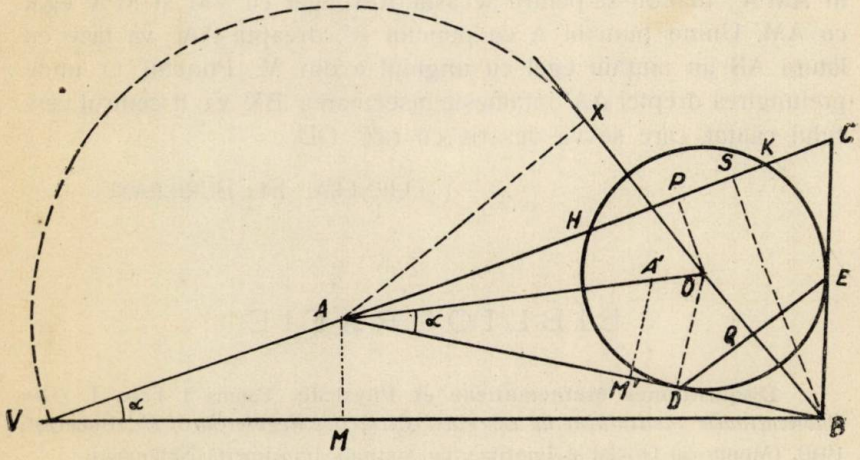
$$OQ = OD \sin\frac{B}{2} = AO \sin\alpha \sin\frac{B}{2}.$$

Aşa dar:

$$\sin(A - \alpha) = \sin\alpha \sin\frac{B}{2}$$

de unde:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin A}{\cos A + \sin\frac{B}{2}}. \qquad (1)$$



Pentru a construi unghiul α, observăm că însemnând prin c latura AB, putem scrie

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{c \sin A}{c \cos A + c \sin\frac{B}{2}}$$

şi ducând dreapta BS perpendiculară pe AC şi dreapta AX perpendiculară pe bisectoarea BX a unghiului din B, avem:

$$BS = c \sin A \quad ; \quad AS = c \cos A \quad ; \quad AX = c \sin\frac{B}{2}$$

deci:

$$tg\alpha = \frac{BS}{AS + AX} \quad \text{sau} \quad tg\alpha = \frac{BS}{VS}.$$

Punctul V se obţine dacă luăm AV = AX pe prelungirea laturei AC.

Aşa dar, unghiul α este egal cu unghiul din V al triunghiului dreptunghiu BSV.

Rezultă de aici urămătoarea construcţie grafică:

Din punctul A se coboară perpendiculara AX pe bisectoarea BX a unghiului din B. Pe prelungirea laturei AC se ia AV egal cu AX şi se uneşte punctul V cu punctul B. Se coboară perpendiculara AM pe VB şi se reproduce triunghiul dreptunghiu AVM în AM'A', luându-se pentru aceasta AM' egal cu VM şi M'A' egal cu AM. Unind punctul A cu punctul A', dreapta AA' va face cu latura AB un unghiu egal cu unghiul α din V. Punctul O unde prelungirea dreptei AA' întâlneşte bisectoarea BX va fi centrul cercului căutat, care se va descrie cu raza OD.

GENERAL ST. BURILEANU.

BIBLIOGRAFIE

Disquisitiones Mathematicae et Physicae. Tomus I. Fasc. I. *(Din Publicaţiunile Institutului de cercetări ştiinţifice Regele Carol II)*. Bucureşti 1940. (Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului. Imprimeria Naţională).

Scopul acestei publicaţiunii este arătat în primul articol scris de D-l VICTOR VÂLCOVICI pe care îl reproducem aci:

„Les publications de l'Institut de recherches scientifiques Regele Carol II".

„Il y a dix ans, le Roi Carol II a fondé l'Institut des recherches scientifiques de Roumanie qui porte Son nom. Par ce noble geste, et dès son avènement, Sa Majesté faisait connaître au pays l'importance que Son règne devait accorder au progrès des sciences positives en Roumanie".

L'Institut a eu cependant à lutter contre des difficultés d'ordre financier; aussi ces laboratoires commencent-ils seulement à s'organiser. Le laboratoire de Physique de Cluj — qui sera le centre permanent de l'Institut — est sur le point d'être achevé. Il en est de même des laboratoires d'aérodynamique et d'hydrodynamique de Ţigăneşti (Ilfov).

Cet Institut qui ne doit faire aucunement double emploi avec les institutions similaires appartenant aux universités ou aux écoles polytechniques roumaines, ouvrira les portes de ses laboratoires à tous les hommes de sciences afin que ceux-ci, quelque soit leur position universitaire, puissent y entreprendre ou y continuer leurs recherches scientifiques. Le comité de l'Institut décidera seulement au préalable si les recherches envisagées rentrent dans le cadre de travail de ces différents laboratoires.

Par les soins de l'Institut paraîtra une séries de publications scientifiques — **Publicaţiile Institutului de cercetări ştiinţifice Regele Carol II** — *(monographies, mémoires, periodiques ; seront donnés également les résultats des recherches effectuées dans les laboratoires de l'Institut).*

Nous sommes proposé, en particulier, de faire paraître deux publications périodiques différentes, correspondant aux divers aspects de l'activité de l'Institut : l'une consacrée aux sciences mathématiques et physiques, la seconde pour les autres sciences positives (chimie, minéralogie, biologie). Chacune comprendra quatre fascicules constituant un tome.

Le présent fascicule est le premier du périodique réservé aux sciences mathématiques et physiques : **Disquisitiones Mathematicae et Physicae.**

La publication de ce périodique étant assuré à Bucarest, le comité de rédaction qui a été constitué ne comprend que des mathématiciens résidant dans la Capitale roumaine. VICTOR VÂLCOVICI.

Comitetul de care se vorbeşte aci este constituit din D-nii : E. BADAREU, D. BARBILIAN, N. CIORĂNESCU, H. HULUBEI, M. NICOLESCU, O. ONICESCU, A. PANTAZI, D. POMPEIU, C. POPOVICI, S. STOILOV, V. VÂLCOVICI, N. VASILESCU-KARPEN, G. VRÂNCEANU. Cu administraţia se ocupă D-nii : E. BADAREU, N. CIORĂNESCU, H. HULUBEI, S. STOILOV, V. VÂLCOVICI, G. VRÂNCEANU. Secretari de redacţie sunt D-nii : C. IACOB, G. MANU şi S. ŢIŢEICA.

Numărul prezent conţine următoarele articole : Axiomatische Begründung des Abelschen Theorems im Grossen, de D. BARBILIAN. Des sous-ensembles sur lesquels une transformation continue d'un espace est transformation intérieure ou topologique, par S. STOILOV. La dérivée moyenne d'une fonction et certaines équations fonctionelles, par N. CIORĂNESCU. Notes sur les généralisations des fonctions convexes d'ordre supérieur (I), par T. POPOVICIU. Nouvelles recherches sur les fonctions polyharmoniques, par M NICOLESCO. De la définition du pôle en théorie des fonctions, par D. POMPEIU. Comportement asymtotique des chaînes à liaisons complètes, par O. ONICESCU et GH. MIHOC. Sur les espaces à connexion conforme, par G. VRÂNCEANU. Sur les petits mouvement des corps élastiques, par GR. C. MOISIL. Sur le mouvement d'un solide dans un milieu résistant, par V. VÂLCOVICI. Sur le coefficient de transmission d'une barrière de potentiel coulombien, par G. M. BADAREU. Les spectres d'absorbtion L et les niveaux caractéristiques de l'uranium, du platine et du tungstène, par YVETTE CAUCHOIS & IOANA MĂNESCU. Spectres X caractéristiques du polonium I, par E. HULUBEI & Y. CAUCHOIS. Etude du potentiel explosif dans les vapeurs d'hydrocarbures (II). Toluène, par E. BADAREU & L. CONSTANTINESCU.

Manuscrisele pentru Buletin se vor trimite D-lui G. VRÂNCEANU (Str. Pasteur 38 Bucureşti) sau D-lui N. CIORĂNESCU (Str. Buzeşti 100 Bucureşti) sau la Biblioteca Facultăţii de Ştiinţe din Bucureşti, Str. Poincaré 14.

Manuscrisele se pot redija în limbile engleză, franceză, germană sau italiană.

Această publicaţiune era necesară, căci actualele reviste de matematici şi de fizică nu mai erau suficiente pentru a face să apară repede lucrările oamenilor noştri de ştiinţă. Ea va împlini un gol ca acela semnalat la pag. 412 în *Nota matematică No. 30.*

Fiindcă din partea Comitetului de Redacţie mi s'a cerut să fac observaţiile şi sugestiile mele, exprim mai întâiu urări de durabilitate şi de prosperitate acestui nou organ al ştiinţei române. M'a impresionat însă rău faptul că în acest prim număr să nu găsesc nimic dela matematicianii români din Cluj, unde ni se spune că va fi un centru al Institutului şi aş dori apoi ca noua publicaţie matematică să fie *exclusiv* rezervată producţiunii ştiinţifice româneşti.

I. IONESCU.

Buletinul Societăţii Politecnice din România. Anul LIV. Nr. 6. Iunie 1940. Bucureşti. Construcţiunile şi apărarea pasivă de A. A. BELEŞ. Organizarea raţională a muncii pentru ameliorarea stării drumurilor de N. I. ODOBESCU. Tecnica apărării pasive de A. T. CIOCÂRLAN.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XX. Nr. 5. Iulie 1940. O clasă interesantă de trapeze de O. N. ŢINO. Funcţiuni pseudo-hiperbolice de E. VIŞA.

România Aeriană. Anul XIV. Nr. 5—6. Iunie 1940. Bucureşti.

MIHAIL ST. BOTEZ. *Asupra unor sume trigonometrice.* (Extras „Pitagora", V).

MIHAIL ST. BOTEZ. *O transformare birațională.* (Extras „R. M. T.", XX. Nr. 3).

MIHAIL ST. BOTEZ. *Sur le problème de la projection bicentrale dans un espace à quatre dimensions.*

IOAN CUREA. *Staţiunea seismică a observatorului astronomic din Cluj.* 1940.

GH. TH. GHEORGHIU. *Probleme de Analiza Matematică. Partea I.* (Editura autorului. Tip. lit. Mănciulescu. Bucureşti 1940). Un vol. de 300 pag. 200 lei.

Acum doi ani, D-l TH. ANGHELUŢĂ a publicat *prima* carte românească de probleme de matematici superioare (Analiză, Mecanică Raţională, Teoria funcţiunilor). Cartea aceasta e menită să aducă cele mai mari foloase studenţilor şi desvoltării studiilor matematice la noi. Ea începe dela *Calculul integral,* lăsând la o parte calculul diferenţial.

D-l GH. TH. GHEORGHIU ne dă acum o culegere de probleme din *elementele* calculului diferenţial: şiruri şi limite (18 prob.) serii (46 prob.) derivate şi diferenţiale (70), desvoltări în serii (43), forme nedeterminate (23), variaţii de funcţii (26), schimbări de variabile (12). In total 238 de probleme, luate în parte din cartea de Calcul Diferenţial a profesorului A. ANGELESCU şi din culegerile lui AUBERT şi PAPELIER, FRENET, GRANVILLE, HAAG şi TISSERAND. Multe exemple sunt din domeniul trigonometriei, unde autorul a lucrat intens în ultimii ani, cu ocazia redactării ediţiei a doua a Culegerii lui V. CRISTESCU, pe care a mărit-o şi transformat-o. Fiecare capitol e precedat de indicaţii teoretice. Problemele sunt însoţite de soluţiile amănunţite. Notez aplicaţiile teoremii lui CESARO, ale criteriului lui RAABE şi DUHAMEL pentru serii, desvoltările în serie TAYLOR.

In privinţa scrierii, autorul însemnează *logn* logaritmul neperian (pag. 2) pentru a reveni mai departe la notaţia obicinuită *log*. De asemeni, eu n'aş fi scris $(1/n)$ în loc de $\frac{1}{n}$, etc.; se realizează o economie de spaţiu, dar scrierea e mai complicată.

Cartea D-lui GH. TH. GHEORGHIU este de folos auditorilor cursurilor de matematici generale şi de analiză matematică ale Universităţilor, Şcoalelor Politecnice şi Militare. Ea înlocueşte cu succes culegerile străine similare.

P. SERGESCU.

P. LEVY. *Théorie de l'addition des variables aléatoires.* Paris, Gauthier-Villars.

Aceasta este prima fascicolă din monografiile asupra calculului probabilităţilor, publicate sub direcţia D-lui E. BOREL. Autorul a conceput-o, după ce D-l H. CRAMER, punând într'o nouă lumină legea lui GAUSS demonstrând teorema: *„Dacă suma a două variabile aleatorii, independente una de alta, depinde de legea lui* GAUSS, *fiecare din ele depinde de o lege de tip* GAUSS, *generalizată"*, făcea posibil un nou mod de expunere al rezultatelor în domeniul variabilelor aleatorii, utilizând — cu deosebire — noţiunea de funcţie caracteristică.

Primele patru capitole sunt pregătiri ale teoremelor relative la legea lui GAUSS. In capitolele VI—IX se studiază seriile cu termeni aleatorii independenţi, legile indefinit divizibile şi legile stabile, sume de variabile neindependente, aportul D-lor KHINTCHINE şi KOLMOGOROFF fiind foarte important. Unele rezultate ale D-lor sunt aici întâi publicate. Şi astfel acest volum urmează scopului colecţiei aducând rezultatele ultime din calculul probabilităţilor.

C. IONESCU-BUJOR.

CERERI

296. In *Comptes-rendus des Séances de l'Academie des Sciences din Paris*, 1863 I, pag. 59 se găseşte următoarea notiţă:

„M. ARGENTI, *dans une lettre écrite de Bucharest, exprime le désir de soumettre à l'Académie des recherches de géométrie dont il indique le sujet.*

Renvoi à l'examen de M. SERRET, *qui jugera s'il à lieu d'encourager l'auteur à envoyer son travail*".

Apoi în aceeaşi publicaţie din 1864 I, pag. 834:

„M. ARGENTI *adresse de Bucharest les ennoncés de divers théorèmes de géométrie dont il offre d'adresser plus tard les démonstration si l'Académie les juge dignes d'intérêt*".

Aceste teoreme nu au mai apărut.

Ce se ştie despre acest „ARGENTI".

FLORICA CÂMPAN
(Iaşi).

Răspuns la Cererea No. 285.

Răspunsul la această cerere este cuprins în articolul „*Observatorul astronomic Batthyanian din Alba-Iulia*" publicat în acest număr.

I. I.

Răspuns Cererii No. 293.

Revista « *Curierul Matematic* » a apărut la 1 Martie 1925 din atmosfera matematică realizată de D-l Profesor MIHAIL GHERMĂNESCU la liceul Cantemir-Vodă din Bucureşti.

Exista înainte de apariţia acestei reviste o societate matematică la liceul Cantemir-Vodă; *Curierul Matematic* nu a fost decât o extindere a preocupărilor societăţii. Conducerea primului an al *Curierului Matematic* au avut-o: regretatul NICOLAE BOTEA, D-l Ing. OVIDIU BOLGIU, atunci elevi ai clasei VII-a, D-l Ing. I. FÂNTÂNEANU, fost elev al Liceului Cantemir şi — la aceea dată — elev inginer, partea materială fiind încredinţată D-lui L. BRÜLL.

In anul al doilea se adaugă conducerii revistei D-l Ing. ION C. VASILIU, atunci elev în clasa VIII-a al liceului din Bacău şi subsemnatul, elev în clasa VII-a la liceul Cantemir-Vodă; iar în anul următor sunt asociaţi conducerii alţi doi elevi ai clasei VII-a a liceului Cantemir. D-l Ing. D. NESTOR şi fratele meu, ANDREI IONESCU-BUJOR.

Scopul revistei noastre era crearea unei legături directe, crearea unei atmosfere continui matematice între studenţi şi elevii liceului.

Acest scop a fost atins prin colaborarea studenţilor. Astfel au publicat în *Curierul Matematic* articole, note, probleme D-nii: TIBERIU POPOVICIU, N. TEODORESCU, CĂP. M. FOCŞENEANU (atunci sublocotenent), EMIL ŞTEFĂNESCU, MICU GRÜMBAUM — regretatul N. SEGĂRCEANU şi membrii redacţiei.

Scopul a fost atins şi prin menţinerea revistei în lumea liceului, urmărind însă o cât mai largă şi definitivă depăşire a programului de matematici al liceului real.

Pentru a se vedea spiritul în care se lucra, voiu cita articolele D-lor: Prof. M. GHERMĂNESCU: O clasă de polinoame ortogonale, Asupra unei Configuraţii de triunghiuri omologice;

TIBERIU POPOVICIU: Asupra formulei binomului şi a factorialei, Asupra seriei hipergeometrice, Generalizarea unui determinant funcţional, Asupra unor determinanţi şi ecuaţiile lor caracteristice, Asupra curbelor plane, Substituţiunile lineare şi un sistem de ecuaţii funcţionale;

CĂP. M. FOCŞENEANU: Asupra ortopolului, etc. cum şi articolele lui NICOLAE BOTEA arătate în necrologul apărut în *Gazeta Matematică* Vol. 43.

Curierul Matematic şi-a încheiat apariţia la 15 Februarie 1928, în anul când o reformă a învăţământului secundar desfiinţa liceul real.

Până atunci apăruse lunar, fiecare număr având 16 pagini (excepţional au apărut şi numere mărite) şi materialul distribuit în rubrici după modelul *Gazetei Matematice*. Revista apărea litografiată. Primul volum a fost scris de D-l L. BRÜLL. Volumul II şi primele 6 numere din Vol. III au fost scrise de mine, ultimele numere de fratele meu şi de D-l I. C. VASILIU. Imprimarea se făcea la o litografie, lângă podul Elefterie. Astăzi casa scundă, în care plutea praf fin de talc, este dărâmată.

Curierul Matematic a însemnat cristalizarea necesară a unui entuziasm pentru ştiinţele matematice, ce trecea limitele obişnuite, realizat de minunatul animator Prof. M. GHERMĂNESCU, susţinut lunar de *Gazeta Matematică* şi de solemnitatea înălţătoare a Concursurilor ei anuale.

Dintre acei care au pus din sufletul şi din viaţa lor în această construcţie „*Curierul Matematic*", trei nu mai sunt: NICOLAE BOTEA, NICOLAE SEGĂRCEANU şi ANDREI IONESCU-BUJOR.

Curierul Matematic se poate găsi la Biblioteca Academiei Române, la Biblioteca Fundaţiei Carol sau la Biblioteca *Gazetei Matematice*.

C. IONESCU-BUJOR.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

BOGDAN G. IONESCU. Geometria elementară pentru Clasa II-a secundară. Bucureşti 1901.

BOGDAN G. IONESCU. Geometria elementară pentru Clasa III-a secundară Bucureşti 1901.

Donate de D-l I. IONESCU, Inginer.

C. ALASIA. Polygeometrognomia generale e la geometria noneuclidea del CHRYSTAL. 1902.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

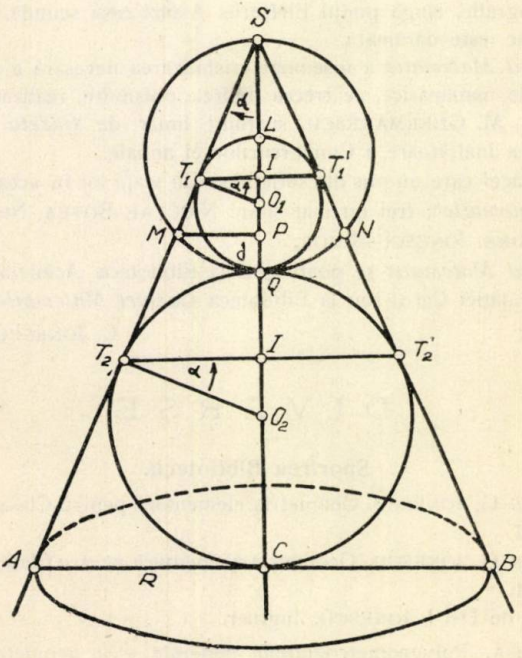
PROBLEMA 3096. *Se dă un con drept* SAB, *înălțimea sa este* SC. *Se duce sfera* O, *care trece prin* S, *are centrul pe* SC *și detașează din con un volum egal cu* $\frac{1}{3}\pi a^3$.

Fie O_1, O_2 *cele două sfere tangente conului* S *și sferei* O. *Să se găsească razele acestor sfere și volumul cuprins între con, sfera* O_1 *și sfera* O_2.

D. V. IONESCU.

Soluție dată de D-l I. I. STAMATE (Student, Cluj).

Fie M și N intersecțiile generatoarelor SA și SB cu sfera O, P proecția lui M pe SC și Q intersecția înălțimei SC cu sfera O.



Notăm cu

$r = OS = OM = OQ$, $x = OP$, $y = MP$, $R = AC$, $G = AS$, $H = AC$.

Din triunghiul dreptunghic OMP avem

$$y^2 = r^2 - x^2,$$

iar din triunghiurile asemenea SMP și SAC scoatem

$$\frac{MP}{AC} = \frac{SP}{SC} \quad \text{sau} \quad \frac{y}{R} = \frac{r+x}{H}.$$

Se observă că

$$Vol.\ SMQN = Vol.\ SMN - Vol.\ MON + Vol.\ OMQN$$

sau

$$\frac{1}{3}\pi a^3 = \frac{1}{3}\pi y^2 (r+x) - \frac{1}{3}\pi x y^2 + \frac{2}{3}\pi r^2 (r-x)$$

$$\therefore \quad a^3 = ry^2 + 2r^2 (r-x).$$

Astfel că între necunoscutele x, y, r, avem următoarele trei relațiuni

(1) $$r^2 - x^2 = y^2$$

(2) $$R(r+x) = Hy$$

(3) $$ry^2 + 2r^2 (r-x) = a^3.$$

Pentru a găsi expresia lui r, eliminăm pe x și y din aceste relațiuni.

Impărțind pe (1) prin (2), ridicat la patrat, avem

(4) $$\frac{r-x}{r+x} = \frac{R^2}{H^2}$$

$\therefore$ (5) $$r+x = \frac{2rH^2}{G^2} \quad \text{și} \quad r-x = \frac{2rR^2}{G^2}$$

căci $R^2 + H^2 = G^2$. Inmulțind relațiile (5), membru cu membru și ținând seamă de (1), găsim

(6) $$\frac{4r^2H^2R^2}{G^4} = y^2.$$

Inlocuind pe $r-x$ din (5) și pe y^2 din (6) în funcție de r în relația (3), se obține fără ambiguitate următoarea expresie a lui r:

(7) $$\boxed{r = a\sqrt[3]{\frac{G^4}{4R^2(H^2+G^2)}}}.$$

Pentru a determina expresiunile razelor r_1 şi r_2 ale sferelor de centre O_1 şi O_2, tangente interior şi exterior sferei $O(r)$ şi conului SAB, să notăm cu T_1 şi T_1', T_2 şi T_2' punctele de tangenţă ale sferelor $O_1(r_1)$ şi $O_2(r_2)$ respectiv cu generatoarele SA şi SB, iar cu L intersecţia sferei $O_1(r)$ cu SC şi fie α unghiul ASC.

Se observă că

$$SO_1 + r_1 = 2r. \tag{8}$$

Dar din triunghiul dreptunghic ST_1O_1, avem

$$r_1 = SO_1 \sin\alpha$$

care dus în (8) dă

$$\boxed{r_1 = \frac{2r\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}. \tag{9}$$

Analog se obţine

$$\boxed{r_2 = \frac{2r\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}. \tag{10}$$

In expresiunile lui r_1 şi r_2 din (9) şi (10), r are valoarea dată de (7).

Volumul cuprins între con, sfera $O_1(r_1)$ şi sfera $O_2(r_2)$ este

$$\vartheta = Vol.\ ST_2QT_2' - Vol.\ ST_1O_2T_1'.$$

Dar

$$Vol.\ ST_2QT_2' = Vol.\ ST_2T_2' + Vol.\ T_2O_2T_2' - Vol.\ T_2QT_2'Q_2$$

$$\therefore\quad Vol.\ ST_2QT_2' = \frac{\pi r_2^3}{3}\,\frac{\cos^4\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\pi r_2^3}{3}\cos^3\alpha\sin\alpha - \frac{2\pi r_2^3}{3}(1-\sin\alpha)$$

sau

$$Vol.\ ST_2QT_2' = \frac{\pi r_2^3}{3}\,\frac{(1-\sin\alpha)^2}{\sin\alpha}.$$

In mod analog se găseşte că

$$Vol.\ ST_1QT_1' = \frac{\pi r_1^3}{3}\,\frac{(1+\sin\alpha)^3}{\sin\alpha}.$$

Inlocuind pe r_1 şi r_2 cu expresiile (9) şi (10) se găseşte

$$\partial = \frac{8\pi r^3}{3}\left[\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{1+\sin\alpha}\right]$$

$$\therefore \qquad \boxed{\partial = \frac{4\pi r^3}{3} \cdot \frac{4\sin^3\alpha}{\cos^2\alpha}}$$

adică *volumul cerut este egal cu volumul sferei de diametru* SQ, *înmulţit cu factorul* $\frac{4\sin^3\alpha}{\cos^2\alpha}$.

Exemple. 1°. Dacă $\alpha = 30^0$ atunci

$$\frac{4\sin^3\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{2}{3}$$

şi deci volumul cuprins între con şi cele două sfere tangente conului şi sferei O, este egal cu $\frac{2}{3}$ din volumul sferei O.

2°. Dacă $\alpha = 33^0\,46'\,4''$ atunci

$$\frac{4\sin^3\alpha}{\cos^2\alpha} = 1$$

şi deci volumul precedent este egal chiar cu volumul sferei O.

PROBLEMA 3396. *Fie* φ *punctul lui* FEUERBACH *al unui triunghiu oarecare* ABC. *Notaţiile fiind cele obicinuite, să se demonstreze relaţiile:*

$$4\left(\overline{\varphi A}^2 + \overline{\varphi B}^2 + \overline{\varphi C}^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{R}{R-2r}\right.$$

$$[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\,(b-c)^2\,\overline{\varphi A}^2 + (c-a)^2\,\overline{\varphi B}^2 + (a-b)\,\overline{\varphi C}^2$$
$$= (b-c)^2\,(p-a)^2 + (c-a)^2\,(p-b)^2 + (a-b)^2\,(p-c)^2.$$

V. CRISTESCU.

1. Folosind relaţiile date de D-l V. THÉBAULT în articolul „*Sur les points de* FEUERBACH“ publicat în G. M. XXXIX, pag. 42, care dau distanţele punctului φ la vârfurile triunghiului ABC, anume:

$$\overline{\varphi A}^2 = \frac{2R\,[bc - r\,(4r+r)] - (b^2+c^2-a^2)\,r}{2\,(R-2r)} \qquad (1)$$

(celelalte deducându-se prin permutări circulare asupra literelor a, b, c), avem:

$$4\Sigma\overline{\varphi A}^2 = \frac{R}{R-2r}[4\Sigma ab - 48Rr - 12r^2] - \frac{2r}{R-2r}\Sigma a^2; \quad (2)$$

dar

$$\Sigma a^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr, \quad (3)$$

deci

$$4\Sigma\overline{\varphi A}^2 = \frac{R}{R-2r}[4\Sigma ab + 6\Sigma a^2 - 12p^2] - \frac{2r}{R-2r}\Sigma a^2. \quad (4)$$

Observăm încă, că:

$$4p^2 = (\Sigma a)^2 = \Sigma a^2 + 2\Sigma ab,$$

relația (4) devine:

$$4\Sigma\overline{\varphi A}^2 = \frac{R}{R-2r}(3\Sigma a^2 - 2\Sigma ab) - \frac{2r}{R-2r}\Sigma a^2 =$$

$$= \frac{R}{R-2r}(2\Sigma a^2 - 2\Sigma ab) + \frac{R-2r}{R-2r}\Sigma a^2 =$$

$$= \frac{R}{R-2r}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a^2] + \Sigma a^2. \quad (5)$$

2. Pentru a stabili a doua relație cerută de problemă, observăm în primul rând că transformând relația (1) cu ajutorul relației (3), avem succesiv:

$$\overline{\varphi A}^2 = \frac{R}{4(R-2r)}(b+c-a)^2 - \frac{r}{2(R-2r)}(b^2+c^2-a^2) =$$

$$= \frac{R-2r}{4(R-2r)}(b+c-a)^2 + \frac{r}{2(R-2r)}[(b+c-a)^2 - b^2 - c^2 + a^2] =$$

$$= (p-a)^2 + \frac{2r}{2(R-2r)}(a-b)(a-c),$$

deci

$$\boxed{\overline{\varphi A}^2 = (p-a)^2 + \frac{r}{R-2r}(a-b)(a-c)} \quad (6)$$

și analoagele ei.

Din relaţiunile (6) deducem imediat:

$$\Sigma (b-c)^2 \overline{\varphi A}^2 = \Sigma (b-c)^2 (p-a)^2 + \frac{r}{R-2r} \Sigma (a-b)(a-c)(b-c)^2 =$$

$$= \Sigma (b-c)^2 (p-a)^2 + \frac{r(a-b)(a-c)(b-c)}{R-2r} \Sigma (c-b),$$

dar

$$\Sigma (c-b) = 0,$$

deci

$$\Sigma (b-c)^2 . \overline{\varphi A}^2 = \Sigma (b-c)^2 (p-a)^2. \qquad (7)$$

3. Relaţia (6) are tot ca o consecinţă imediată şi alte relaţii interesante. Astfel avem:

$$\Sigma a(b-c)^2 \overline{\varphi A}^2 = \Sigma a(b-c)^2(p-a)^2 + \frac{r}{R-2r} \Sigma a (a-b)(a-c)(b-c)^2$$

$$= \Sigma a(b-c)^2(p-a)^2 + \frac{r}{R-2r} (a-b)(b-c)(c-a) \Sigma a (c-b),$$

dar

$$\Sigma a (c-b) = 0,$$

deci

$$\Sigma a (b-c)^2 \overline{\varphi A}^2 = \Sigma a (b-c)^2 (p-a)^2. \qquad (8)$$

Din (7) şi (8) se deduce imediat:

$$\Sigma (p-a)(b-c)^2 \overline{\varphi A}^2 = \Sigma (b-c)^2 (p-a)^3. \qquad (9)$$

A demonstrat relaţiile cerute de enunţ cu ajutorul relaţiilor (1) D-l DORIN N. TEODORESCU (Lic. Militar „N. Filipescu" Mănăstirea Dealu). D-l ION C. VASILIU (pe când era Sergent în Artilerie) a trimes o soluţie independentă de relaţia (1), directă, folosind relaţia generală:

$$\Sigma \overline{MA}^2 + \Sigma a^2 = 4 \Sigma \overline{M_1 A}^2,$$

unde M_1 este complementarul punctului M oarecare din planul triunghiului ABC şi particularizând pentru cazul când M_1 este chiar punctul φ al lui FEUERBACH.

Observare. **a)** Se vede din demonstraţia dată, că relaţiile cerute de problemă sunt consecinţe imediate ale relaţiilor (1) şi aceasta probează că ele fusese stabilite de Ing. VASILE CRISTESCU la epoca propunerii problemii

(An. 1924); D-l V. THÉBAULT a publicat aceste relaţii cu mulţi ani după această dată. Socotim ca o scăpare din vedere sau neobservare faptul că D-l THÉBAULT nu menţionează faptul observat mai sus.

b) Indrumăm pe corespondenţii noştrii să citească şi soluţia problemii *2760*, propusă tot de V. CRISTESCU, publicată în G. M. Vol. XXVIII, pp. 224—228 unde autorul ei dă indicaţii bibliografice interesante în legătură cu punctul lui FEUERBACH.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 4226. *Să se rezolve şi să se discute sistemul*

$$(a-x)(a-y)(a-z) = a^p$$
$$(b-x)(b-y)(b-z) = b^p$$
$$(c-x)(c-y)(c-z) = c^p.$$

Să se discute problema în cazul a n necunoscute.

O. N. ŢINO.

Problema presupune numerele a, b, c diferite între ele, căci cazul contrariu, sistemul de trei ecuaţii s'ar reduce la un sistem de două ecuaţii cu trei necunoscute, sau la o singură ecuaţie cu trei necunoscute, cazuri care nu prezintă interes problema fiind nedeterminată.

Efectuând produsele din primele părţi ale ecuaţiilor sistemului şi punând:

$$X_1 = x+y+z \quad ; \quad X_2 = xy+xz+yz \quad ; \quad X_3 = xyz$$

sistemul devine:

$$\begin{cases} a^2X_1 - aX_2 + X_3 + a^p - a^3 = 0 \\ b^2X_1 - bX_2 + X_3 + b^p - b^3 = 0 \\ c^2X_1 - cX_2 + X_3 + c^p - c^3 = 0, \end{cases} \tag{2}$$

iar x, y, z sunt rădăcinile ecuaţiei:

$$X^3 - X_1X^2 + X_2X - X_3 = 0. \tag{3}$$

Aşa dar, vom obţine soluţiile sistemului dat, calculând soluţiile sistemului (2) şi rezolvând cu ajutorul formulei lui CARDAN ecuaţia (3) corespunzătoare. Evident, pentru a avea toate soluţiile sistemului dat, este suficient să observăm că sistemul dat este

simetric în raport cu variabilele x, y, z; sistemul nu se schimbă fie că schimbăm două necunoscute între ele, fie că facem o permutare circulară asupra celor trei necunoscute.

Ca urmare, discuţia sistemului dat se reduce la discuţia sistemului (2). In ipoteza că numerele a, b, c sunt diferite între ele, determinantul sistemului (2), anume:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \end{vmatrix} = (c-a)(c-b)(b-a)$$

este *diferit de zero;* deci X_1, X_2, X_3 au totdeauna valori finite. Mai mult, însemnând cu Δ_1, Δ_2, Δ_3 determinanţii caracteristici corespunzători lui X_1, X_2, X_3 (soluţiile sistemului (2)), adică punând:

$$X_1 = -\frac{\Delta_1}{\Delta} \quad ; \quad X_2 = -\frac{\Delta_2}{\Delta} \quad ; \quad X_3 = -\frac{\Delta_3}{\Delta},$$

se găseşte că Δ_1, Δ_2 şi Δ_3 sunt divizibile cu Δ; deci că valorile lui X_1, X_2, X_3 sunt polinoame întregi de a, b, c.

Observăm în primul rând că avem cazul particular $p = 3$, în care având $\Delta \neq 0$ rezultă că $X_1 = X_2 = X_3 = 0$, deci în care avem o singură soluţie a sistemului dat:

$$x = y = z = 0.$$

Presupunând $p \neq 3$, avem de considerat cazurile

$$p = 1 \quad ; \quad p = 2 \quad ; \quad p > 3.$$

Pentru $p = 1$, avem:

$$\Delta_1 = -(a+b+c)\Delta; \quad \Delta_2 = -(ab+ac+bc+1)\Delta; \quad \Delta_3 = -abc\Delta,$$

deci:

$$X_1 = a+b+c; \quad X_2 = ab+ac+bc+1; \quad X_3 = abc.$$

Pentru $p = 2$, avem:

$$\Delta_1 = -(a+b+c-1)\Delta; \quad \Delta_2 = -(ab+ac+bc)\Delta; \quad \Delta_3 = -abc\Delta,$$

deci:

$$X_1 = a+b+c-1; \quad X_2 = ab+ac+bc; \quad X_3 = abc.$$

Pentru $p > 3$, observând că:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^p \end{vmatrix} \equiv \Delta \cdot P_{p-2}(a, b, c) \quad (4); \quad \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^p \end{vmatrix} \equiv \Delta \cdot Q_{p-1}(a, b, c) \quad (5)$$

unde $P_{p-2}(a, b, c)$ şi $Q_{p-1}(a, b, c)$

sunt polinoame simetrice în raport cu a, b, c şi a căror expresie o determinăm uşor, pentru fiecare caz, prin calculul elementar cunoscut, apoi că:

$$\Delta_1 = \Delta . [P_{p-2}(a, b, c) - P_1(a, b, c)];$$

$$\Delta_2 = \Delta . [Q_{p-1}(a, b, c) - Q_2(a, b, c)];$$

$$\Delta_3 = \Delta . abc [P_{p-3}(a, b, c) + 1].$$

Ca urmare, avem, pentru cazul $p > 3$, soluţia:

$$X_1 = P_1(a, b, c) - P_{p-2}(a, b, c);$$

$$X_2 = Q_2(a, b, c) - Q_{p-1}(a, b, c);$$

$$X_3 = - abc [P_{p-3}(a, b, c) + 1]. \qquad (6)$$

2. In cazul sistemului de n ecuaţii cu n necunoscute:

$$(a_i - x_1)(a_i - x_2) \ldots (a_i - x^n) = a^p \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

$n > 3$, rezolvarea sistemului conduce la rezolvarea ecuaţiei de gradul n:

$$X^n - X_1 X^{n-1} + X_2 X^{n-2} - \ldots \pm X^n = 0 \qquad (3')$$

în care:

$$X_1 = \Sigma x_1; \; X_2 = \Sigma x_1 x_2; \ldots; \; X_{n-1} = \Sigma x_1 x_2 \ldots x_{n-1}; \; X_n = x_1 x_2 \ldots x_n$$

sunt date de sistemul:

$$a_i^{n-1} X_1 - a_i^{n-2} X_2 + \ldots \mp a_i X_{n-1} \pm X^n + a_i^p - a_i^n = 0 \qquad (2')$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Determinantul Δ al acestui sistem este un determinant WANDERMONDE şi, deoarece pentru $k \neq l$ avem $a_k \neq a_l$, el este diferit de zero; determinanţii caracteristici, ca şi în cazul $n = 3$, sunt divizibili cu Δ, deci valorile lui $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sunt polinoame întregi de $a_1, a_2, \ldots, a_n$. In cazul particular $p = n$, avem o singură soluţie:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0.$$

Observare. S'a primit la această problemă o soluţie incompletă de la D-l MARIN I. PREDOESCU (Şcoala Politecnică Bucureşti), încolo nici o încercare deşi problema nu prezenta nici o dificultate.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 4474 [1]). *Să se găsească numărul de trei cifre* abc *şi numărul de patru cifre* mnpq *ştiind că :*

$$6 \times abc + 1 = mnpq \quad ; \quad 6 \times acb + 1 = mpqn ;$$

$$6 \times cba + 1 = mqpn.$$

G-L GH. BUICLIU.

Membrii întâi fiind neperechi rezultă că n şi q sunt neperechi, iar ultimele două egalităţi arată că $6a$ şi $6b$ se termină cu aceeaşi cifră ceea ce înseamnă că

I. $a = b$,

sau

II.

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
n	1	7	3	9	5	1	7	3	9	5

.

Valoarea lui n din linia a treia fiind dedusă cu uşurinţă din ultimele două egalităţi ale enunţului.

Cazul I. $a = b$. Egalităţile din enunţ devin

$$(1)' \quad 6 \times aac + 1 = mnpq \quad ; \quad (2)' \quad 6 \times aca + 1 = mpqn ;$$

$$(3)' \quad 6 \times caa + 1 = mqpn.$$

Scăzând pe (3)' din (1)' avem

$$6(a - c) = n - q.$$

Cum $n - q \leqslant 9$ această egalitate nu poate avea loc decât dacă

$$(\alpha) \qquad n - q = 0 \quad \therefore \quad a - c = 0$$

$$(\beta) \qquad n - q = 6 \quad \therefore \quad a - c = 1.$$

Pentru (α) condiţiile din enunţ devin

$$6 \times aaa + 1 = mnpn \quad ; \quad \text{etc.}$$

de unde rezultă că aaa va da soluţii numai dacă $n = p = q$, ceea ce are loc pentru $a = 2$ şi $a = 3$. Deci soluţiile

$$6 \times 222 + 1 = 1333, \ldots \quad \text{şi} \quad 6 \times 333 + 1 = 1999, \ldots$$

---

1) Înlocueşte problema 4474 propusă la pag. 240, Vol. XL şi anulată, după cum se arată în nota din josul pag. 333, Vol. XLV.

Pentru (β), condiţiile din enunţ devin

$$6\times aa\,(a-1)+1=m\,(q+6)\,pq\ ;\ 6\times a\,(a-1)\,a+1=mpq\,(q+6);$$
$$6\times(a-1)\,aa+1=mqp\,(q+6).$$

Cum $n=q+6\leqslant 9$ şi nepereche, nu putem avea decât

$$n=q+6=7 \quad \text{sau} \quad n=q+6=9.$$

Pentru $q=1$, condiţiile enunţului devin

$$6\times aa\,(a-1)+1=m7p1\ ;\ 6\times a\,(a-1)\,a+1=mp17;$$
$$6\times(a-1)\,aa+1=m1p7.$$

Terminaţiile acestor numere dau imediat

$$a=1 \quad \text{şi} \quad a=6$$

dar nici unul din numerele $abc=110$ şi $abc=665$ nu satisfac condiţiile enunţului.

Pentru $q=3$, vom avea

$$6\times aa\,(a-1)+1=m9p3\ ;\ 6a\,(a-1)\,a+1=mp39;$$
$$6\,(a-1)\,aa+1=mp39$$

care dau pentru a valorile 3 şi 8, dintre care prima este acceptabilă dând soluţia

$$6\times 332+1=1993\ ;\ 6\times 323+1=1939\ ;\ 6\times 233+1=1399.$$

Cazul II. $a\neq b$. Considerăm pe rând coloanele 1), 2),... 9), 10) ale tabloului valorilor lui a, b, n.

1) $\qquad a=0\ ;\ b=5\ ;\ n=1.$

$$6\times 05c+1=m1pq\ ;\ 6\times 0c5+1=mpq1\ ;\ 6\times c50+1=mqp1.$$

Ultima egalitate dă $p=0$. Valoarea lui p din prima egalitate se obţine adunând la unităţile lui $6\times b$ cifra zecilor produsului $6\times c+1$, cifră care este cel mult 5 pentru $c=9$. In cazul 1), b fiind 0 vom avea $p=0$ numai dacă $6c+1\leqslant 9$ deci dacă $c=0$ sau 1. Avem:

$$6\times 050+1=0301\ ;\ 6\times 005+1=0031\ ;\ 6\times 050+1=0301$$

care însă nu este soluţie pentru că cifra miilor primului număr nu este egală cu cifra sutelor ultimului număr, cum cere enunţul.

De asemeni nici $c=1$ nu dă soluţie.

Urmând aceeaşi cale pentru celelalte valori ale lui a, b, n găsim următoarele valori pentru p şi c corespunzătoare fiecărui caz.

cazul	a	b	n	p	c
2)	1	6	7	6	0,1
3)	2	7	3	3	2,3
4)	3	8	9	9	2,3
5)	4	9	5	6	3,4
6)	5	0	1	3	5,6
7)	6	1	7	9	5,6
8)	7	2	3	6	7,8
9)	8	3	9	2	7,8
10)	9	4	5	9	9

Făcând verificările se găsesc soluţii numai la 8). In concluzie problema are următoarele 2 soluţiuni:

$6\times727+1=4363$; $6\times772+1=4633$; $6\times727+1=4363$

$6\times728+1=4369$; $6\times782+1=4693$; $6\times827+1=4963$

pe lângă soluţiunile găsite la cazul I.

Notă. 1°. A găsit toate soluţiunile D-l C. V. DIACONESCU (Lic. militar Cernăuţi).

2°. D-l A. N. POPA (Lic. militar Iaşi) a găsit soluţiile 727 şi 728.

3°. D-nii FL. J. ABELES (Lic. „V. Alexandri", Galaţi) şi AL. I. ROHR (Lic. militar Iaşi) au găsit numai soluţia 728.

4°. Un harnic corespondent, citat pe coperta unui număr anterior, a găsit prin raţionament bun soluţia eronată 358.

5°. Nu pot fi considerate ca soluţii numerele abc pentru care $6\times abc+1$, $6\times acb+1$ şi $6\times cba+1$ se scriu cu aceleaşi cifre m, n, p, q. Enunţul precizează o anumită ordine a cifrelor m, n, p, q.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4970. *Să se studieze convergența seriei cu termenul general*

$$u_n = \frac{n!}{(2+k_1)\,(3+k_2)\ldots(p+1+k_p)\ldots(n+k_i)}$$

unde numitorul are $(n-1)$ *factori, iar* $k_1, k_2, \ldots k_p$ *sunt constante pozitive date.*

M. GHERMĂNESCU.

Soluție dată de D-l ROȘCULEȚ MARCEL.

Această problemă este o ilustrare a articolului D-lui Prof. M. GHERMĂNESCU din G. M.

Aplicând criteriul lui RAABE-DUHAMEL se găsește

$$\lim n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right) = \lim n\left[\frac{n!(2+k_1)\ldots(n+1+k_{i+1})}{(n+1)!\,(2+k_1)\ldots(n+k_i)}-1\right] =$$

$$\lim n\left(\frac{n+1+k_{i+1}-n-1}{n+1}\right) = k_{i+1},$$

deci p limite diferite.

Conform celor stabilite în articolul mai sus citat, vom avea convergență sau divergență, după cum

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_p \gtrless p.$$

Notă. D-l M. POPA, aplicând același criteriu RAABE-DUHAMEL, conchide $k_i > 1$.

M. G.

PROBLEMA 5201. *Intr'un triunghiu* ABC *se consideră picioarele a trei ceviene și izotomicele lor:* A_1, B_1, C_1 *și* A', B', C'. *Să se arate că:*

1. *Dreptele lui* GAUSS, *ale patrulaterelor* $AB'A_1C'$ *și analoagele sale, sunt paralele.*

2. *Asemenea pentru patrulaterele* $AB_1A'C_1$ *și analoagele sale.*

LT. I. GH. ZAMFIRESCU.

Fie α, β, γ mijloacele laturilor BC, CA, AB. Avem prin definiție:

$$\overline{A_1\alpha} = \overline{\alpha A'} \quad ; \quad \overline{B_1\beta} = \overline{\beta B'} \quad ; \quad \overline{C_1\gamma} = \overline{\gamma C'}, \qquad (1)$$

din care deducem imediat că:

$$\overline{BA'} = \overline{A_1C};\ \overline{BA_1} = \overline{CA'};\ \overline{CB_1} = \overline{B'A};\ \overline{CB'} = \overline{B_1A};$$
$$\overline{AC_1} = \overline{C'B};\ \overline{AC'} = \overline{C_1B}. \tag{2}$$

Fie acum P şi P' respectiv mijloacele lui $\overline{AA_1}$ şi $\overline{B'C'}$; apoi Q, Q' mijloacele lui $\overline{BB_1}$, $\overline{C'A'}$; R, R' mijloacele lui $\overline{CC_1}$, $\overline{A'B'}$. Dreptele PP', QQ', RR' sunt dreptele lui GAUSS ale patrulaterelor $AB'A_1C'$, $BC'B_1A'$, $CA'C_1C'$. Punctele P, Q, R aparţinând respectiv dreptelor $\gamma\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\alpha$, avem relaţiile:

$$\overline{\gamma P} = \frac{1}{2}\overline{BA_1} = \frac{1}{2}\overline{A'C}\ ;\ \overline{\gamma Q} = \frac{1}{2}\overline{AB_1} = \frac{1}{2}\overline{B'C} \text{ şi analoagele lor;}$$

rezultă că:

$$\frac{\overline{\gamma P}}{\overline{CA'}} = \frac{\overline{\gamma Q}}{\overline{CB'}} = \frac{1}{2}; \tag{3}$$

dar

$$\sphericalangle\, Q\gamma P \equiv \sphericalangle\, \alpha\gamma\beta = \sphericalangle\, \beta C\alpha \equiv \sphericalangle\, B'CA', \tag{4}$$

deci

$$\Delta\, P\gamma Q \sim \Delta\, A'CB'. \tag{5}$$

Din (5) deducem că:

$$\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{A'B'}, \tag{6}$$

apoi că:

$$\sphericalangle\, \gamma QP = \sphericalangle\, A'B'C = \sphericalangle\, \gamma\beta'B',$$

unde β' este intersecţia dreptelor A'B' şi $\alpha\gamma$; deci

$$\overline{PQ} = \| \frac{1}{2}\overline{A'B'}. \tag{7}$$

Dar din triunghiul A'C'B' se vede că

$$\overline{P'Q'} = \| \frac{1}{2}\overline{A'B'}, \tag{8}$$

comparând (7) cu (8), avem că

$$\overline{PQ} = \| \overline{P'Q'}, \tag{9}$$

ca urmare că PQQ'P' este paralelogram, deci

$$\overline{PP'} \| = \overline{QQ'}. \tag{10}$$

Considerând acum triunghiurile QαR şi B'AC', găsim în mod analog că:

$$\overline{PP'} \parallel = \overline{QQ'} \qquad (11)$$

şi comparând (11) cu (10) avem proprietatea enunţată, adică dreptele $\overline{PP'}$, QQ', RR' sunt paralele.

2. A doua proprietate este identică cu proprietatea demonstrată mai sus, deoarece A', B', C' fiind izotomicele punctelor A_1, B_1, C_1, reciproc A_1, B_1, C_1 sunt izotomicele punctelor A', B', C'.

Observări. I. Demonstraţia dată mai sus nu foloseşte în nici un fel proprietatea dreptelor AA_1, BB_1, CC_1 că sunt concurente, ca urmare proprietatea enunţată este independentă de această condiţie şi poate fi enunţată în cazul ei general sub forma următoare:

Fiind dat un triunghiu ABC *şi pe laturile lui trei perechi de puncte izotomice* A', A_1; B', B_1; C', C_1, *dreptele lui* GAUSS *ale patrulaterelor* $AB'A_1C'$; $BC'B_1A'$; $CA'C_1B'$ *sunt paralele.*

II. Demonstraţia dată de propunătorul problemii foloseşte proprietatea că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.

In soluţia dată de D-l CONSTANTIN PANTELIMON (Cl VIII-a, Liceul Militar Iaşi) se vede din enunţul corectat, precum şi din figura care însoţeşte această soluţie, că D-sa a demonstrat proprietatea în cazul general.

D-nii PAUL P. DRĂGHICESCU, ALEXANDRU I. ROHR (Elevi, Liceul Militar Iaşi) şi MIHAIL I. TREFILOV (Elev Liceul Brăila) au rezolvat problema fără a utiliza condiţia că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente în acelaşi punct, însă în figurile care însoţesc soluţiile lor dreptele AA_1, BB_1, CC_1 trec prin acelaşi punct, deci n'au observat că proprietatea este independentă de această condiţie.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 5207. *Fie* M *un punct de pe o elipsă de axe* 2*a şi* 2*b, şi* N *intersecţia normalei în* M *cu axa mică a elipsei. Să se arate că, dacă segmentul* $\overline{MN}$ *este egal cu axa mare a elipsei, focarele ei şi punctul* N *formează un triunghiu echilateral. Care e condiţia ca să putem avea pe elipsă puncte* M *pentru care* $\overline{MN} = 2a$? *Să se arate că cercul cu centrul în punctul* N *de mai sus (pentru care* $\overline{MN} = 2a$*) şi de rază* 2*a, e tangent elipsei în două puncte* M, *distincte în general, şi că elipsa nu traversează cercul (acesta nu e osculator elipsei). Generalizare la cazul unui segment* $\overline{MN}$ *oarecare, raza cercului considerat fiind chiar* $\overline{MN}$.

RADU BĂDESCU.

Soluțiune. Din ecuația normalei în punctul $M(x,y)$

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$$

găsim Y-ul punctului $N\left(X = 0, \quad Y = y + \frac{x}{y'}\right)$. Pentru a trata de la început cazul general, să scriem condiția că $\overline{MN} = a\lambda$, λ fiind un parametru pozitiv. Vom obține relația

$$(1) \qquad x^2 + \frac{x^2}{y'^2} = a^2\lambda^2$$

și cum y' poate fi calculat derivând ecuația elipsei

$$(2) \qquad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \text{adică} \quad y' = -\frac{b^2x}{a^2y},$$

relația (1) poate fi scrisă sub forma

$$(3) \qquad b^4x^2 + a^4y^2 = a^2b^4\lambda^2.$$

Coordonatele punctului M de pe elipsă vor fi date de relațiile (2) și (3) și se obține

$$(4) \qquad x^2 = \frac{a^2}{c^2}(a^2 - b^2\lambda^2) \quad , \quad y^2 = \frac{b^4}{c^2}(\lambda^2 - 1).$$

Pentru ca să existe puncte M pe elipsă, trebue ca parametrul λ să verifice inegalitățile

$$(5) \qquad 1 \leqslant \lambda^2 \leqslant \frac{a^2}{b^2}$$

și, în aceste condițiuni, la fiecare valoare a lui λ corespund patru puncte M pe elipsă, simetric dispuse față de axele ei.

Pentru a vedea care e semnificația geometrică a acestor inegalități, se construește desfășurata (D) a elipsei, care e și înfășurătoarea normalelor ei. Punctul C de contact al unei normale cu desfășurata (D) este tocmai centrul de curbură corespunzător al elipsei. Când λ variază dela 1 la $\frac{a^2}{b^2}$, punctul N pentru care

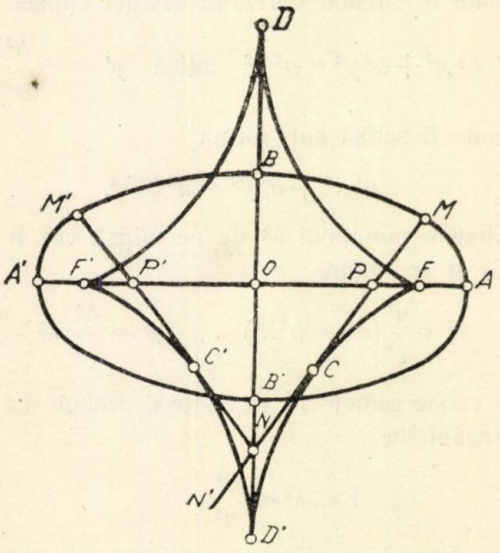
$$(6) \qquad Y = y + \frac{x}{y'} = -\frac{c^2y}{b^2} = -c\sqrt{\lambda^2 - 1}$$

descrie segmentul OD′ de pe axa Oy (D′ e punctul de întoarcere al desfăşuratei situat sub Ox), punctul M descrie arcul AB al elipsei situat în primul cadran, iar punctul C, arcul FD′ al desfăşuratei (F punctul de întoarcere de la dreapta axei Oy).

In particular, pentru $\lambda = 2$, găsim

$$x^2 = \frac{a^2}{c^2}(a^2 - 4b^2) \quad , \quad y^2 = \frac{3b^4}{c^2} \quad ,$$

iar pentru Y-ul lui N: $Y = -c\sqrt{3}$, şi se vede imediat că lungimile NF şi NF′ sunt egale cu $2c$, F şi F′ fiind focarele elipsei, iar $2c$ distanţa focală.



Cercul cu centrul în N şi de rază $\overline{MN}$, care are în M aceeaşi tangentă cu elipsa, nu o poate traversa căci aceste două curbe au cel mult patru puncte de intersecţie, două câte două confundate în M şi M′ (acesta din urmă fiind simetricul lui M prin raport cu Oy) astfel că ele nu pot avea în M un contact de un ordin superior ordinului doi. Se vede de altfel că vârfurile elipsei sunt interioare cercului, adică distanţele dela N la aceste puncte sunt inferioare razei $a\lambda$. Avem astfel inegalităţile

$$a\lambda > b + c\sqrt{\lambda^2 - 1} \quad , \quad a\lambda > \sqrt{a^2 + c^2(\lambda^2 - 1)}$$

care se mai scriu sub forma

$$(b\lambda - a)^2 > 0 \quad , \quad b^2(\lambda^2 - 1) > 0$$

şi se vede că ele sunt verificate în ipotezele făcute.

Notă. D-l RIPIANU D-TRU, (Student, Cluj) a dat o soluţiune prea complicată şi două demonstraţii pentru proprietatea cercului de a nu traversa elipsa, la fel de complicate. Au rezolvat prima parte, fără generalizare, D-na MARIANA ABRAMESCU-POP, D-nii IONEL STAMATE, (Student, Cluj) şi POPA MIRCEA, (Liceul Militar, Iaşi). Generalizarea a fost greşit înţeleasă de doi dintre aceşti corespondenţi, căci ei au pus problema pentru un punct N oarecare, fără a o rezolva. Iată care ar fi soluţiunea pentru această problemă:

Se ştie că dintr'un punct oarecare N' al planului se pot duce două, trei sau patru normale la elipsă dacă acest punct este exterior desfăşuratei ei, aparţine acestei curbe, sau este interior. Fie MN' una din aceste normale. Ea taie axa Oy în N şi axa Ox în P. Aceste două puncte separă întreaga normală în trei regiuni astfel că 1) dacă N' e situat între N şi P, cercul (C) cu centrul în N' şi de rază MN' taie elipsa în două puncte distincte de M. Când însă N' coincide cu centrul de curbură C relativ la punctul M al elipsei, unul din aceste puncte coincide cu M. C e între N şi P, când M e distinct de unul din vârfurile elipsei. 2) dacă N' e exterior segmentului NP, cercul şi elipsa au numai două puncte de intersecţie confundate în M, 3) dacă N' coincide cu N sau P, se găseşte tocmai cazul tratat în problema considerată (pentru P se intervertesc variabilele x şi y); cercul e bitangent elipsei, 4) în fine dacă N' coincide cu vreunul din vârfurile desfăşuratei, cercul (C) are un contact de ordinul trei cu elipsa, adică are patru puncte confundate într'unul din vârfurile ei (M coincide cu acest vârf).

R. B.

PROBLEMA 5240. *Se consideră conicele tangente în origine la axa Oy şi având dreapta* $x + y - 1 = 0$ *ca asimptotă. Să se afle a doua asimptotă şi să se arate că trece printr'un punct fix. Să se găsească înfăşurătoarea axelor conicelor considerate.*

N. ABRAMESCU.

Soluţie dată de D-nii: E. G. FILA, V. FLORESCU, O. MĂRCULESCU, R. G. METEA, M. D. POPA, D. RIPIANU, M. L. RUSSU, T. A. ŞERBAN. Asimptota $x + y - 1 = 0$ fiind cunoscută, să însemnăm cu $y + \lambda x + \mu = 0$ ecuaţia asimptotei a doua. Ecuaţia iperbolelor considerate este de forma

$$(x + y - 1)(y + \lambda x + \mu) + k = 0,$$

şi trecând prin originea O, urmează $k = \mu$.

Tangenta în origine este dată de grupul termenilor de gradul întâiu, $x(\mu - \lambda) + y(\mu - 1) = 0$. Conicele fiind tangente la Oy, $x = 0$, ecuația trebue să se reducă la $x = 0$, adică să fie zero coeficientul lui y, deci $\mu = 1$. Ecuația asimptotei a doua este $y + 1 + \lambda x = 0$, și se vede că trece prin punctul de intersecție al dreptelor $y + 1 = 0$, $x = 0$, adică $(0, -1)$.

S'ar putea aplica ecuația

$$B(f'^2_x - f'^2_y) = (A - C) f'_x f'_y$$

a axelor unei conice

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Când se cunosc asimptotele, axele sunt bisectoarele unghiului lor, care în cazul nostru are ecuația

$$\frac{x + y - 1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{y + \lambda x + 1}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}.$$

Ridicând la pătrat și aranjând, avem

$$[(x+y-1)^2 - 2x^2]\lambda^2 - 4x(y+1)\lambda + (x+y-1)^2 - 2(y+1)^2 = 0.$$

E bine să se noteze $x + y - 1 = u$, $y + 1 = v$, și ecuația devine

$$(u^2 - 2x^2)\lambda^2 - 4vx\lambda + u^2 - 2v^2 = 0.$$

Înfășurătoarea axelor se obține eliminând pe λ între această ecuație și derivata sa în raport cu λ. Fiind de gradul al doilea în λ, e destul a scrie că realizantul este zero. Avem

$$4v^2x^2 - (u^2 - 2x^2)(u^2 - 2v^2) = 0 \quad , \quad u^2[2(x^2 + v^2) - u^2] = 0,$$

care se descompune în $u^2 = (x + y - 1)^2 = 0$, o dreaptă dublă și $2(x^2 + v^2) - u^2 = 0$. Inlocuind pe u și v cu valorile lor, obținem

$$2x^2 + 2(y+1)^2 - (x+y-1)^2 = 0, \quad x^2 + (y+1)^2 = \frac{(x+y-1)^2}{1+1}.$$

Deci, înfășurătoarea axelor este o parabolă cu focarul în $(0, -1)$ și directoarea $x + y - 1 = 0$. Ecuația acestei parabole se mai poate scrie

$$(x - y)^2 + 2x + 6y + 1 = 0,$$

$$(x - y + l)^2 + 2(1 - l)x + 2(3 + l)y + 1 - l^2 = 0.$$

Punând condiția ca dreptele

$$x-y+l=0 \quad \text{și} \quad 2(1-l)x+2(3+l)y+1-l^2=0$$

să fie perpendiculare, găsim $l=-1$. Deci ecuația axei parabolei este $x-y-1=0$, iar tangenta în vârful ei $x+y=0$.

Observare. S'ar fi putut da o interpretare geometrică a ecuațiilor din problemă. Însă a fost propusă ca să se dea soluție analitică, pentru a servi ca model pentru probleme analoage.

PROBLEMA 5257. *Dacă suma a trei numere întregi este divizibilă prin 9, suma cuburilor acelor numere va fi divizibilă prin 3. Când este divizibilă chiar prin 9?*

M. GHERMĂNESCU.

1. *Soluție* dată de D-ra L. TUDORAN și D-nii: F. ABELES, C. BAKONYI, C. CRISTEA, P. DRĂGHICESCU, A. JILETCOVICI, M. NEGREA-LEONTE, C. PANTELIMON, M. POPA și O. RĂDULESCU.

Avem

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(c+a)=\text{M3},$$

deci

$$(a+b)(b+c)(c+a)=\text{M3}.$$

Cum $a+b+c=\text{M9}$, rezultă că unul din cele trei numere a, b, c trebue să fie M3.

Pe aceeași cale, D-l O. RĂDULESCU arată că este suficient a presupune $a+b+c=\text{M3}$.

2. *Soluție* dată de D-nii: ST. CETĂȚEANU, V. BÂRLEA-SUHĂȚEANU și E. VIJELIE.

Avem

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)+3abc=\text{M3}.$$

Trebue să avem apoi

$$3abc=\text{M9},$$

adică regăsim concluzia precedentă.

3. *Soluție* dată de D-nii: A. POPA, A. ȘAICHIN și I. ZAMFIR.

Avem

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)\ (a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca),$$

deci

$$3abc = \text{M9, etc.}\ldots$$

4. *Soluţii* mai laborioase au dat D-nii: C. DIACONESCU şi GH. PETRESCU, iar D-nii: C. D. EFTIMIE şi A. ROHR au conchis că suma a două numere trebue să fie M3.

M. G.

PROBLEMA 5259. ABCDEF, *fiind un exagon cu diagonalele principale concurente în acelaşi punct* I, *este înscris în cercul* (O). *Perpendicularele ridicate pe mijlocul razelor* $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ *intersectează respectiv perpendicularele coborîte din centrul* O *pe* AD, BE, CF *în* M, N, P. *Să se arate că punctele* M, N, P *sunt colineare, dreapta* MNP *fiind perpendiculară pe dreapta* OI. (*Enunţ precizat*).

TH. GH. COCEA.

Perpendiculara dusă din O pe $\overline{AD}$, este perpendiculară la mijlocul coardei AD, deci punctul M este centrul cercului AOD; asemenea N şi P sunt respectiv centrele cercurilor BOE şi COF. Fie R_a, R_b, R_c punctele unde dreapta OI taie a doua oară respectiv cercurile AOD, BOE, COF.

In cercul AOD, coardele AD şi OR_a tăindu-se în punctul I avem relaţia:

$$\overline{IO} \cdot \overline{IR_a} = \overline{IA} \cdot ID. \qquad (1)$$

In acelaşi fel, obţinem relaţiile:

$$\overline{OI} \cdot \overline{IR_b} = IB \cdot \overline{IE} \quad (2) \quad \text{şi} \quad \overline{IO} \cdot \overline{IR_c} = \overline{IC} \cdot \overline{IF}. \qquad (3)$$

Dar coardele AD, BE, CF sunt deasemenea coarde în cercul (O) trecând prin acelaşi punct I, deci avem încă relaţiile:

$$\overline{IA} \cdot \overline{ID} = \overline{IB} \cdot \overline{IE} = \overline{IC} \cdot \overline{IF}. \qquad (4)$$

Comparând (1), (2), (3) cu (4), decucem că:

$$\overline{OI} \cdot \overline{IR_a} = \overline{IO} \cdot \overline{IR_b} = \overline{IO} \cdot \overline{IR_c}, \qquad (5)$$

deci că $\overline{IR_a} = \overline{IR_b} = \overline{IR_c}$. Aceste segmente egale cu o extremitate comună având acelaşi sens, punctele R_a, R_b, R_c sunt confundate în acelaşi punct R.

Dreapta MN unind centrele cercurilor (M) şi (N) este perpendiculară pe coarda comună OR la mijlocul acestei coarde; asemenea MP este perpendiculară pe $\overline{OR}$ la mijlocul lui $\overline{OR}$, deci *punctele* M, N, P *sunt aşezate pe aceeaşi dreaptă perpendiculară pe* OI.

Observări. 1. In cazul când una din coarde trece prin centrul O, dreapta centrelor, cercurilor corespunzătoare celorlalte două coarde, este perpendiculară pe această coardă.

2. Dacă punctul I este chiar O, dreapta centrelor este aruncată la infinit.

3. Problema poate fi enunţată sub forma mai simplă:

Fiind date un cerc (O) *şi trei coarde concurente ale acestui cerc; centrele cercurilor, determinate de extremităţile fiecărei coarde cu centrul* O, *sunt în linie dreaptă.*

A rezolvat problema D-l OCTAVIAN GH. RĂDULESCU (An. I. Ş. O. A.).

O. N. Ţ.

PROBLEMA 5269. *Se consideră un sistem de forţe concurente* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *aplicate într'un punct* M *variabil din planul unui cerc, extremităţile forţelor fiind vârfurile unui poligon regulat înscris în cerc.*

1. *Să se determine proiecţiunile rezultantei* F *pe un diametru ce trece prin unul din vârfurile poligonului şi pe tangenta la cerc în acest vârf. Să se arate apoi că direcţia ei trece printr'un punct fix, că această direcţie nu depinde de numărul* n *al forţelor şi să se determine intensitatea rezultantei.*

2. *Luând ca axe diametrul ce trece prin* M *şi tangenta la cerc perpendiculară pe diametru să se verifice rezultatele dela Nr. 1.*

3. *Să se determine geometric resultanta* F.

RADU BĂDESCU.

Soluţie. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vârfurile poligonului regulat înscris în cercul de centru O, dat.

1. Fie:

$$A_1(0, 0) \quad ; \quad O(R, 0) \quad ; \quad M(\alpha, \beta)$$

şi deci:

$$A_2\left(R - R\cos\frac{2\pi}{n},\ R\sin\frac{2\pi}{n}\right);$$

$$\ldots;\ A_n\left(R - R\cos\frac{2\pi\overline{n-1}}{n},\ R\sin\frac{2\pi\overline{n-1}}{n}\right).$$

Deci proecţiunile rezultantei F pe axele sistemului de coordonate în care lucrăm sunt:

$$X = -n\alpha + \sum_{k=0}^{n-1}\left(R - R\cos\frac{2k\pi}{n}\right) = -n(\alpha - R)$$

$$Y = -n\beta + \sum_{k=0}^{n-1} R\sin\frac{2k\pi}{n} = -n\beta$$

deoarece:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n} = 0 \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n} = 0.$$

Ecuaţia dreptei suport a resultantei F este:

$$(1) \qquad y(\alpha - R) - \beta(x - R) = 0;$$

deducem:

— F va trece printr'un punct fix (intersecţia dreptelor $y = 0$; $x - R = 0$) $O(R, 0)$;

— direcţiunea lui F fiind determinată de coeficientul unghiular al dreptei (1), vedem că ea nu depinde de numărul forţelor.

Avem:

$$F = n\sqrt{(\alpha - R)^2 + \beta^2} = n \cdot \overline{OM}.$$

2. Fie:

$$O(\pm R, 0) \quad ; \quad M(\alpha, 0) \quad ; \quad A_1(\pm R - R\cos\varphi,\ R\sin\varphi)$$

şi deci:

$$A_2\left[\pm R - R\cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{n}\right),\ R\sin\left(\varphi + \frac{2\pi}{n}\right)\right];$$

$$\ldots;\ A_n\left[\pm R - R\cos\left(\varphi + \frac{2\pi\overline{n-1}}{n}\right),\ R\sin\left(\varphi + \frac{2\pi\overline{n-1}}{n}\right)\right].$$

Proecțiunile rezultantei F vor fi:

$$X = -n\alpha + \sum_{k=0}^{n-1}\left[\pm R - R\cos\left(\varphi + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] = -n(\alpha \mp R)$$

$$Y = \sum_{k=0}^{n-1} R\sin\left(\varphi + \frac{2k\pi}{n}\right) = 0.$$

Ecuația dreptei suport a lui F fiind:

$$y = 0$$

deducem:

— F trece prin O;

— direcțiunea rezultantei nu depinde de numărul forțelor;

— lungimea resultantei este:

$$F = n\,|\alpha \mp R| = n \times \overline{OM}.$$

3. Avem:

$$F_i = \vec{MO} + \vec{OA_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

și deci:

$$F = n.\vec{MO} + \sum_{i=1}^{m} \vec{OA_i}$$

dar:

$$\sum_{i=1}^{m} \vec{OA_i} = 0$$

(căci făcând poligonul forțelor vom obține un poligon închis asemenea poligonului $A_1A_2, \ldots, A_n$) de unde:

$$F = n.\vec{MO}.$$

Aceleași concluziuni deci ca la 1 și 2.

FLORESCU L. VICTOR.

Notă. In afară de soluțiunea precedentă, s'a mai primit o alta dela D-l POPA MIRCEA, Liceul Militar, Iași. însă fără soluțiunea geometrică cerută. D-sa observă că problema e un caz particular al *teoremei* lui LEIBNITZ, punctele A_i fiind situate pe un cerc; de fapt, e o generalizare a unei probleme cunoscute (când punctul M e situat chiar pe cerc). Se observă că rezultatele sunt valabile și când punctul M nu aparține planului cercului și că centrul acestui cerc e singura poziție de echilibru a lui M.

R. B.

PROBLEMA 5310. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$z^8 + 4az^7 - 14a^3 z^5 - 17a^4 z^4 - 6a^5 z^3 + 27a^6 z^2 + 27a^7 z + q = 0.$$

In ce caz această ecuaţie are toate rădăcinile reale? Să se formeze ecuaţia generală de gradul al optulea, care se rezolvă în acelaşi fel ca ecuaţia dată.

O. N. ŢINO.

In primul rând observăm că polinomul ecuaţiei date fără termenul liber este şi omogen şi de gradul al optulea în raport cu z şi a; deci el se reduce la unul cu coeficienţi numerici prin substituţia $z = ay$ (2), şi avem ecuaţia:

$$y^8 + 4y^7 - 14y^5 - 17y^4 - 6y^3 + 27y^2 + 27y + k = 0, \qquad (3)$$

unde am pus pentru simplificare $q = a^8 k$.

Acum observăm că ecuaţia (3) poate fi scrisă sub forma următoare:

$$(y^4 + 2y^3 - 2y^2 - 3y - 3)^2 - 3(y^4 + 2y^3 - 2y^2 - 3y - 3) + k - 18 = 0, \qquad (4)$$

dar:

$$y^4 + 2y^3 - 2y^2 - 3y \equiv \left(y^2 + y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}, \qquad (5)$$

deci punând:

$$y^2 + y - \frac{3}{2} = \frac{x}{2}, \qquad (6)$$

avem:

$$\left(\frac{x^2}{4} - \frac{21}{4}\right)^2 - 3\left(\frac{x^2}{4} - \frac{21}{4}\right) + k - 18 = 0. \qquad (7)$$

Desvoltând calculele, ecuaţia (7) devine:

$$\varphi(x) \equiv x^4 - 54x^2 + 16k + 405 = 0, \qquad (8)$$

care fiind o ecuaţie bipătrată este rezolvabilă cu ajutorul radicalilor patraţi şi ca urmare ecuaţia propusă este rezolvabilă cu ajutorul radicalilor patraţi.

2. Pentru ca ecuaţia (6) să aibă rădăcinile reale, trebue ca

$$R \equiv 7 + 2x \geqq 0; \qquad (9)$$

deci ca

$$x \geqq -\frac{7}{2};$$

formând însă şirul lui ROLLE pentru ecuaţia (8) avem:

$\varphi(-\infty)$	$\varphi(-3\sqrt{3})$	$\varphi(0)$	$\varphi(+3\sqrt{3})$	$\varphi(+\infty)$
$+\infty$	$16\left(k-\frac{81}{4}\right)$	$16\left(k+\frac{405}{6}\right)$	$16\left(k-\frac{81}{4}\right)$	$+\infty$

vedem că ecuaţia (8) are toate rădăcinile sale reale dacă k satisface condiţiei:

$$-\frac{405}{16}\leqq k\leqq\frac{81}{4}, \qquad (10)$$

în care caz rădăcinile reale sunt cuprinse în intervalele:

$$(-\infty, -3\sqrt{3}); (-3\sqrt{3}, 0); (0, +3\sqrt{3}); (+3\sqrt{3}, +\infty). \qquad (11)$$

Observând acum că $-3\sqrt{3}<-\frac{7}{2}$, deducem că rădăcina din intervalul $(-\infty, -3\sqrt{3})$ nu satisface condiţiei (9), ca urmare ecuaţia dată nu poate avea toate rădăcinile sale reale; ea are totdeauna patru rădăcini reale, iar pentru ca să aibă *şase* rădăcini reale, trebue să avem încă condiţia:

$$\varphi\left(-\frac{7}{2}\right)=\frac{1}{16}(256k-1703)\leqq 0 \quad , \text{ adică } k\leqq\frac{1703}{256}. \qquad (11)$$

3. Ecuaţia generală de gradul al optulea în y, care se rezolvă în acelaşi fel cu ecuaţia dată, adică care se rezolvă prin reducerea ei la un sistem de gradul al optulea format din o ecuaţie de gradul al doilea şi o ecuaţie rezolvantă bipătrată, este următoarea:

$$y^8+4ry^7+(6r^2+4s)y^6+(12rs+4r^3)y^5+(r^4+12r^2s+6s^2+p)y^4$$
$$+(4r^3s+12rs^2+2pr)y^3+(6r^2s^2+4s^2+pr^2+2ps)y^2$$
$$+(4rs^3+2prs)y+\lambda=0.$$

Făcând pe

$$r=1 \quad , \quad s=-\frac{3}{2} \quad , \quad p=-\frac{27}{2}$$

obţinem ecuaţia propusă.

Ecuaţia în z se obţine imediat punând: $y=\frac{z}{a}$.

D-l CONSTANTIN PANTELIMON (cl. VIII-a, liceul militar Iaşi) a rezolvat problema aproape bine, D-sa n'a observat însă că ecuaţia de gradul al patrulea este reductibilă la o ecuaţie bipătrată.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 5315. *Să se determine dimensiunile unei plăci omogene dreptunghiulare de suprafață* S *astfel ca perioada micilor oscilațiuni în jurul mijlocului uneia din laturi să fie minimă. Oscilațiunile au loc în planul vertical al plăcii. Frecările și rezistența aerului se vor neglija.*

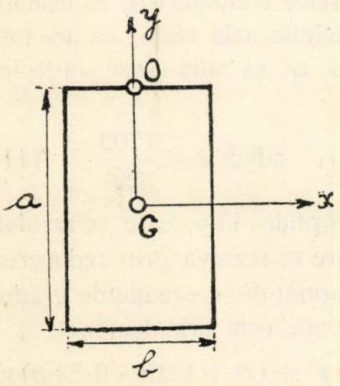
ALEXANDRU STOENESCU.

Soluție dată de D-l POPA D. MIRCEA elev clasa VIII-a Liceul Militar, Iași.

Fie a și b dimensiunile plăcii date. Avem prin enunț:

$$S = ab. \tag{1}$$

Perioada micilor oscilațiuni ale unui corp în jurul unei axe este dată de formula:



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \tag{2}$$

în care $l = \frac{k^2}{d}$ reprezintă lungimea pendulului simplu sincron, k raza de giratie a momentului de inerție al corpului în raport cu axul de rotație O, iar d distanța dela centrul de greutate G al corpului la același ax.

Rezultă:

$$OG = d = \frac{a}{2}.$$

Momentul de inerție al dreptunghiului în raport cu axul paralel cu axul de rotație și trecând prin centrul de greutate este:

$$I_G = I_x + I_y = S\frac{a^2}{12} + S\frac{b^2}{12} = S\frac{a^2+b^2}{12}.$$

Deducem:

$$I_0 = I_G + S \times \overline{OG}^2 = S\frac{a^2+b^2}{12} + S\frac{a^2}{4} = S\frac{4a^2+b^2}{12}.$$

Deci:

$$k^2 = \frac{I_0}{S} = \frac{4a^2+b^2}{12}.$$

Iar:

$$l = \frac{k^2}{d} = \frac{4a^2 + b^2}{6a}.$$

Sau ţinând seama de (1):

$$l = \frac{4a^4 + S^2}{6a^3}.$$

Minimul lui T dat de (2) corespunde minimului lui l:

$$\frac{dl}{da} = \frac{4a^4 - 3S^2}{6a^4} = 0.$$

De unde:

$$a = \sqrt[4]{\frac{3S^2}{4}} \qquad b = \sqrt[4]{\frac{4S^2}{3}}.$$

AL. ST.

EXERCIŢII

34. Fie A', B', C' punctele diametral opuse lui A, B, C în cercul ABC, iar A_1, B_1, C_1 mijloacele lui BC, CA, AB.

Se uneşte A' cu B_1 şi C_1, B' cu C_1 şi A_1, iar C' cu A_1 şi B_1.

Să se arate că dreptele B_1C' cu C_1B', A_1C' cu C_1A', B_1A' cu A_1B' se întâlnesc în M, N, P respectiv pe AA', BB', CC', iar cercul MNP este de rază cât o treime din raza cercului ABC şi concentric cu acesta.

N. N. VELICESCU.

R. In triunghiul dreptunghiu BAB', AO este mediana din A, iar $B'C_1$ mediana din B' pe BA. Punctul lor de intersecţie M ne dă

$$\overline{OM} = \frac{1}{3}\overline{OA}.$$

In triunghiul dreptunghiu CAC' în care AO este mediana din A pe CC', iar $C'B_1$ mediana din C' pe AC; $C'B_1$ cu AO trebuie să se taie astfel ca segmentul mărginit de O şi punctul de întâlnire să fie $\frac{1}{3}\overline{OA}$, deci tot în M.

Analog se demonstrează că N şi P sunt pe BB', CC'.

Cum AO=BO=CO, rezultă după cele văzute că OM=ON=OP=1/3 R (R fiind raza cercului ABC), adică cercul MNP este concentric cu cercul ABC şi cu o rază cât a treia parte din a lui ABC.

35. Dacă $a + b + c = 0$, avem

$$F_1 = \Sigma (1 + ab)(b - c)(c - a) = -\frac{1}{4}\Sigma a^2 (6 + \Sigma a^2)$$

$$F_2 = \Sigma (1 - ab)(b + c)(c + a) = -\frac{1}{4}\Sigma a^2 (2 + \Sigma a^2).$$

F. TURTOIU.

R. Făcând desvoltările, avem

$$E_1 = \Sigma ab - \Sigma a^2 - \Sigma a^2 b^2 + abc\,\Sigma a$$

$$E_2 = 3\,\Sigma ab + \Sigma a^2 - \Sigma a^2 b^2 - 3\,abc\,\Sigma a$$

dar

$$\Sigma a = 0 \quad , \quad \Sigma a^2 = -2\,\Sigma ab \quad , \quad \Sigma a^2 b^2 = \frac{1}{4}(\Sigma a^2)^2 - 2abc\,\Sigma a = \frac{1}{4}(\Sigma a^2)^2;$$

de unde, înlocuind, se verifică identitățile.

36. Să se găsească un număr întreg, astfel ca dublul logaritmului său să întreacă cu 1 logaritmul numărului dublu.

S-LT. M. GRUMĂZESCU.

R. In general fie n numărul cu care întrece dublul logaritmului unui număr întreg logaritmul numărului de două ori mai mare.

Avem ecuația

$$2\log x = n + \log 2x$$

unde x este numărul căutat.

Mai putem scrie:

$$2\log x = \log 10^n + \log 2x$$

$$2\log x = \log 10^n . 2x.$$

De unde avem ecuația:

$$x^2 - 2 . 10^n x = 0$$

care ne dă:

$$x = 0 \qquad x = 2 . 10^n .$$

Pentru $n = 1$, cazul problemei noastre, obținem soluția:

$$x = 20.$$

37. Să se calculeze determinanții:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \cos^2 A & \cos^2 B & \sin^2 C & \operatorname{cotg} B \\ \cos^2 B & \cos^2 C & \sin^2 A & \operatorname{cotg} C \\ \cos^2 C & \cos^2 A & \sin^2 B & \operatorname{cotg} A \\ -\sin 2A & \sin 2B & \sin 2C & 2 \end{vmatrix} ; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos^2 A & \sin^2 B & \cos^2 C & 1 \\ \cos^2 B & \sin^2 C & \cos^2 A & 1 \\ \cos^2 C & \sin^2 A & \cos^2 B & 1 \\ -\sin 2A & \sin 2B & \sin 2C & 2 \end{vmatrix}$$

TUDOR STOICESCU.

R. Amplific atât în Δ_1 cât şi în Δ_2 coloana a 4-a cu $-2\sin A \sin B \sin C$ şi adun în ambii coloana 4-a şi a 3-a la coloana a doua; capăt astfel 2 coloane identice, adică prima coloană şi a doua, căci în primele 3 linii voi avea relaţii de forma:

$$\cos^2 A = \cos^2 B + \sin^2 C - 2 \sin A \cos B \sin C$$

şi

$$\cos^2 A = \sin^2 B + \cos^2 C - 2 \sin A \sin B \sin C.$$

(A se vedea „Gazeta Matematică" Supliment cu exerciţii, Nr. 1, anul IV, pag. 6, Ex. 243). Ultimile linii atât în Δ_1 cât şi Δ_2 devin:

$$-\sin 2A = \sin 2B + \sin 2C - 4 \sin A \sin B \sin C$$

adică

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C,$$

relaţie cunoscută; deci

$$\Delta_1 = \Delta_2 = 0.$$

PROBLEME PROPUSE

5203 [1]). Să se calculeze suma

$$S_n = 1 + 2.3 + 4 + 5.6 + \ldots + m + (m+1)(m+2) + \ldots$$

compusă din n termeni.

Să se calculeze suma seriei

$$S = \frac{1}{1} - \frac{4}{2.3} + \frac{1}{4} - \frac{7}{5.6} + \frac{1}{7} - \frac{10}{8.9} + \ldots$$

VIRGIL GHIŢESCU.

5347. Din o foaie dată de hârtie dreptunghiulară având dimensiunile A, B se taie bucăţele dreptunghiulare de dimensiunile a, b. Care este cel mai mare număr de bucăţele care se poate scoate?

I. IONESCU.

1) Problema propusă sub Nr. 5203 propusă în Nr. 2, Vol. XLV, a mai fost publicată sub Nr. 5159, Vol. XLIV, Nr. 11, din care cauză anulându-se se înlocueşte cu cea de mai sus.

5348. Să se găsească un număr ai cărui factori primi sunt *2, 5, 7,* iar suma divizorilor lui este *26505.*

S-LT. M. GRUMĂZESCU.

5349. Să se determine forma generală a numerelor, care scrise în două sisteme de numeraţie diferite au aceeaşi terminaţie de *n* cifre (Exemplu: Numărul *9383977* din sistemul zecimal în sistemul cu baza *7* se scrie *142522351*, iar în sistemul cu baza *9* se scrie *18582351*).

IOAN B. FLORESCU.

5350. Să se găsească toate progresiile întregi

$$\div z_1 u_1 . z_2 u_2 \ldots z_n u_n$$

cu termenii de două cifre, ştiind că în întreaga progresie nu este nici o cifră întrebuinţată de două ori.

G-L GH. BUICLIU.

5351. Să se stabilească o regulă generală pentru scrierea imediată a câtului unui număr oarecare N printr'un număr întreg de forma 999...99, de *n* cifre.

Aplicaţiune. Fără a face împărţirea să se scrie direct câtul diviziunii prin 99 a numărului 201*a* 203,01 în care *a* reprezintă o cifră oarecare.

COMANDOR GR. ZAPAN.

5352. Câţi termeni are o progresie aritmetică, cu raţia *3,* ştiind că se găsesc *56* termeni care au pe *5* drept cel mai mare codivizor cu numărul de termeni?

COMANDOR I. LINTEŞ.

5353. Fie în triunghiul ABC, S piciorul simedianei pe BC şi I un punct arbitrar pe una din bisectoarele unghiului A; o dreaptă Δ ce trece prin S, taie pe AC, AB în β, γ; Iβ, Iγ taie pe AB, AC în C', B'. Dreptele B'C', SI se taie pe mediana din A.

N. N. MIHĂILEANU.

5354. Dacă M, N sunt două puncte situate pe axul radical al celor două cercuri LEMOINE ale unui triunghiu, P_m şi P_n puterile acestor puncte în raport cu cercul lui BROCARD, iar K punctul lui LEMOINE, să se stabilească relaţia:

$$3P_m \cdot \overline{NK} + 3P_n \cdot \overline{KM} + \overline{MN}^3 + \overline{NK}^3 + \overline{KM}^3 = 0.$$

C. IONESCU-BUJOR.

5355. Se dă un unghiu *xoy*, o dreaptă fixă Δ şi un punct fix A pe OX. Pe Δ se ia un punct variabil M. Dreapta AM taie pe OY în punctul N; prin N se duce o dreaptă de înclinare α pe OX şi fie H punctul de întâlnire al acestei drepte cu OM. Să se găsească:

1°. Locul punctului H când α este constant este o hiperbolă.

2°. Înfăşurătoarea asimptotelor acestei hiperbole când α variază.

GH. D. SIMIONESCU.

5356. Se dă un cerc O şi fie P un punct fix în planul său. Dacă M este un punct mobil pe cerc, să se găsească înfăşurătoarea perpendicularei duse la mijlocul segmentului PM.

LT. I. NICOLAU.

5357. Fie triunghiul ABC, înscris în parabola (P); vârful A rămânând fix, iar B, C variabile să se găsească locul picioarelor simedianei vârfului A, astfel încât $\overline{AB} = k \cdot \overline{AC}$.

C. MIHU.

5358. Pe o dreaptă XX' se consideră transformarea:

$$x'(ax^2 + bx + c) + (px^2 + qx + r) = 0,$$

care face să corespundă unui punct $N(x')$ două puncte $N_1(x_1)$ şi $N_2(x_2)$. Să se arate că punctele N_1 şi N_2 descriu o involuţie pe dreapta XX'.

ALEXANDRU NICULESCU.

5359. Fie D şi D_i determinanţii ce se formează din matricea

$$M \equiv \begin{vmatrix} \alpha_1 & x & x \ldots x & x \\ x & \alpha_2 & x \ldots x & x \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ x & x & x \ldots \alpha_{n-1} & x \\ x & x & x \ldots x & \alpha_n \\ 1 & 1 & 1 \ldots 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Dacă notăm cu:

$$f(x) \equiv (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$$

avem relaţia:

$$f(x) = (-1)^n \left[D - x \sum_1^n Di \right].$$

CĂP. MIHAIL I. FOCŞENEANU.

5360. Să se determine numerele întregi α, β, γ astfel ca să avem relaţia

$$\frac{1}{\alpha} \Sigma a^\alpha = \frac{1}{\beta} \Sigma a^\beta \cdot \frac{1}{\gamma} \Sigma a^\gamma,$$

sumele fiind întinse la permutările circulare între rădăcinile a, b, c ale ecuaţiei

$$x^3 + px + q = 0.$$

G. G. CONSTANTINESCU.

5361. Suprafaţa unui triunghiu oarecare în funcţie de laturile sale fiind dată de formula

$$S = \frac{1}{4k}(a^2 + b^2 + c^2),$$

să se arate că avem:

$$\operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C = k$$

şi reciproc.

Să se determine laturile de variaţie ale lui k.

Să se verifice pentru $k = \sqrt{3}$ rezultatele obţinute.

VIRGIL GHIŢESCU.

TABLA DE MATERII

A. ARTICOLE

1. Aritmetica şi Teoria numerelor

Pag.

I. B. Florescu . . . . . Produsul a patru numere întregi în progresie aritmetică poate fi un patrat? 406, 463
M. Ghermănescu . . . . Egalităţile multigrade 127
Cpt. C-dor I. Linteş . . Extinderi în legătură cu indicatorii 20

2. Geometria

N. N. Mihăileanu . . . O generalizare a relaţiilor din triunghiul dreptunghic 344
Iulian Petrescu . . . . Câteva consideraţii de geometria triunghiului . 571
V. Thébault . . . . . Asupra unei sfere asociate tetraedrului 292

3. Algebra

Th. Angheluţă . . . . . Formarea câtului şi restului a două polinoame când împărţitorul este descompus în factori de gradul întâi 459, 505
D. Georgescu-Piteşti . . Dezvoltarea unui polinom întreg în x, în raport cu rădăcinile sale 72
Gh. Th. Gheorghiu . . . Asupra studiului variaţiei unei funcţiuni . . . 181
I. V. Mătieş . . . . . Contribuţiuni la rezolvarea ecuaţiilor de gradul al patrulea 565
Tib. Popoviciu . . . . . Asupra problemei 4567 232
P. Sergescu . . . . . Asupra limitării modulelor rădăcinilor ecuaţiilor algebrice 512

4. Geometria analitică şi infinitezimală

N. Abramescu . . . . . Apolaritatea a două forme binare şi a unei forme binare cu o formă cubică 177
D. V. Ionescu . . . . . Asupra unei teoreme a D-lui G-l Gh. Buicliu 64
A. Myller . . . . . Despre o curbă specială 623

5. Mecanica

Pag.

T. Vescan . . . . . O generalizare a principiului inerţiei 516

6. Filozofia Matematică

Cr. Niculescu . . . . . Metoda în matematică cu prilejul unei cărţi noi despre o discuţie veche 173

T. Vescan . . . . . Simultaneitate şi ulterioritate 57, 118

7. Istoria Matematicilor

Gh. Th. Gheorghiu . . GEORGE ŢIŢEICA. I. Viaţa. Omul 169

Gh. Th. Gheorghiu . . GEORGE ŢIŢEICA. II. Lucrări de matematici superioare 281, 339, 396, 452

V. Ghiţescu . . . . . Două bilete în original ale lui LE VERRIER . . 449

I. Ionescu . . . . . Algebra lui CONSTANTIN ŞERBESCU-LU 225

I. Ionescu . . . . . ANTIOCH CANTEMIR 337, 393

I. Ionescu . . . . . Observatorul astronomic Batthyanian din Alba Iulia 617

V. Marian . . . . . Disertaţia lui JOHANN BINDER 561

V. Marian . . . . . Impresiile contelui SAMUIL TELEKI despre matematicieni străini 113, 229, 289

Ilie Popa . . . . . D. ISOPESCUL 457

B. CHESTIUNI IN LEGĂTURĂ CU REDACŢIA ŞI SOCIETATEA „GAZETA MATEMATICĂ“

1. Diverse

*** . . . . . Lista membrilor Societăţii *«Gazeta Matematică»* 5

*** . . . . . Membrii decedaţi 19

2. Premii şi concursuri

Delegaţia Societăţii . . Concursul *«Gazeta Matematică»* din 1940 . . 24

D. A. Stan, D. V. Stoica . Premii, burse şi publicaţiuni din veniturile Societăţii *«Gazeta Matematică»* 26

O. Onicescu, P. Sergescu, Cpt. C-dor Gr. Zapan . Raport asupra premiului „VASILE CONTA“ . . 133

E. G. Botea, C. Ionescu-Bujor, D. Stoica . . . Raportul comisiunei pentru acordarea premiului „N. G. BOTEA“ 238

*** . . . . . Programa Analitică hotărîtă pentru Concursul *«Gazeta Matematică»* pe anul 1940 239

Delegaţia Societăţii . . Concursul *«Gazeta Matematică»* 296

Delegaţia Societăţii . . Concursul *«Gazeta Matematică»* 346

G-l Gh. Buicliu, I. Ionescu,

		Pag.
Cpt. C-dor Gr. Zapan	Premiul de aritmetică	347
Gh. Dumitrescu, Al. A. Roşu, D. Stoica	Premiul „Inginer AL. ROŞU"	409
Gh. Th. Gheorghiu, D. V. Ionescu, D. Stoica	Premiul „Inginer H. CAPRIEL", Subiectul propus	465
N. Abramescu, Th. Angheluţă, Al. Bunescu	Raport asupra premiului de algebră pe 1939	467
C. Ionescu-Bujor, Al. Niculescu, Ing. D. Stan	Raportul comisiunei pentru acordarea premiului „V. CRISTESCU"	523
Gh. Th. Gheorghiu, D. Stoica, O. N. Ţino	Raportul comisiunei pentru acordarea premiului de geometrie elementară „G. ŢIŢEICA"	573
C. Orăşeanu, A. I. Stoenescu, C-dor Zapan	Raport pentru decernarea premiului „SPIRU HARET"	628

C. NOTE MATEMATICE

1. Aritmetica şi teoria numerelor

18[1])	*G-l Gh. Buicliu*	Soluţiile problemei 4579	244
31.	*G-l Gh. Buicliu*	Numere interesante cu 10 cifre diferite	412
41.	*G-l Gh. Buicliu*	Numere interesante cu 10 cifre diferite	525
47.	*G-l Gh. Buicliu*	Numere interesante cu 10 cifre diferite	575
2.	*St. Cetăţeanu*	Numere interesante cu 10 cifre diferite	29
8.	*St. Cetăţeanu*	Numere interesante cu 10 cifre diferite	79
14.	*St. Cetăţeanu*	Asupra problemei 4951	192
21.	*G. G. Constantinescu*	Asupra problemei 3911	298
7.	*M. Ghermănescu*	Asupra problemei 3911	76
34.	*M. Ghermănescu*	Asupra problemei 4927	469
10.	*A. Gloden*	Câteva ecuaţii multigrade	134
22.	*Cpt. C-dor I. Linteş.*	Asupra problemelor 4676 şi 4844	300
35.	*Cpt. C-dor I. Linteş.*	Relaţiuni cu indicatori	472
48.	*Cpt. C-dor I. Linteş.*	O consecinţă în legătură cu indicatorii	577
6.	*A. Moessner*	Notă asupra relaţiilor multigrade	75
13.	*A. Moessner*	O particularitate a numărului 3	192
37.	*A. Moessner*	Un sistem multigrad	475
36.	*Tib. Popoviciu*	Asupra problemei 3354	472
49.	*Tib. Popoviciu*	Incă ceva despre problema 3911	578
38.	*I. I. Stamate*	O ecuaţie diofantiană	476
52.	*V. Thébault*	Curiozitate aritmetică	629

1) Numerele din această coloană indică numărul de ordine al notei în Vol. XLV.

2. Geometria

			Pag.
55.	*G-l St. Burileanu*	O problemă de Construcţie	632
5.	*V. Ghiţescu*	Notă asupra articolului „*Proprietăţi ale pseudo-rombului*“	30
4.	*C. Ionescu-Bujor*	Asupra patrulaterului ortodiagonal	29
42.	*N. N. Mihăileanu*	O demonstraţie directă a teoremei lui CEVA	526
53.	*G-l Gh. I. Popescu*	Asupra unei probleme de Construcţie	629
24.	*M. Al. Vasilescu-Stabu*	Teorema celor trei perpendiculare	303

3. Algebra

39.	*V. Cristescu*	Asupra exerciţiului 42 Cap. XIII din *Culegerea de probleme de algebră*	524
11.	*O. Enulescu*	Asupra problemei 4385	136
9.	*M. Ghermănescu*	Asupra problemei 1379	79
12.	*M. Ghermănescu*	Observaţii la nota precedentă	136
32.	*M. Ghermănescu*	Asupra problemei 1876	414
23.	*Tib. Popoviciu*	Asupra problemei 4258	302
36.	*Tib. Popoviciu*	Asupra problemei 3354	472
44.	*N. O. Zaharia*	Asupra unei note	527

4. Trigonometria

15.	*V. Ghiţescu*	Determinarea relaţiilor de mărime dintre liniile trigonometrice ale unui arc	192
25.	*I. I. Solomon*	Asupra unei teoreme a lui MANNHEIM	303

5. Analiza infinitezimală

54.	*G. G. Constantinescu*	Asupra unei ecuaţii funcţionale	632

6. Mecanica

28.	*Al. Stoenescu*	Asupra problemei 4240	349

7. Istoria Matematicelor

45.	*I. Ionescu*	Măsurarea suprafeţelor la noi acum 110 ani	574
51.	*I. Ionescu*	Triunghiul egiptian	629
16.	*D. Mangéron*	Acum o sută de ani în lumea matematică	241

8. Diverse

3.	*M. I. Focşeneanu*	Asupra notei „O formă a restului diviziunei de polinoame“	29
1.	*I. Ionescu*	Un mod de a scrie datele	28
17.	*I. Ionescu*	Raporturile trigonometrice	243
19.	*I. Ionescu*	Cal-oră	297
20.	*I. Ionescu*	Asupra problemei 5210	297
26.	*I. Ionescu*	Consideraţiuni practice la alcătuirea şi rezolvarea problemelor de matematici	348

Pag.

29. *I. Ionescu* . . . . . Probe matematice 410
30. *I. Ionescu* . . . . . Asupra unei note din revista «*Pitagora*» . . . 410
33. *I. Ionescu* . . . . . O progresie geometrică 469
40. *I. Ionescu* . . . . . De când moşiile au şi lungime nu numai lăţime 524
27. *Cpt. C-dor I. Linteş* . Asupra articolului „*Extinderi în legătură cu indicatorii*“ 349
50. *M. L. Rusu* . . . . Teorema celor 3 perpendiculare 580
43. *Al. Stoenescu* . . . Asupra problemei 5243 527

9. Necrologuri

46. *V. Marian* . . . . . † T. L. NEATH 575

D. CHESTIUNI DE EXAMEN

Şcoala Politechnică „Regele Carol II“ din Bucureşti. Examenul de admitere în ciclul I 137
Şcoala Politechnică „Regele Carol II“ din Bucureşti. Examenul de admitere în anul I 355
Şcoala Politechnică „Regele Carol II“ din Bucureşti. Examenul de geometrie analitică 420

E. BIBLIOGRAFII

1. Lucrări recenzate [1])

I. Ionescu . . . . . Disquisitiones Mathematicae et Physicae . . . 634
I. Ionescu . . . . . GH. EM. FILIPESCU. Statica grafică şi Rezistenţa materialelor 417
C. Ionescu-Bujor. . . . R. GARNIER. Leçons d'Algébre et de géométrie. 32
C. Ionescu-Bujor. . . . M. N. IORGA. Tratat de desemn geometric . . 247
C. Ionescu-Bujor . . . . P. LEVY. Théorie de l'addition des variables aléatoires 637
C. Ionescu-Bujor. . . . G. SINGIER. Les correspondances algébriques . 583
V. Marian. . . . . ILIE A. POPA. Le modèle italien d'un ancien traité d'Arithmétique 363
P. Sergescu . . . . . E. BOREL & A. CHÉRON. Théorie mathématique du bridge à la portée de tous. 582
P. Sergescu . . . . . G. T. GHEORGHIU. Probleme de analiză matematică 636
G. D. Simionescu . . . Ministerul Aerului şi Marinei. Chestionar pregătitor de matematici şi ştiinţe fizico-chimice. 529
Al. Stoenescu . . . . . ŞT. G. BĂLAN. Culegere de probleme de mecanică. 247
Al. Stoenescu . . . . . W. F. OSGOOD. Mechanics. 305

---

1) S'au scris recenzorii în ordine alfabetică, iar la fiecare recenzor lucrările recenzate sunt înscrise tot în ordine alfabetică.

2. Lucrări nerecenzate

		Pag.
N. Abramescu	Complectări de geometrie elementară	530
D. R. Abrudeanu	Aspecte contabile	142
V. Alaci	Trigonometria patratică	142, 246
Th. Angheluță	Curs de Algebră superioară	363
Ev. Artaza	Saneamento urbano en la republica Argentina	81
E. Borel & A. Chéron	Théorie mathématique du bridge pour tous	530
M. St. Botez	Metode de rezolvare a ecuațiilor trigonometrice.	478
C. Budeanu	Quelques confirmations expérimentales de la théorie des phénomènes déformants	247
L. Cagniard	Reflexion et refraction des ondes séismiques progressives	305
Florica Margareta Caracudovici	Aplicații geometrice ale calculului vectorial	582
J. P. Castineiras	El projecto economico de estructuras de hormigan armado	305
G. G. Constantinescu	Criteriile de convergență a seriilor	419
I. Curea	Stațiunea seismică a observatorului astronomic din Cluj	636
W. Doeblin	Le cas discontinu des probabilités en chaîne.	419
A. G. Dominguez	Sobre les series de functiones HERMITE	419
A. G. Dominguez	Una nueva demonstracion del teorema limite del calculo de probabilidades	419
O. Enulescu	Teorema lui ROLLE	305
N. Gavrilan	Curs sistematic și metodic de aritmetică practică pentru repetarea materiei după programele liceelor și gimnaziilor de tot felul, școalelor normale precum și seminarilor.	419
Gh. Th. Gheorghiu	Probleme de analiză matematică	530
B. Hostinsky	CAUCHY ur Problem pro differenciálni rovnice lineărni	419
B. Hostinsky	Sur une équation fonctionelle de la théorie des probabilités	419
G. Loria	Le Matematiche in Ispagna e in Argentina.	419
N. N. Mihăileanu	Aritmetica pentru clasa I-a secundară	31
N. N. Mihăileanu	Aritmetica pentru clasa II-a secundară	31
N. N. Mihăileanu	Aritmetica pentru clasa III-a secundară	31
N. N. Mihăileanu	Raportul anarmonic	419
N. N. Mihăileanu	Transformarea prin inversiune	142
N. Obrechkoff	Sur la sommation absolue par la transformation D'EULER des series divergentes	419
M. Petrovich	Remarques arithmetiqués sur une équation differentielle du premier ordre	419
M. Pizanty	La commercialisation des produits pétrolifères en 1939	478

Pag.

Victor Popescu . . . . Retragerea din învățământul technic superior a D-lui Prof. I. IONESCU 142
B. Pospisil . . . . . On bicompact spaces. 419
C. Schitenescu-Schiteanu. Mecanica consecință a geometriei. 142
L. Seifert . . . . . Contributions à la théorie polaire d'une variété cubique 419
P. Sergescu . . . . . Les mathématiques à Paris au moyen âge . . . 142
P. Sergescu . . . . . Some important dates in the evolution of french mathematics 142
P. Sergescu . . . . . Un mare dascăl: T. COSTESCU 582
Al. I. Stoenescu . . . . Probleme de oscilație 195
Al. I. Stoenescu . . . . Teoria relativității 31
Al. I. Stoenescu . . . . Unități de măsură în mecanică 31
S. Stoilov . . . . . Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques 305
T. Vescan . . . . . Note sur les orbites relativistes des planètes. . 32

3. Extrase, Suplimente, Teze

N. Abramescu . . . . . L'apolarité d'une forme binaire et d'une forme cubique 530
N. Abramescu . . . . . Nouvelle méthode pour obtenir la cubique que donne les tangentes de DARBOUX en un point d'une surface. 530
N. Abramescu . . . . . Nouvelle propriété de la quartique piriforme . 530
Th. Angheluță . . . . . Sur une limite des modules des zeros des polynomes 246
Th. Angheluță . . . . . Sur une propriété des polynomes. 418
R. Bădescu . . . . . Semplificazioni ed estensioni del metodo di PICONES per l'integrazione delle equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordini di tipo iperbolica 305
R. Bădescu . . . . . Sopra una certa serie di LAURENT di due variable 305
R. Bădescu . . . . . Sur l'extraction de l'or par la méthode de la cyanuration 305
R. Bădescu . . . . . Sur la méthode de la cyanuration dans l'extraction de l'or 305
O. Borůvka . . . . . Studies on multiplicative systèmes 418
M. St. Botez . . . . . Asupra lui ABEL 363
M. St. Botez. . . . . . Sur la zone de convergence des quelques séries syntagmatiques 363
M. S. Botez . . . . . Asupra unor sume trigonometrice 636
M. S. Botez . . . . . O transformare birațională 636

		Pag.
M. S. Botez	Sur le problème de la projection bicentrale	636
V. Cupr	Lokalni clanky na kovových electrodach	419
M. Ghermănescu	Determinarea presiunilor în gurile de foc	478
M. Ghermănescu	Sur la variation du moment d'inertie par rapport aux plans passant par une droite	478
M. Ghermănescu	Sur une classe nouvelle des noyaux de FREDHOLM.	478
M. Ghermănescu	Une inégalité pour les algébroïdes	478
P. Humbert	MAURICE D'OCAGNE	142
Cpt. C-dor Ing. I. Linteş.	Balistica antiaeriană	582
Lt.-Col. I. Linteş	Thèses	582
M. Manoilescu	Die theoretische Problematik des Aussenhandels	363, 582
V. Marian	Vechile greutăţi medicale din Ardeal	583
I. I. Popa	A la recherche d'un manuscrit perdu	530
P. Sergescu	Les mathématiques en moyen âge	142
D. A. Stan	Grinzi curbe plane, încărcate cu forţe normale pe planul lor	582
V. Thébault	Géométrie du triangle et du tétraèdre	478
V. Thébault	Rectangles semblables associés à un triangle	478
Th. Vescan	La théorie des courbes définies comme l'intersection des deux surfaces représentées parametriquement	305
Th. Vescan	Teze	32
E. Vişa	Coordonate hyperbolice	419

4. Reviste, periodice

American Mathematical Society. Semicennial publications 80
Anales de la Sociedad Cientifica Argentina . 31, 141, 195, 246, 304, 418, 477
Arta şi technica grafică 141, 362
Boletin Matematico 31, 141, 195, 246, 304, 477, 528, 580
Buletinul „I. R. E." 31, 246, 362, 580
Buletinul Institutului Român pentru betoane, construcţii şi drumuri . . . 418
Buletinul Societăţii Politecnice din România 636
Bulletin de la section scientifique 580
Bulletin de mathématiques et de phisiques pures et appliquées de l'École Polytechnique „Roi Carol II" de Bucarest 580
Bulletin of the American Mathematical Society . . 31, 80, 141, 195, 304, 362, 418, 477
Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara 304, 581
Cuvântul Şcoalei 418, 581
Deutsche Mathematik 304, 418, 477, 581
Gazeta Matematică, Supliment cu exerciţii . . 81, 195, 246, 305, 363, 418, 528
Informaciones generales 31

Pag.

Journal de Mathématiques élémentaires . . 141, 195, 246, 304, 362, 418, 477, 478, 528, 581
Mathematica 528
Mathesis 31, 246, 478
New Archief voor Wiskunde 304
Pitagora 80, 141, 246, 304, 362, 418, 478, 581
Publicationes especiales 142
Revista Matematică din Timişoara . . . 81, 246, 362, 363, 418, 478, 581, 636
Revista Ştiinţifică „*V. Adamachi*“ 142
România aeriană 195, 246, 304, 478, 636
Sphinx 31, 195
Ştiinţă şi Progres 305, 418, 581
Ţara visurilor noastre 581
Universidad nacional de La Plata 582

F. CERERI *)

Nr. Cererii	*Pagina la care a fost:* Propusă	Răspunsul	*Nr. Cererii*	*Pagina la care a fost:* Propusă	Răspunsul
1 . . .	24 (XXI)	?	32 . . .	277 (XXII)	259 (XXIII) 39, 186 (XXIV)?
4 . . .	24 „	?	33 . . .	308 „	?
5 . . .	24 „	?	34 . . .	40 (XXIII)	?
7 . . .	59 „	?	35 . . .	40 „	?
8 . . .	59 „	?	36 . . .	65 „	?
10 . . .	91 „	?	37 . . .	86 „	211 (XXIII) ?
11 . . .	144 „	?	38 . . .	112 „	?
12 . . .	145 „	?	39 . . .	137 „	?
13 . . .	145 „	219 (XXI) ?	40 . . .	157 „	?
14 . . .	183 „	?	41 . . .	185 „	?
15 . . .	219 „	?	42 . . .	211 „	?
16 . . .	254 „	?	43 . . .	235 „	?
17 . . .	294 „	264 (XXXVIII) ?	44 . . .	259 „	?
20 . . .	420 „	?	45 . . .	275 „	?
23 . . .	17 (XXII)	?	46 . . .	13 (XXIV)	?
24 . . .	75 „	?	49 . . .	57 „	?
26 . . .	161 „	?	50 . . .	70 „	?
27 . . .	187 „	?	51 . . .	88 „	?
28 . . .	213 „	?	52 . .	103 „	?
29 . . .	231 „	?	55 . . .	168 „	?
30 . . .	258 „	?	56 . . .	168 „	?
31 . . .	277 „	?	58 . . .	16 (XXV)	?

*) In această tabelă semnul ? arată că nu s'a primit răspuns sau că se mai aşteaptă răspuns dacă e pusă după răspuns. Litera A înseamnă că răspunsul trebue trimis autorului cererii.

Nr. Cererii	Pagina la care a fost: Propusă	Răspunsul
59	36 (XXV)	?
60	58 „	?
61	58 „	?
62	71 „	?
63	71 „	?
64	122 „	?
65	122 „	?
66	155 „	?
67	175 „	?
68	199 „	?
70	223 „	?
71	251 „	?
73	45 (XXVI)	?
74	45 „	?
75	94 „	?
77	198 „	?
78	227 „	?
80	263 „	?
81	27 (XXVII)	?
82	27 „	160 (XXVII)?
83	160 „	?
84	197 „	?
85	197 „	?
86	240 „	?
87	283 „	?
88	329 „	?
89	361 „	?
91	26 (XXVIII)	?
92	57 „	?
93	57 „	?
94	104 „	363
95	136 „	?
96	136 „	?
97	213 „	?
98	213 „	?
99	256 „	363
100	297 „	?
101	342 „	?
102	458 „	?
103	458 „	?
104	24 (XXIX)	?
105	58 „	?
107	145 „	?
108	226 „	?
109	298 „	?
112	419 „	?
113	454 „	?
115	22 (XXX)	?
116	102 „	?
117	102 „	?
118	140 „	?
119	218 „	?
120	261 „	?
122	306 „	?
123	337 (XXX)	?
124	383 „	?
126	423 „	?
128	33 (XXXI)	?
129	55 „	?
130	56 „	?
131	100 „	?
134	184 „	?
142	53 (XXXII)	?
143	102 „	?
144	142 „	?
146	216 „	?
148	296 „	?
149	343 „	?
152	19 (XXXIII)	19(XXXIII)?
153	51 „	?
154	51 „	?
157	146 „	?
158	185 „	?
159	217 „	?
162	295 „	?
163	341 „	?
166	457 „	?
179	385 (XXXVI)	?
181	24 (XXXV)	?
186	216 „	?
193	466 „	?
196	57 (XXXVI)	?
201	221 „	?
207	414 „	?
208	462 „	?
210	62 (XXXVII)	?
211	98 „	?
212	137 „	?
214	217 „	?
215	260 „	?
219	425 „	?
220	448 „	?
223	94 (XXXVIII)	?
227	57 (XXXIX)	?
235	222 „	?
237	360 (XXXIX)	?
238	409 „	?
239	458 „	?
243	212 (XL)	?
244	266 „	?
245	309 „	?
247	499 (XL)	?
248	553 „	?
250	148 (XLI)	?
251	189 „	?
252	241 „	?
253	292 „	?
254	343 „	?

Nr. cererii	Pagina la care a fost: Propusă	Răspunsul
255	384 (XLI)	?
256	485 „	?
257	533 „	?
259	629 „	?
262	251 (XLII)	?
263	307 „	?
264	368 „	?
265	422 „	?
266	530 „	?
267	588 „	?
268	639 „	?
269	34 (XLIII)	?
270	90 „	?
271	138 „	?
273	255 „	?
274	304 (XLIII)	?
275	423 „	?
276	477 „	?
277	539 „	?
279	639 (XLIII)	?
280	32 (XLIV)	?
281 *)	137 „	32
282	309 „	?
283 **)	368 „	81
284	479 „	?
285	530 „	638
286	647 „	?
287	81 (XLV)	142, 196
288	196 „	A
289	248 „	?
290	306 „	?
291	419 „	?
292	479 „	?
293	479 „	584, 638
294	530 „	?
295	584 „	?
296	638 „	?

G. DIVERSE

Pag.

1. Comemorarea lui G. ŢIŢEICA 363
2. Şedinţele Societăţii „*Gazeta Matematică*“ 197, 584
3. Sporirea Bibliotecii „*Gazeta Matematică*“ . . . 32, 82, 143, 197, 248, 306, 364, 420, 479, 530, 584, 639
4. Un apel 479

H. PROBLEME PROPUSE ŞI REZOLVATE

a) Repartizarea problemelor propuse pe materii

Aritmetica şi teoria numerelor . . . . . 4474, 667, 914, 5166, 81, 2, 3, 4, 95, 6, 7, 210, 1, 2, 25, 6, 41, 2, 3, 57, 8, 72, 3, 4, 87, 8, 9, 90, 1, 303, 4, 18, 33, 4, 5, 48, 9, 50, 1, 2.

Geometria . . . . . 4464, 5180, 5, 6, 7, 8, 9, 90, 8, 9, 200, 1, 14, 5, 6, 27, 8, 9, 30, 1, 44, 5, 6, 7, 56, 9, 60, 75, 6 7, 8, 92, 3, 302, 5, 6, 7, 8, 9, 17, 9, 20, 1, 32, 6, 7, 8, 9, 47, 53, 4.

Algebra . . . . . 5191, 2, 4, 202, 3, 4, 13, 7, 8, 20, 32, 3, 4, 48, 9, 61, 2, 3, 4, 79, 81, 94, 5, 6, 7, 310, 3, 23, 4, 5, 6, 7, 42, 3, 59, 60.

Trigonometria . . . . . 5193, 235, 6, 50, 1, 2, 65, 71, 80, 2, 3, 4, 98, 9, 311, 28, 9, 44, 61.

---

*) A se vedea şi răspunsul dela pag. 588 Vol. XLIV.

**) A se vedea şi răspunsul dela pag. 428 Vol. XLIV.

Pag.

Geometria analitică şi diferenţială . . . . . 5205, 6, 7, 8, 19, 21, 40, 54, 66, 7, 85, 300, 1, 12, 22, 40, 1, 55, 6, 7, 8.
Mecanica . . . . . 5209, 24, 37, 8, 9, 68, 9, 70, 314, 5, 6, 30, 45, 6.
Analiza şi calculul integral . . . . . 5222, 3.
Astronomia . . . . . 5253.
Balistica . . . . . 5255, 331.
Fizica . . . . . 5286.

b) Repartizarea problemelor propuse pe autori

N. Abramescu 5240, 341
M. Adam 5236, 50, 84
I. Alexiu 5191
V. Andriescu 5229
Th. Angheluţă 5263, 81, 96
I. S. Antoniu 5209, 60, 80
R. Bădescu 5207, 69, 316
H. Bodnărescu 5247
Gh. Buicliu, G-l 4474, 5181, 98, 213, 26, 44, 67, 72, 91, 305, 29, 33, 50
I. I. Buzincu, S-lt. 5319
St. Cetăţeanu 5288
M. Chiriţă 5324
Th. Gh. Cocea 5188, 200, 59, 306, 20
G. G. Constantinescu 5183, 212, 48, 61, 89, 303, 26, 42, 60
C. Coşniţă 5266
Gh. I. Dumitrescu 5206, 16
I. B. Florescu 5349
V. L. Florescu 5338
M. I. Focşeneanu . . . 5208, 359
R. Georgescu 5285
D. Georgescu-Piteşti 5325
Ad. Gheorghiu . . . 5221, 54, 322
Gh. Th. Gheorghiu 5194, 312, 27, 43
M. Ghermănescu . 4667, 914, 5204, 22, 34, 49, 57, 97, 304, 35
P. I. Ghişoiu 5190
V. Ghiţescu 5203, 99, 361
M. Grumăzescu, S-lt. 5348
I. A. Ilie 5235
D. V. Ionescu 5337
I. Ionescu 5180, 95, 210, 25, 41, 56, 71, 87, 302, 17, 32, 47
C. Ionescu-Bujor . . 5220, 53, 354
C. Ionescu-Ţiu . . . 5202, 62, 344
I. Linteş, C-dor 5166, 84, 239, 55, 331, 5352
Gh. Liteanu, G-l 5193
I. V. Mătieş 5242
Em. Mereuţă 5265, 82, 318
N. N. Mihăileanu . 5187, 99, 214, 31, 51, 77, 340, 53
C. Mihu . . 5223, 8, 64, 98, 313, 57
E. Morţun 5232, 300
I. Nicolau 5356
Al. V. Niculescu 5205, 358
St. E. Olteanu 5252
Iul. Petrescu 5227, 75
M. D. Popa 5308
Ad. Popescu, S-lt. 5295
Gh. Popescu-Botoşani . . . 5294
Al. Popescu-Zorica 5189
I. C. Savin, Lt. 5283
I. D. Schileru-Dili 5273
Gh. D. Simionescu . 5186, 219, 33, 68, 76, 301, 7, 21, 45, 55
T. C. Ştefan 5274
N. D. Stefănescu 5185
Alex. Stoenescu . . 5197, 224, 38, 43, 70, 315, 46
T. Stoicescu 5328
V. Thébault . . 4464, 5196, 258, 90, 309, 23, 34
O. N. Ţino . . . 5211, 30, 310, 36
Gabriela Ţiţeica . . 5237, 314, 30
I. I. Ţiţeica 5218
P. Trofim 5245
N. Vasilescu-Karpen 5286
M. Al. Vasilescu-Stabu . 5182, 293
Gh. Vasiliu 5217
I. C. Vasiliu 5278, 92, 311
E. Vişa 5279
N. O. Zaharia 5292
I. G. Zamfirescu, Lt. 5201, 15, 46, 339
Gr. Zapan C-dor 5351

c) Indicarea paginei la care a fost propusă sau rezolvată

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
485	104 (V), 198 (XVI)	NR
585 *)	172 (VI), 238 (XVI)	
676	148 (VII)	
766	124 (VIII), 319 (XVI), 372 (XXXI)	250
887	172 (IX), 358 (XVI)	NR
914	267 (IX)	
1000 **)	220 „, 438 (XVI)	NR
1008	244 (X), 462 (XVI)	NR
1056	100 (XI)	NR
1092	196 „	479
1146	76 (XII)	NR
1156	100 „	
1180	172 „	
1188	228 „	
1214	296 „	
1236	64 (XIII)	
1270	192 „	NR
1297	288 „	NR
1299	319 „	NR
1310	352 „, 372 (XXXI)	NR
1342	64 (XIV)	
1367	128 „	NR
1398	224 „	
1399 ***)	224 „, 200 (XVI)	423
1412	256 (XIV)	NR
1424	288 „	
1450	352 „	NR
1497	128 (XV)	
1533	224 „	
1553	288 „	NR
1577	352 (XV)	
1591	39 (XVI)	
1632	159 „	
1637	160 „	
1650	200 „	NR
1656	239 „	
1676	279 „	
1679	280 „	
1690	320 „	
1702	360 „	
1711	399 „, 372 (XXXI)	NR
1735 ****)	464 (XVI)	
1753	80 (XVII)	
1764	120 „	NR
1790	240 „	
1823	400 „	
1831	439 „	
1835	440 „	
1840	466 „	
1876	119 (XVIII)	83
1898	199 „	
1906	200 „	531
1911	239 „	
1914 *****)	239 „	NR
1922	278 „	
1929	279 „	NR
1934 ******)	280 „	584
1944	319 „	
1945 *******)	320 „	
1958	359 „	
1959	360 „	NR
1969	399 „	
1987	462 „	144
2004	40 (XIX)	NR
2016	79 „	
2017	80 „	199
2018	80 „	
2024	118 „	

1) Numărul latin din paranteză indică volumul în care problema este propusă. Problemele care au în coloana a doua mai multe numere, au fost publicate sau rectificate de mai multe ori în volumul şi la pagina respectivă.

2) NR însemnează că problema nu a fost încă rezolvată. Pentru celelalte probleme redacţia posedă soluţiuni care nu au fost publicate.

*) Soluţia problemei 585 s'a publicat la pag. 88. Vol. VII. Se mai aşteaptă discuţia la punctele cerute în nota de la finele acelei soluţii.

**) A se vedea lămuriri la pag. 291, Vol. XXXI.

***) Vezi erata pag. 200, Vol. XVI.

****) Vezi erata pag. 168, Vol. XLV.

*****) Vezi erata pag. 280, Vol. XVIII.

******) Vezi erata pag. 320, Vol. XVIII.

*******) Vezi erata pag. 360, Vol. XVIII.

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1]	Rezolvată [2]
2025	119 (XIX)	
2032	120 „	
2038	159 „	
2048	198 „	
2055	200 „	
2056	200 „	
2058	200 „	
2065	239 „	
2070*)	240 „	NR
2074	278 „	NR
2079	279 „	
2083	280 „	
2091	319 „	33
2106	358 „	
2108	359 „	
2110	359 „	
2112	360 „	
2116	398 „	533
2118	399 „	
2129	438 „	534
2130**)	460 „	
2133	439 „	
2144	461 „	
2145	462 „	
2147	462 „	
2170	119 (XX)	NR
2176	120 „	
2197	198 „	
2217	239 „	
2222	240 „	
2227	279 „	
2235	280 „	
2240	318 „	
2247	320 „	
2248	320 „	
2249	320 „	
2250	320 „	
2263	359 „	
2264	360 „	
2265	360 „	
2266	360 „	
2274	398 „	
2284	439 „	
2290	439 „	
2298	462 „	148
2301	462 „	
2302	462 „	
2311	40 (XXI)	
2330	118 „	

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1]	Rezolvată [2]
2332	119 (XXI)	
2338	122 „ / 422 (XXXI)	NR
2343	157 (XXI)	
2344	158 „	
2353	159 „	
2357	199 „	
2365	200 „	
2370	239 „	
2375	240 „	
2381	278 „	
2394	318 „	
2405	320 „ / 423 (XXXI)	308
2422	399 (XXI)	
2423	399 „	
2430	439 „	NR
2435	440 „	
2436	440 „	
2439***)	440 „	NR
2461	32 (XXII)	
2462	62 „	
2466	63 „	
2477	95 „	NR
2497	144 „	
2500	144 „	
2529	262 „	309
2537	287 „	
2539	288 „	
2545	312 „	
2553	47 (XXIII)	
2560	72 „	
2566	120 „	
2569	120 „	
2573	144 „	
2575	168 „	
2577	168 „	NR
2578	168 „	34
2585	215 „	35
2586	216 „	
2587	216 „	NR
2591	240 „	
2593	264 „	
2599	288 „	
2602	318 (XXXI)	
2607	31 (XXIV)	NR
2631	112 „	
2638	127 „	NR
2645	143 „	

*) Vezi erata pag. 280, Vol. XIX.

**) Inlocueşte problema 2130 propusă la pag. 430, Vol. XIX.

***) Pentru definiţia coordonatelor grafostatice, a se vedea nota dela pag. 212, Vol. XXI.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
2647	143 (XXIV)	
2655	191 „	NR
2660	191 „	
2664	24 (XXV)	
2665	24 „	NR
2675	63 „	
2684	80 „	NR
2688	80 „	
2692	108 „	
2694	108 „	. . . 201
2713	143 „	NR
2717	143 „	NR
2727	168 „	. . . 203
2731	191 „	
2735	192 „	. . . 365
2752	264 „	
2758	56 (XXVI)	
2769	79 „	NR
2778	104 „	
2789	135 „	
2803	160 „	. . . 149
2814	192 „	NR
2818	216 „	
2820	216 „	
2822	216 „	
2827	247 „	
2828	248 „	. . . 150
2850	335 „	
2865	70 (XXVII)	NR
2886	104 „	NR
2906	184 „	
2909	221 „	NR
2912	222 „	NR
2920	262 „	. . . 36
2922	263 „	
2926	264 „	NR
2936	343 „	NR
2947 *)	376 „	NR
2953	416 „	
2955	416 (XXVII)	
2959	448 „	. . . 426
2960	448 „	
2969	39 (XXVIII)	
2971	39 „	
2983	79 „	
2985	80 „	
2993	119 „	
2996	120 „	. . . 254
2999	120 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
3000	120 (XXVIII)	
3003	159 „	
3005	159 „	
3013	199 „	
3019	200 „	
3041	319 „	
3054	360 „	
3069	400 „	NR
3070	400 „	
3071	439 „	
3073	439 „	
3075	439 „	
3081	479 „	
	454 (XXXI)	NR
3085	480 (XXVIII)	
3086	480 „	
3091	39 (XXIX)	
3095	40 „	
3096	40 „	. . . 640
3108	80 „	
3118	120 „	
3127	159 „	NR
3134 **)	199 „	
3150	240 „	
3160	280 „	
3161	318 „	NR
3167	320 „	
3173	358 „	
3177	359 „	
3178	360 „	
3180	360 „	
3189	400 „	
3198	440 „	
3208	480 „	NR
3210	480 „	. . . 86
3220	40 (XXX)	
3227	80 „	
3228	80 „	
3230	80 „	
3232	119 „	
3239	120 „	
3245	160 „	
3249	160 „	
3251 ***)	198 „	
3253	199 „	
3255	199 „	NR
3260	200 „	
3267	239 „	
3277	280 „	

*) Vezi rectificarea pag. 448, Vol. XLIII.

**) A se vedea soluția parțială dela pag. 254 și nota dela pag. 300, Vol. XLII. Se așteaptă completarea soluției.

***) Un început de soluție s'a dat la pag. 314, Vol. XXX. Se așteaptă soluția completă.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3287	320 (XXX)	
3288	320 „	
3291	358 „	
3296	359 „	
3298	359 „	NR
3300	360 „	
3304	399 „	NR
3308	400 „	
3309	400 „	
3310	400 „	NR
3311	438 „	
3312	439 „	
3316	439 „	NR
3318	440 „	NR
3320	440 „	
3332	119 (XXXI)	
3340	40 „	
3341	79 „	
3350	80 „	NR
3360	120 „	
3389	240 „	
3396	280 „	. . . 643
3405	319 „	NR
3412	358 „	NR
3419	360 „	
3424	399 „	NR
3425	399 „	NR
3429	400 „	
3430	400 „	
3439	440 „	
3445	479 „	
3448	479 „	
3456	119 (XXXIII)	. . 536
3457	39 (XXXII)	
3459	40 „	
3467*)	79 „	
3468	80 „	
3472	80 „	
3474	119 „	
3477	119 „	. . . 88
3488	159 „	
3493	160 „	
3495	199 „	
3497	199 „	
3499	199 „	
3504	200 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3506	239(XXXII)	
3509	239 „	. . . 152
3512	240 „	
3513	240 „	
3521	279 „	
3522	280 „	NR
3523	280 „	NR
3533	320 „	NR
3534	320 „	
3535	359 „	
3536 **)	438 „	
3542	360 „	NR
3545	398 „	NR
3546	399 „	
3547	399 „	
3551	39 (XXXIII)	
3572	480 (XXXII)	NR
3573	480 „	NR
3584	79 (XXXIII)	
3588	80 „	. . . 204
3589	80 „	
3597	120 „	
3600	120 „	
3607 ***)	159 „	
3608	159 „	NR
3610	160 „	
3620	199 „	
3622 ****)	239 „	
3625	239 „	
3627	278 „	NR
3632 *****)	279 „	
3635	279 „	NR
3640 ******)	280 „	
3644	319 „	
3647	320 „	NR
3653	359 „	
3657	359 „	NR
3658	360 „	
3659	360 „	
3660	360 „	
3664	399 „	
3665	399 „	. . . 255
3677	440 „	
3681	478 „	NR
3682	478 „	
3689	480 „	

*) Vezi erata pag. 120, Vol. XXXII.
**) Vezi erata pag. 40, Vol. XXXIII.
***) Vezi erata pag. 240, Vol. XXXIII.
****) Vezi erata pag. 280, Vol. XXXIII.
*****) Problema rezolvată la pag. 95, Vol. XLII este 3630, iar nu 3632. A se rectifica în consecință tabla de materii a Vol. XLII și a volumelor următoare.
******) Problema rezolvată la pag. 35, Vol. XLII este 3639, iar nu 3640. A se rectifica în consecință tabla de materii a Vol. XLII și a volumelor următoare.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3693	39 (XXXIV)	
3699	40 „	NR
3700	40 „	NR
3705	79 „	
3706	79 „	
3713	119 „	
3720	120 „	
3725	160 „	
3732	199 „	
3733	119 (XXXV)	NR
3736	200 (XXXIV)	NR
3749	240 „	
3762	319 „	
3763	319 „	. . . 586
3764	319 „	
3765	320 „	. . . 427
3768	320 „	
3772	359 „	
3775	360 „	. . . 154
3776	360 „	
3780	360 „	
3784	399 „	
3787	400 „	
3790	400 „	
3792	439 „	
3793	439 „	NR
3802	479 „	NR
3804	479 „	
3807	480 „	
3808 *)	480 „	
3810	480 „	
3817	40 (XXXV)	
3819	40 „	
3820	40 „	
3823	79 „	
3824	79 „	
3829	80 „	NR
3836	120 „	NR
3840	120 „	. . . 37
3844	159 „	NR
3845	159 „	
3849	160 „	
3853	199 „	NR
3863	239 „	
3864	239 „	NR
3867	240 „	
3873	279 „	
3874	38 (XXXVIII)	
3876	279 (XXXV)	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3880	280 (XXXV)	
3883	319 „	
3896	360 „	NR
3902	398 „	
3909	400 „	NR
3913	439 „	NR
3915	439 „	. . . 90
3916	439 „	. . . 587
3920	440 „	NR
3924	479 „	. . . 430
3933	39 (XXXVI)	NR
3934	39 „	
3939	40 „	
3944	79 „	NR
3945	79 „	
3950	80 „	
3961	159 „	
3965	159 „	
3975	200 „	
3976	200 „	
3983	238 „	NR
3999	280 „	
4000	280 „	
4005	319 „	. . . 588
4010	320 „	NR
4013	359 „	NR
4022	398 „	
4028	400 „	
4029	400 „	. . . 38
4030	400 „	NR
4034	439 „	NR
4035	440 „	
4041	38 (XXXVIII)	
4045	479 (XXXVI) / 142 (XL)	NR
4053 **)	39 (XXXVII)	NR
4055	39 „	. . . 539
4056	79 „	
4059	40 „	NR
4060	40 „	
4062	79 „	NR
4067	80 „	
4070	80 „	NR
4074	119 „	
4075	120 „	
4080	120 „	
4084	159 „	
4085	159 „	NR
4096	200 „	

*) A se vedea completarea enunțului la pag. 288, Vol. XL.

**) Vezi erata pag. 120, Vol. XXXVIII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4098	200 (XXXVII)	
4102	239 „	NR
4103 *)	239 „	
4104	239 „	
4105	240 „	
4107	240 „	
4111	279 „	NR
4112	279 „	
4118	280 „	
4121	318 „	
4125	319 „	. . . 91
4126	319 „	
4127	320 „	
4132	359 „	NR
4135	359 „	. . . 207
4148	400 „	NR
4150	400 „	NR
4151	438 „	NR
4155	439 „	
4163	478 „	NR
4167	479 „	NR
4169	480 „	NR
4172	39 (XXXVIII)	
4175	39 „	. . . 92
4177	40 „	. . . 40
4181	78 „	
4184	79 (XXXVIII)	
4185	79 „	
4192	118 „	
4194	119 „	
4199	120 „	
4206	160 „	NR
4210	160 „	
4214	198 „	
4215	199 „	. . . 541
4226	240 „	. . . 646
4234	279 „	
4236	280 „	NR
4244 **)	319 „	. . 184 (XL)
4245	319 „	
4247	320 „	
4249	320 „	NR
4250	383 (XXXIX)	
4251	359 (XXXVIII)	
4252	359 „	NR
4256	359 „	NR
4257	359 „	
4270	400 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4274	439 (XXXVIII)	
4275	439 „	NR
4277	440 „	NR
4279	118 (XXXIX)	
4280	440 (XXXVIII)	NR
4281	479 „	NR
4283	479 „	NR
4285 ***)	479 „	
4287	480 „	
4289	480 „	NR
4290	383 (XXXIX)	NR
4297	40 „	
4302	78 „	
4303	78 „	NR
4307	79 „	
4308	80 „	. . . 591
4315	120 „	NR
4316	120 „	
4319	120 „	NR
4320	120 „	NR
4326	159 „	
4329	160 „	. . . 95
4333	198 „	NR
4335	198 „	
4337	200 „	NR
4339	200 „	. . . 41
4340	200 „	NR
4342	239 „	NR
4350	240 „	
4352	286 „	NR
4356	287 „	NR
4357	288 „	NR
4358	288 „	NR
4360	334 „	NR
4362	334 „	NR
4363	335 „	NR
4368	336 „	
4370	336 „	
4373	383 „	
4376	384 „	
4377	384 „	. . . 257
4380	384 „	NR
4384	431 „	NR
4389	432 „	NR
4393	478 „	NR
4395 ****)	479 „	NR
4396	479 „	NR
4398	480 „	. . . 543

*) Vezi erata pag. 120, Vol. XXXVIII.
**) A fost rezolvată la pag. 184, Vol. XL.
***) Vezi erata pag. 40, Vol. XXXIX.
****) Vezi erata pag. 43, Vol. XL.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4399 . . .	480 (XXXIX)	NR
4400 . . .	480 „	
4402 . . .	480 „	
4404 . . .	526 „	NR
4405 . . .	526 „	
4407 . . .	527 „	
4411 . . .	528 „	
4412 . . .	528 „	NR
4416 . . .	46 (XL)	NR
4426 . . .	48 „	NR
4432 . . .	95 „	. . . 42
4435 . . .	96 „	
4441 . . .	143 „	. . . 260
4445 . . .	143 „	NR
4446 . . .	143 „	
4449 . . .	144 „	NR
4450 . . .	144 „	
4452 *) . . .	190 „	NR
4453 . . .	190 „	
4458 . . .	191 „	
4464 **) . .	199 (XLV)	. . . 109
4468 . . .	239 (XL)	NR
4470 . . .	240 „	
4473 . . .	240 „	NR
4474 ***) .	333 (XLV)	. . . 649
4478 ****) .	285 (XL)	
4479 . . .	285 „	. . . 482
4480 . . .	286 „	NR
4481 . . .	286 „	NR
4484 . . .	287 „	
4486 *****) .	288 „	NR
4487 . . .	334 „	NR
4489 . . .	334 „	NR
4490 . . .	335 „	NR
4492 . . .	335 „	NR
4494 . . .	336 „	
4496 . . .	336 „	
4509 . . .	384 „	
4511 . . .	430 „	NR
4513 . . .	430 „	NR
4515 . . .	431 „	
4516 . . .	431 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4520 . . .	432 (XL)	
4525 . . .	478 „	
4533 . . .	480 „	
4534 . . .	480 „	NR
4540 . . .	527 „	
4547 . . .	573 „	NR
4548 . . .	573 „	
4550 . . .	574 „	
4553 ******)	574 „	
4557 . . .	575 „	
4558 . . .	576 „	NR
4559 . . .	116 (XLI)	
4560 *******)	116 „	
4561 . . .	116 „	NR
4564 ********)	117 „	
4566 . . .	118 „	
4568 . . .	118 „	
4571 . . .	119 „	
4573 . . .	119 „	
4576 . . .	119 „	
4578 . . .	120 „	
4581 . . .	166 „	
4587 . . .	262 „	NR
4588 . . .	168 „	
4589 . . .	168 „	
4590 . . .	168 „	
4592 . . .	215 „	NR
4593 . . .	215 „	
4596 . . .	215 „	
4598 *********)	216 „	NR
4601 . . .	216 „	NR
4602 . . .	216 „	NR
4603 . . .	262 „	NR
4605 . . .	263 „	NR
4607 **********)	263 „	
4613 . . .	264 „	
4614 . . .	264 „	
4615 . . .	310 „	NR
4618 . . .	311 „	
4620 . . .	311 „	
4621 . . .	311 „	
4625 . . .	312 „	

*) Vezi punctul 2° erata pag. 576, Vol. XL.
**) Inlocueşte problema 4464 dela pag. 228, Vol. XL.
***) Inlocueşte problema 4474 propusă la pag. 240, Vol. XL.
****) Vezi erata pag. 384, Vol. XL.
*****) Vezi erata pag. 120, Vol. XLI.
******) I s'a dat o soluţie la pag. 352, Vol. XLI. A se vedea nota dela pag. 302. Vol. XLII. Se aşteaptă completarea soluţiei.
*******) Vezi erata pag. 160, Vol. XLI.
********) Vezi o soluţie la pag. 412, Vol. XLI.
*********) Vezi erata pag. 264, Vol. XLI.
**********) Vezi erata pag. 312, Vol. XLI.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
4628 . . .	359 (XLI)	
4630 . . .	359 „	NR
4631 . . .	359 „	
4633 . . .	359 „	
4634 . . .	360 „	
4636 . . .	360 „	NR
4637 . . .	360 „	
4638 . . .	360 „	
4639 . . .	406 „	
4640 . . .	406 „	
4641 . . .	407 „	NR
4642 . . .	407 „	 310
4644 . . .	407 „	
4647 . . .	408 „	NR
4650 . . .	408 „	 486
4652 . . .	453 „	
4654 . . .	454 „	 373
4657 . . .	454 „	NR
4660 . . .	455 „	
4664 . . .	503 „	
4667 *) . .	501 (XLV)	NR
4670 . . .	504 (XLI)	NR
4671 . . .	504 „	
4672 . . .	504 „	NR
4673 . . .	504 „	
4674 . . .	504 „	
4675 . . .	550 „	NR
4680 . . .	550 „	NR
4683 . . .	551 „	
4685 **) . .	552 „	NR
4686 . . .	552 „	NR
4688 . . .	598 „	
4690 . . .	598 „	NR
4693 . . .	599 „	NR
4695 . . .	600 „	
4696 . . .	600 „	
4697 . . .	600 „	
4698 . . .	600 „	NR
4703 . . .	647 „	
4704 . . .	647 „	
4705 . . .	647 „	
4706 . . .	647 „	
4708 ***) .	54 (XLII)	. . . 95
4710 . . .	648 (XLI)	NR
4717 . . .	55 (XLII)	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
4720 . . .	56 (XLII)	
4722 . . .	56 „	
4723 . . .	110 „	
4724 . . .	110 „	. . . 592
4726 . . .	110 „	
4729 . . .	111 „	
4730 . . .	111 „	
4731 ****) .	112 „	
4734 . . .	112 „	NR
4738 . . .	166 „	
4741 . . .	167 „	
4742 . . .	167 „	NR
4745 . . .	168 „	
4749 . . .	223 „	NR
4753 . . .	223 „	
4755 . . .	224 „	
4758 . . .	224 „	. . . 375
4765 . . .	279 „	
4768 . . .	280 „	
4770 . . .	280 „	
4772 . . .	334 „	NR
4777 . . .	335 „	. . . 544
4779 . . .	336 „	
4780 . . .	336 „	
4781 . . .	336 „	
4782 . . .	336 „	. . . 311
4783 . . .	390 „	
4785 . . .	390 „	
4788*****)	390 „	
4790 . . .	391 „	
4791 . . .	391 „	NR
4793 . . .	392 „	
4798 . . .	446 „	
4801 . . .	447 „	
4804 . . .	448 „	
4805 . . .	448 „	. . . 312
4809 . . .	502 „	. . . 261
4812 . . .	503 „	NR
4815 . . .	504 „	
4817 . . .	504 „	
4821 . . .	558 „	
4825 . . .	559 „	
4826 . . .	559 „	
4829******)	165 (XLIII)	. . . 44
4832 . . .	614 (XLII)	. . . 376

*) Inlocuește problema 4667 propusă la pag. 503, Vol. XLI.

**) I s'a rectificat numărul de ordine la pag. 600, Vol. XLI.

***) I s'a rectificat enunțul de la pag. 648, Vol. XLI.

*****) Vezi erata pag. 56, Vol. XLIII.

*****) Problema rezolvată la pag. 611, Vol. XLII, este 4787, iar nu 4788. A se rectifica în consecință tabla de materii a Vol. XLII și a volumelor următoare.

*******) Problema propusă cu acest număr la pag. 560, Vol. XLII, se anulează. Vezi pag. 165 și pag. 280, Vol. XLIII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4836	615 (XLII)	
4839 *)	616 „	NR
4840	616 „	
4846	670 „	
4848	671 „	
4849	671 „	NR
4852	672 „	. . . 155
4853	672 „	
4854	672 „	
4859	55 (XLIII)	
4863	56 „	. . . 46
4866	56 „	
4870	110 „	
4871	111 „	
4872	111 „	
4879	166 „	NR
4880	166 „	
4881 **)	166 „	. . . 209
4883	166 „	. . . 313
4887	167 „	. . . 378
4888	167 „	. . . 593
4889	168 „	
4890	168 „	NR
4892	222 „	
4894	222 „	NR
4896	223 „	
4897	223 „	
4898	223 „	
4901	224 „	NR
4905	278 „	NR
4907	279 „	
4909	279 „	
4910	279 „	. . . 594
4913	280 „	NR
4914 ***)	501 (XLV)	NR
4915	334 (XLIII)	NR
4917	334 „	
4920	334 „	NR
4922	335 „	
4923	335 „	
4926	336 „	
4927	390 „	314, 379, 487
4928	390 „	
4929	390 „	NR
4931	391 „	
4932	391 „	. . . 47
4933	391 „	. . . 156
4934	391 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4935	391 (XLIII)	
4936	392 „	
4937	392 „	NR
4938	392 „	NR
4940	446 „	
4942	446 „	
4944	447 „	NR
4946	447 „	
4947	447 „	
4948	447 „	
4949	448 „	NR
4953 ****)	614 „	
4954	502 „	
4955	503 „	
4956	503 „	. . . 48
4958	503 „	
4959	504 „	
4962	504 „	NR
4967	559 „	
4968	559 „	
4969	559 „	
4970	560 „	. . . 652
4973	560 „	NR
4974	560 „	NR
4977	614 „	
4978	614 „	
4979	615 „	NR
4981	615 „	NR
4982	615 „	
4984	616 „	
4985	616 „	
4986	616 „	NR
4989	670 „	
4991	670 „	NR
4992	671 „	NR
4993	671 „	
4995	671 „	
4997	672 „	NR
5001	54 (XLIV)	
5002	54 „	
5003 *****)	109 „	
5004	54 „	. . . 319
5006	55 „	
5008	55 „	. . . 431
5009	55 „	
5010	56 „	NR
5012	56 „	
5013	56 „	

*) Vezi erata pag. 672, Vol. XLII.

**) Vezi erata pag. 224, Vol. XLIII.

***) Inlocueşte problema 4914, propusă la pag. 280, Vol. XLIII.

****) I s'a modificat enunţul dela pag. 502, Vol. XLIII.

*****) Inlocueşte problema 5003 dela pag. 54, Vol. XLIV.

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1]	Rezolvată [2]
5016	109 (XLIV)	
5020	110 „	
5021	110 „	
5022	111 „	NR
5023	111 „	
5024	111 „	
5025	111 „	383
5026	112 „	
5027	112 „	
5028	112 „	NR
5030	166 „	
5031	166 „	
5032	166 „	263
5033	166 „	
5034	167 „	
5036	167 „	
5037	167 „	NR
5038	167 „	49
5039	168 „	
5040	168 „	
5042	168 „	
5043 *)	168 „	NR
5044	222 „	210
5045 **)	222 „	NR
5046	222 „	
5047	222 „	
5049	222 „	NR
5050 ***)	223 „	
5051	223 „	
5052 ****)	223 „	
5053	223 „	
5054	223 „	
5055	224 „	
5056	224 „	
5058	224 „	211
5059	277 „	NR
5060	277 „	
5061*****)	334 „	
5062	277 „	158
5063	277 „	491
5064	278 „	
5065	278 „	433

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1]	Rezolvată [2]
5066	278 (XLIV)	266
5067	278 „	545
5068	278 „	
5069	279 „	
5070******)	279 „	
5071*******)	279 „	442 (XLIV)
5072	280 „	NR
5073	280 „	NR
5074	334 „	NR
5075	335 „	
5076	335 „	NR
5077	335 „	50
5079	335 „	
5080********	335 „	
5081	335 „	
5082	335 „	
5084	336 „	322
5085	336 „	
5086	336 „	
5087	336 „	212
5090	390 „	324
5091	390 „	NR
5092	390 „	
5093	390 „	NR
5094	391 „	NR
5095	391 „	NR
5096	391 „	
5097	391 „	
5098	391 „	
5099	391 „	NR
5100	392 „	437
5101	392 „	492
5102	392 „	
5103	392 „	161
5104	445 „	217
5105	445 „	NR
5106	445 „	NR
5107	445 „	269.
5108	446 „	
5109	446 „	
5110	446 „	
5111	446 „	

*) Vezi erata pag. 280.

**) Vezi erata pag. 280.

***) Vezi erata pag. 448.

****) Vezi erata pag. 336.

*****) Inlocueşte problema propusă cu acelaşi număr la pag. 277, Vol. XLIV.

******) Din eroare a fost trecută ca publicată în tabla de materii a Vol. XLIV.

*******) Vezi erata pag. 504, Vol. XLIV. Este rezolvată la pag. 442, Vol. XLIV.

********) Vezi erata pag. 448, Vol. XLIV.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
5112	447 (XLIV)	
5113	447 „	
5114	447 „	
5115	447 „	. . . 271
5116	447 „	
5117	448 „	NR
5118	448 „	
5119	501 „	
5120	501 „	. . . 493
5121	501 „	NR
5122	501 „	. . . 440
5123	501 „	NR
5124	502 „	. . . 597
5125	502 „	NR
5126	502 „	NR
5127	502 „	NR
5128	503 „	
5129	503 „	NR
5130	503 „	NR
5131	504 „	
5132	504 „	. . . 273
5133 *)	558 „	. . . 218
5134	558 „	
5135	558 „	
5136	558 „	
5137	558 „	NR
5138	559 „	NR
5139	559 „	NR
5140	559 „	NR
5141	559 „	NR
5142	559 „	
5143	560 „	
5144	560 „	
5145	560 „	
5146	560 „	NR
5147	560 „	NR
5148	614 „	. . . 164
5149	614 „	NR
5150	614 „	
5151	614 „	. . . 598
5152	614 „	. . . 386
5153 **)	614 „	
5154	615 „	
5155	615 „	
5156	615 „	
5157	615 „	NR
5158	615 (XLIV)	
5159	616 „	. . . 494
5160	616 „	
5161	616 „	
5162 ***)	616 „	
5163	616 „	NR
5164	669 „	. . . 103
5165	669 „	NR
5166 ****)	109 (XLV)	
5167	669 (XLIV)	
5168	669 „	
5169	670 „	
5170	670 „	
5171	670 „	
5172	670 „	
5173	671 „	
5174	671 „	
5175	671 „	. . . 497
5176	671 „	
5177	672 „	NR
5178	672 „	NR
5179	672 „	NR
5180	53 (XLV)	. . . 325
5181 *****)	53 „	
5182	53 „	
5183	53 „	
5184	54 „	NR
5185 ******)	389 „	
5186	54 „	
5187	54 „	. . . 441
5188	54 „	. . . 547
5189	55 „	NR
5190	55 „	
5191	55 „	. . . 388
5192	55 „	
5193	56 „	NR
5194	56 „	
5195	109 „	
5196	109 „	NR
5197 *******)	110 „	NR
5198	110 „	
5199 ********)	110 „	
5200	110 „	NR
5201	110 „	. . . 652
5202	111 „	
5203 *********)	669 „	

*) Vezi rectificarea pag. 280.
**) Vezi completarea enunțului la pag. 224, Vol. XLV.
***) Vezi erata pag. 672, Vol. XLIV.
****) Rectificat enunțul dela pag. 669, Vol. XLIV.
*****) Vezi rectificarea numărului de ordine la pag. 112.
******) Inlocueşte problema 5185 propusă la pag. 54.
*******) Vezi erata pag. 168.
********) Vezi erata pag. 168.
*********) Inlocueşte problema 5203 propusă la pag. 111.

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1]	Rezolvată [2]
5204	111 (XLV)	NR
5205	111 „	
5206	111 „	
5207	112 „	654
5208	112 „	NR
5209	112 „	
5210	166 „	275
5211	166 „	NR
5212	166 „	NR
5213	166 „	547
5214	166 „	
5215	167 „	
5216	167 „	
5217	167 „	
5218	167 „	
5219	168 „	
5220	168 „	NR
5221	168 „	NR
5222	168 „	
5223	168 „	
5224	168 „	603
5225	220 „	NR
5226	221 „	
5227	221 „	
5228	221 „	
5229	221 „	
5230	221 „	NR
5231	222 „	
5232	222 „	
5233	222 „	
5234	222 „	
5235	223 „	498
5236	223 „	
5237	223 „	NR
5238	223 „	328
5239	224 „	
5240	224 „	657
5241	278 „	548
5242	278 „	NR
5243	278 „	442
5244	278 „	
5245	278 „	
5246	278 „	
5247	279 „	
5248	279 „	NR
5249	279 „	
5250	279 „	
5251	279 „	498
5252	280 „	
5253	280 „	NR
5254	280 „	

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1]	Rezolvată [2]
5255	280 (XLV)	
5256	333 „	499
5257	333 „	659
5258	334 „	
5259	334 „	660
5260	334 „	
5261	334 „	
5262*)	334 „	
5263	335 „	
5264	335 „	
5265	335 „	
5266	335 „	552
5267	335 „	
5268	336 „	
5269	336 „	661
5270	336 „	NR
5271	389 „	605
5272	389 „	NR
5273	390 „	552
5274	390 „	NR
5275	390 „	606
5276	390 „	
5277	390 „	NR
5278	390 „	
5279	391 „	NR
5280	391 „	
5281	391 „	
5282	391 „	
5283	391 „	608
5284	392 „	NR
5285	392 „	
5286	392 „	NR
5287	446 „	611
5288	446 „	NR
5289	446 „	NR
5290	446 „	
5291	446 „	
5292	446 „	
5293**)	447 „	NR
5294	447 „	NR
5295	447 „	NR
5296	447 „	
5297	448 „	
5298	448 „	NR
5299	448 „	
5300	448 „	
5301	448 „	
5302	501 „	
5303	502 „	
5304	502 „	NR
5305	502 „	

*) Vezi erata pag. 392.
**) Vezi erata pag. 560.

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1])	Rezolvată [2])
5306	502 (XLV)	NR
5307	502 „	
5308	503 „	NR
5309	503 „	NR
5310	503 „	. . . 664
5311	503 „	NR
5312	503 „	
5313	504 „	
5314	504 „	NR
5315	504 „	. . . 666
5316	504 „	
5317	557 „	NR
5318	557 „	NR
5319	557 „	
5320	557 „	NR
5321	557 „	
5322	558 „	NR
5323	558 „	NR
5324	558 „	NR
5325	558 „	NR
5326	558 „	NR
5327	559 „	
5328	559 „	
5329	559 „	
5330	560 „	NR
5331	560 „	NR
5332	613 „	NR
5333	613 „	NR

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1])	Rezolvată [2])
5334	614 (XLV)	NR
5335	614 „	NR
5336	614 „	NR
5337	614 „	NR
5338	615 „	
5339	615 „	
5340	615 „	NR
5341	615 „	
5342	615 „	NR
5343	616 „	NR
5344	616 „	NR
5345	616 „	NR
5346	616 „	NR
5347	669 „	NR
5348	670 „	NR
5349	670 „	NR
5350	670 „	NR
5351	670 „	NR
5352	670 „	NR
5353	670 „	NR
5354	671 „	NR
5355	671 „	NR
5356	671 „	NR
5357	671 „	NR
5358	671 „	NR
5359	672 „	NR
5360	672 „	NR
5361	672 „	NR

I. EXERCIȚII *)

Aritmetica și teoria numerelor . . . . . 3(107), 10(219), 22(443).

Geometria . . . . . 4(108), 5(108), 9(166), 12(219), 16(277), 23(444), 24(445), 31(612), 33(613), 34(667).

Algebra . . . . . 6(108), 11(219), 14(220), 17(330), 21(389), 25(445), 30(556), 35(668), 36(668).

Trigonometria . . . . . 1(51), 13(220), 20(333), 26(445), 27(500), 28(554), 29(555), 37(688).

Analitica . . . . . 7(165), 8(165), 15(277), 18(331), 19(332).

Mecanică . . . . . 2(52).

*) Numerele din paranteză indică pagina la care a fost propus exercițiul al cărui număr precede exercițiul.

J. TABLOUL NUMELOR

Abason E., 7, 246, 362, 534, 581.
Abel H. N., 246, 249, 363.
Abeles J. F., 275, 500, 527, 548, 551, 651, 659.
Abramescu N., 6, 7, 180, 224, 364, 433, 436, 461, 468, 530, 615, 657.
Abramescu Pop Mariana, 496, 657.
Abrudeanu R. D, 142.
Acikgheozian N., 172.
Adam I. M., 148, 149, 223, 232, 279, 392.
Adams, 449.
Adhémar J., 364.
Agnew P. R., 195.
Aiyar, 31.
Alaci V., 6, 7, 81, 142, 246, 362, 460, 478, 581.
Alasia C., 33, 82, 144, 198, 248, 306, 365, 420, 530, 639.
Albert A. A., 80.
Aldea G., 534.
Aldea V. M., 296, 388.
Aldea N. N., 7, 207, 430.
Aldea V. V., 296, 499, 554, 608.
Alembert D'., 82, 247, 305.
Alexandrescu A., 253.
Alexandrescu V. V., 389.
Alexiu I., 5, 6, 7, 55, 388, 389.
Allardice, 82.
Allezan, 248.
Amărăşteanu F. M., 44, 164.
Ambarzunian V., 120.
Amfilochie Hotinul, 362.
Amiot A., 197.
Anacreon, 395.
Andonies I., 554, 608.
André C., 249.
André D., 510.
Andriescu Virg., 221.
Andrievici N., 44.
Andronescu Pl, 143.
Angelescu A., 19, 86, 465, 466, 467, 552, 637.
Angelescu E., 307.
Angelescu El., 225.
Angelescu I., 253.
Anghelichi E. R., 554, 608.
Angheluţă Th., 5, 6, 7, 150, 246, 271, 273, 335, 363, 364, 391, 418, 447, 459, 463, 468, 511, 528, 636.
Antoniu Corn., 7.
Antoniu S. I., 5, 6, 7, 82, 112, 334, 391, 492, 493.
Apollonius, 294.
Apostol V. R., 43, 44, 310, 312.
Apostoleanu I., 364.
Appell P., 169, 467, 580.
Arago Fr., 449.
Arcadian P. N., 148.
Archimede, 82, 356, 575.
Arendt R. E., 296.
Argenti, 638.
Arghiriade Em., 7.
Arie, 217.
Aristarc, 575.
Armeanca I., 7.
Arşavschi K. Al., 95.
Artaza Ev., 81.
Asachi D, 459.
Asachi Gh., 306.
Atanasiu C. V., 296.
Athanasiu M., 362.
Aubert, 510, 637.
Aurillac G. von, 249.
Avogadro, 361.
Avram N. C. Lt, 27, 38, 197, 542.
Avramescu C., 7.

Bacaloglu E., 459.
Bachet de Mézeriac, 583.
Bäcklund, 403.
Badarau E., 635.
Badea A. I., 500, 554.
Badea H. I., 327.
Badescu Em. A., 38, 92, 95.
Bădescu Fl. C., 296, 496.
Badescu A. L., 7, 534.
Bădescu R., 7, 112, 305' 336, 504, 654, 657, 661, 663.
Baidaff Ig. B., 7, 31, 141, 195, 246, 304, 477.
Bakonyi C. C., 496, 498, 608, 611, 659.
Bălăceanu Gela, 95.
Bălan E., 37.
Bălan G. Şt., 247.
Balibar, 33.
Banciu I., 7.
Bărbălatt M. B., 87.
Barbilian D., 5, 7, 141, 246, 404, 580, 635.
Bărcălescu D., 536.
Barisien N. E., 534.
Bârlea - Suhăţeanu G. V., 296, 494, 497, 612, 659.
Barret W., 304, 581.
Bartholinus Erasmus, 115.
Bârzu G. V., 296.
Basacov Gh. *), 157.
Batthyany, 619, 621, 622, 623.
Bayer, 338.
Bazacov Gh. **), 261.
Bayer, 338.
Beda, 249.
Bedreag C. G., 143.
Bedreag C. M., 386.
Beiu-Paladi G. E., 44.
Beleş A. A., 636.
Belian R., 534, 536.
Bellaven, 248.
Berechet A., 608.
Bernouilli, 114, 117, 230, 231, 291, 393.
Bernouilli Daniel, 113, 114, 115, 116, 117, 231, 289, 291, 338.
Bernouilli Iacob I, 114, 115.
Bernouilli Iacob II, 114.
Bernouilli Ion I, 113, 114, 115.
Bernouilli Ion II, 113, 114, 115, 117, 289, 291.
Bernouilli Ion III, 114.
Bernouilli N., 114.
Bernstein, 143.
Berthoud F., 290.
Bertrand J., 144, 197, 362.
Bessel, 477.
Bianchi, 400, 403, 452.
Bianu B., 580.
Bias Istvan, 113.

*) Acelaşi cu *Bazacov Gh.*
**) Acelaşi cu *Basacov Gn.*

Biernaki M., 528.
Biggeri C., 141, 195, 477.
Billi, 248.
Bilo J., 31.
Binder J., 561, 562, 564.
Binet, 298
Bjerknes A. C., 240.
Blanchet M., 307.
Blaschke, 342.
Blumenfeld D., 37.
Bodnărescu M. H., 44, 158, 209, 212, 279, 314, 327, 388, 496, 497, 498, 547, 597, 606.
Boerescu P Gh., 154.
Bogdan Gr. Gh., 160, 296, 325, 499.
Boian D. Em., 44.
Boian C. I., 154, 586.
Boiangiu D. D., 51, 107, 210, 265, 269, 275, 296, 325, 386, 389, 442, 494, 498, 499, 551, 605, 607, 611.
Boldescu P., 54, 304, 327, 389.
Bolfinger, 338.
Bolgiu O., 87, 584, 638.
Bolocan D-na, 458.
Bompiani E., 404, 405.
Bonea I., 304, 581.
Bonne Col., 33.
Bonnet, 197.
Borel E., 248, 455, 530, 582, 583, 637.
Borneanu G., 8.
Borş C., 362.
Borŭvka O., 418.
Botea G. N., 19, 28, 44, 425, 584, 638, 639.
Botez Gh., 534, 536.
Botez St. M, 8, 195, 246, 304, 363, 445, 478, 581, 636.
Botez Şt., 459.
Bouchény G., 109.
Bouquet, 197.
Brătan M., 595.
Bratu Gh., 8, 364, 528.
Bratu I., 346.
Brelot M., 144.
Brener M. A., 8.
Bret J. J., 512, 514, 515.
Brezeanu N. Corn., 296, 388, 432.
Brianchon, 240.
Briggs E, 227.
Briot Ch., 197.
Brisset Ch., 249.
Brocard, 31, 33, 55, 390, 671.
Broglie L. de, 32, 120.
Bruckner V., 8.
Brül M. L, 148, 149, 638, 639.
Brünnow F., 249.
Bucurenciu J. V., 312.
Bucurescu I. Lt., 8.
Budeanu I. C., 8, 247.
Budro, 248.
Buffon L. G. de, 289.
Buicliu Gh. G-l., 5, 6, 8, 29, 37, 53, 64, 65, 79, 90, 102. 110, 149, 154, 156, 158, 161, 166, 201, 207, 209, 221, 245, 253, 257, 259, 261, 263, 269, 278, 310, 311, 312, 324, 325, 333, 335, 347, 373, 375, 377, 389, 413, 431, 440, 446, 502, 526, 547, 548, 559, 576, 593, 603, 607, 613, 629, 632, 649, 651, 670.
Bujoreanu N., 8.
Bulgăreanu C., 534.
Bunescu D. A., 5, 8, 141, 362, 468.
Bungescu I. Maior, 8.
Bungeţeanu Preduţa, 6, 8, 92, 93, 208.
Buradescu T., 8.
Burghelea S. C., 386.
Buricescu C. I., 174.
Burileanu Şt., 9, 634.
Buruiană I., 143.
Buşilă Ad., 9.
Buşilă D. C., 9, 364.
Buşilă I., 9.
Buzincu I. I., 557.
Buznea D. D., 44, 296, 386, 498, 499, 500, 595.

Cagniard L., 305.
Calapso, 400.
Călinescu I. A., 149, 244.
Callon, 449, 451.
Călugăreanu G., 82, 364, 593.
Cambureanu V. D., 9.
Cambureanu V. V., 8.
Câmpan Florica, 458, 638.
Camus L. E. Ch., 291.
Cantemir Antioch, 337, 338, 339, 363, 393, 394, 395, 396.
Cantemir D-tru, 337, 394.
Cantemir Maria, 393.
Cantor M., 249.
Capelli F. P., 246.
Capriel I., 9.
Caracudovici Margareta 95, 418, 582.
Carafoli E., 9.
Caragea, 524.
Caraman E., 9.
Carâp V., 536.
Carathéodory, 405.
Cardan, 567, 646.
Cârdei D. Gh., 545.
Cârdeiu D. Gh., 44, 296, 388, 492.
Carnot, 141.
Carol II, Regele României, 634.
Carol XII, 394.
Cârstoiu I., 92.
Cartan, 342, 400, 456.
Cartan H., 82.
Cartianu Gh., 9.
Casey, 478.
Cassian Gh. Col., 9.
Cassini F. C. de Thury, 290.
Castellonius, 230, 231.
Castillon Fr. G., *) 230.
Castineirus R. J., 305.
Cauchois Yvette, 635.
Cauchy A., 419, 459.
Cavallaro G. V., 31, 304, 581.
Cazacu N. C., 9.
Cazanacli V. P., 9, 325, 386, 440, 494, 496, 545.
Ceauşescu I. V., 542.
Ceauşoglu V., 259.
Ceh E., 284, 454, 457.
Cerchez M., **) 324.
Cerchez T. V., 580.
Cesaro, 637.

*) Acelaşi cu precedentul.
**) Acelaşi cu *Mihu C.*

Cesco P. R., 582.
Cetăţeanu St., 29, 44, 46, 79, 107, 192, 209, 297, 327, 347, 386, 387, 388, 440, 442, 446, 498, 527, 548, 598, 659.
Ceva, 240, 526.
Chaen, 242.
Chait B., 82.
Chape d'Auteroche J., 290.
Charlier, 195.
Charpentier M., 82.
Chasles M., 249, 311.
Cheron A, 530, 582, 583.
Cherţman S. M., 165, 211, 217, 296, 325, 386, 389, 500.
Chevrel G., 325.
Chintescu M. M., 296, 499.
Chiriac N., 533.
Chiricescu V., 9.
Chiricuţă A., 9, 176.
Chiriţă M., 558.
Chiţulescu I. I., 5, 9.
Chiţulescu I. Tr., 388.
Chmelăr J., 82.
Christoffel, 454.
Chrystal, 639.
Ciobanu V. I, 296.
Cioc M., 9, 253.
Ciocârlan T. A., 636.
Ciorănescu I. C., 37.
Ciorănescu I. N., 6, 9, 486, 580, 635, 636.
Ciurescu I. Fl., 296.
Clairaut C. A., 289, 292.
Claudian V., 212.
Clifford K. W., 118.
Coandă P, 253.
Cocea Gh. Th., 47, 54, 110, 154, 196, 310, 334, 478, 502, 547, 557, 660.
Collignon Ed., 307, 364.
Comberousse Ch. de, 34, 197.
Comte A., 58.
Condamine de la, 289, 292.
Constantin cel Mare, 217.
Constantin V. P.,*) 296, 496, 543, 548, 607, 654.
Constantinescu I. E., 296.
Constantinescu Gh. Ing.,10.
Constantinescu Gh. Prof., 51, 253.
Constantinescu Gh. Gh., 5, 6, 10, 50, 51, 53, 80, 86, 166, 207, 246, 253, 279, 299, 334, 362, 419, 446, 478, 502, 559, 578, 588, 590, 615, 632, 672.
Constantinescu L., 635.
Constantinescu C. M., 389.
Constantinescu T., 10.
Constantinescu Z, 10.
Conti Al., 363.
Copernic, 619.
Cornăţeanu I. A., 44, 45, 99, 156, 379, 595.
Corpaci A., 580.
Coşereanu I., 10.
Coşniţă C., 37, 80, 87, 93, 335, 362, 410, 411, 552.
Cosserat M., 281, 286.
Costescu Gh. I., 296.
Costescu Th., 582.
Costin D. Al., 607.
Costinescu D., 10.
Cotigher I., 375.
Cotlar M., 477.
Cotulbea I. C., 44.
Cozaciuc D., 500.
Crăciunescu Marcel, 296.
Crăciunescu I. Maria, 44.
Crăciunescu I. Mioara**,46, 388, 496, 594.
Cramer, 80, 96.
Cramer H., 82, 637.
Crelle, 241, 243.
Cristea I. C., 160, 296, 297, 442, 499, 659.
Cristea D. E. ***), 160.
Cristescu V., 498, 501, 524, 637, 643, 645, 646.
Crivăţ I. Vl., 37.
Crivetz T., 584.
Cruceru Gh. C., 498.
Csecke V. V., 42, 44.
Csecke W., 95.
Culianu N., 144.
Cupr V., 419.
Curchi I., 542.
Curea I., 636.

Danielopolu I., 253.
Darboux G., 170, 180, 283, 288, 340, 364, 398, 399, 401, 452, 454, 530.
Dăscălescu Hr., 10.
Daşcovici, 364.
Davidescu M., 536.
Davidoglu A., 403.
Deac I., 38.
Deaux R., 31, 246, 478.
Dedekkind, 242.
Dediu At., 253.
Delaunay B., 579.
Delaunay Ch., 248, 249.
Demoulin, 288, 340, 342, 396.
Desagulier T. J., 291.
Desboves A., 307.
Descartes, 339.
Desmereanu D., 81.
Desmireanu V., 142, 143.
Dessenon E., 249.
Destouches L. J., 123.
Deutsch M. A., 312.
Diaconescu V. C., 296, 499, 527, 554, 612, 651, 660.
Diaconescu D., 608.
Diaconescu D. I., 44, 210.
Diaconescu M., 44.
Dieulefait E. C., 195.
Dimitriu C. I. C., 496.
Dinescu Gh., 253.
Diophante, 575.
Dirac, 120.
Dirichlet L. P. G, 195, 241, 242, 243, 459, 477, 519.
Dismereanu, 81.
Djebeu L., 386, 494, 496.
Dobrescu A., 10.
Dobrescu D. P., 591.
Dobrescu P. P., 42.
Dodd, 143.
Doeblin W., 419.
Doetsch G., 242.
Donciu N., 10, 581.
Donder Th. de, 143.
Dordea Tr., 207.
Dosoftei, Mitropolitul, 479.
Dovgan V. Gh., 388, 605.
Drăcea M., 253.
Drăgan M., 83.
Drăgănescu Şt., 253.
Drăghiceanu M. M., 581.

*) Acelaşi cu *Pantelimon V. C.*
**) Aceiaşi cu precedenta.
***) Acelaşi cu *Eftimie D. C.*

Drăghicescu I. P., 325.
Drăghicescu P. P., 160, 219, 269, 296, 441, 492, 498, 499, 527, 552, 554, 597, 605, 606, 654, 659.
Dragomir M. A. Ermin, 296, 499, 607.
Dragomir I., 203.
Drăguţ Maria, 542.
Dronke A., 307.
Drosescu Gh. I., 10.
Duffailley J., 144.
Duhamel C. M., 197, 637, 652.
Dumitrescu C., 364,
Dumitrescu A. D., 10, 91, 207.
Dumitrescu F. Dan, 296.
Dumitrescu I. Gh., 5, 6, 10, 167, 410.
Dumitrescu C. I., 10, 417, 418.
Duporcq, 583.
Dupuis J., 536.

Eckstein V., 310, 544, 592.
Eftimie D. C. *), 209, 297, 387, 388, 492, 493, 499, 527, 547, 548, 660.
Ehrhard Marcelle, 337, 395, 396.
Einstein A., 59, 60, 121, 126, 143, 364.
Elie J., 580.
Elisabeta, Ţarină a Rusiei, 395.
Emanuel D., 169, 170.
Enache de la Oit N. M., 479.
Enculescu O., 268.
Enescu D. D., 324, 385, 492.
Enneper, 343, 528.
Enulescu O., 50, 136, 137, 160, 305, 321, 362, 478, 496, 497.
Erler W., 307.
Euclide, 28, 173, 175, 176, 249, 575, 584.
Euler, 43, 189, 195, 298, 393, 419, 426, 431, 432, 461, 518, 562.

F. G. M., 30, 593, 631.
Fabre L., 365.
Fântâneanu I., 584, 638.
Felix C. G-l, 10, 144, 198, 249, 308, 365, 420.
Fermat, 253, 310, 465, 528.
Feuerbach, 55, 238, 239, 574, 643, 645, 646.
Fibonacci, 166, 309, 547. 548.
Fila G. E., 547, 552, 608, 657.
Filip M., 253.
Filipescu Em. Gh., 19, 417.
Finetti, 198.
Firuaz-Abad, 629.
Fischer Gh. Ed., 59.
Fitz-Patrick G., 325.
Flammant A., 197.
Florescu B. I., 309, 409, 411, 465, 481, 538, 670.
Florescu M. N., 5, 6, 10.
Florescu L. V., 27, 44, 46, 47, 209, 238, 239, 333, 349, 373, 573, 574, 615, 657, 663.
Floreşteanu D. Al., 296.
Florian Z, 10.
Focşeneanu I. M. Căp., 5, 6, 10, 29, 35, 87, 112, 312, 313. 638. 639, 672.
Foerster W., 307.
Fontenelle, 338, 395.
Forsyth R. A., 82.
Fort O., 249.
Fort T., 195.
Fortrăt R., 83, 420
Fourier, 457, 458, 528.
Franck I. A., 477.
Fredholm, 478.
Frenet, 637.
Fubini G., 284, 457.
Fundăţeanu C. I., 11.

Gabrielescu R., 11.
Gâlcă I. T., 11.
Galileu, 59, 61.
Gallea N., 28.
Gandolfo S. J, 582.
Ganea M. M., 296.
Ganea D. N., 296.
Ganot, 82.
Garcet H., 197, 248.
Garnier R., 32, 239.
Gataianţu V. B., 148.
Gauss, 110, 243, 561, 637, 652, 653, 654.
Gauthier, 285.
Gavrilian N., 419.
Geiser F. C., 307, 308.
Georgescu I. C., 147.
Georgescu N., 500.
Georgescu I. N., 500.
Georgescu N. N., 11.
Georgescu Răducanu, 246, 392.
Georgescu-Piteşti D., 74, 95, 96, 558.
Georgescu-Roegen N., 11.
Georgescu-Val N., 11.
Gereanu C. Ana, 44, 46, 386, 594.
Gergonne, 447, 512.
Germain-Furt Sophie, 528.
Germay J. R., 246.
Gessner J., 292.
Gheorghieş Al. G-l, 11, 253.
Gheorghiu C. Ad., 5, 6, 11, 87, 154, 168, 280, 418, 552, 558, 629.
Gheorghiu Th. Gh., 5, 6, 11, 36, 38, 39, 42, 56, 80, 88, 173, 191, 216, 288, 344, 405, 457, 467, 498, 501, 504, 524, 528, 530, 541, 543, 544, 559, 574, 580, 591, 615, 636, 637.
Gheorghiu S. I., 11.
Gheorghiu A. M., 11.
Gheorghiu E. Oct., 160, 386, 389.
Gheorghiu P., 497.
Gheorghiu A. Ş., 11.
Gherasi N., 197, 249.
Ghermănescu M., 5, 6, 11, 29, 78, 80, 111, 133, 136, 137, 149, 150, 152, 168, 201, 203, 204, 211, 212, 223, 244, 254, 260, 279, 304, 309, 321, 333, 416, 448, 471, 478, 501, 502, 534, 580, 581, 593, 614, 638, 639, 652 659, 660.
Ghimuş D. A. Lt.-Col., 11.
Ghiocel B. V, 93.
Ghiolu Şt., 534.
Ghircoiaşu V. N., 11.
Ghişoiu I. P., 11, 37, 55.

*) Acelaşi cu *Cristea D. E.*

Ghiţescu V., 5, 6, 12, 30, 52, 111, 195, 322, 324, 418, 448, 450, 478, 494, 497, 669, 672.
Gibbs, 118.
Gillis P., 31.
Gligor N. I., 296, 494.
Glivenko, 198.
Gloden A., 31, 75, 76, 127, 135, 246, 478.
Göbl C., 225.
Godeaux L, 307.
Gogâţa Drosida, 608.
Gogu C., 169, 170.
Golab St., 528.
Goldberg I., 379.
Goldenberg I., 44.
Gonzalez D. A., 419.
Goormaghtigh R., 31, 246, 478.
Göschen S., 143.
Gourrat, 246.
Goursat E., 31, 169, 170, 401, 402.
Graefe Fr., 365.
Granville, 637.
Greenstreet J. V., 144.
Grigorescu C., 12.
Grigorescu E., 308.
Gross, 338.
Gruey M., 307.
Grumăzescu M. S-Lt., 44, 51, 164, 325, 386, 545, 668, 670.
Grünbaum M., 534, 638.
Grünberg F., 536.
Guasco, 396.
Guichard Cl., 282, 284, 286, 287, 339, 340, 401, 403, 454.
Gulyàs K., 113.
Gupta H., 135.
Guţu Al., 12.
Guţu V., 12.
Gviazdomorschi R., 324.
Gviazdomorschi E. R., 160.
Gviazdomorschi Z. R., 44.

Haag, 637.
Haar, 31.
Haarbleicher A., 607.
Hadamard J., 528.
Hahn D. I., 229, 230, 231.
Haimer C., 95.
Hallén E., 143.
Hamburger L., 534.
Hamilton J. N., 305, 517.
Hanganu D. M., 12.
Hankel H., 197.
Haret C. Sp, 169, 172.
Harnack A., 144.
Harrison J., 291.
Hatzidakis N., 628.
Hausner R., 420.
Heath S. R., 575.
Heath L. T., 575.
Heiberg, 575.
Heilberg L. J., 249, 307.
Heisenberg W., 119, 120.
Hell M., 620.
Helm G., 198.
Hennebert Lt-Col., 197.
Herbea V., 608.
Herescu C., 605.
Hermann A., 83, 83.
Hermann V., 385.
Hermite Ch., 169, 298, 419, 467.
Heron din Alexandria, 306, 307.
Hess E., 308.
Hesse O., 144, 198.
Heytmanek C., 154.
Höll M., 292.
Holweck, 580.
Höpf, 143.
Horaţiu, 395.
Hornstein H. S., 259.
Hostinsky B., 143, 419.
Hultsch Fr., 249.
Hulubei H, 635.
Humbert P., 142.
Hume, 57.

I. D., 348.
Iacob Caius, 83, 478, 635.
Iacob F., 253.
Iacobi, 516, 517, 522.
Ianculescu R., 12.
Ignat P., 90.
Iisus Hristos, 217.
Ilie A. I. *), 223, 498.
Iliescu C. C., 296.
Iliescu Gh., 5, 12.
Iliescu Th., 410.
Infeld, 143.
Ioachimescu Gh. A., 12, 28, 170, 247, 461, 479, 524, 585.
Ioachimescu A. Gh., 12.
Ioachimstahal, 628.
Ioan A. I., **), 47, 543, 544.
Ioanovici A., 12.
Ionaş, 342.
Ionescu Aurel, 83.
Ionescu V. D., 6, 12, 43, 72, 364, 365, 373, 467, 478, 614, 640.
Ionescu G. B., 639.
Ionescu B. N. Gh., 44, 156, 164, 263, 330.
Ionescu P. H., 12, 154.
Ionescu Ion, 5, 6, 12, 28, 32, 33, 53, 82, 88, 90, 103, 107, 109, 142, 144, 164, 166, 170, 196, 198, 210, 211, 217, 218, 220, 229, 243, 248, 275, 278, 297, 306, 308, 310, 314, 319, 325, 333, 339, 347, 349, 363, 364, 365, 379, 383, 389, 396, 410, 412, 417, 418, 419, 420, 446, 450, 469, 479, 487, 491, 494, 499, 501, 524, 530, 548, 551, 557, 574, 584, 586, 588, 605, 611, 613, 623, 629, 636, 638, 639, 669.
Ionescu I. P., 148.
Ionescu D. St., 44, 296, 324, 608
Ionescu Tib., 6, 12.
Ionescu V., 37.
Ionescu-Bis P. H. ***), 92.
Ionescu-Bujor A., 638 639.
Ionescu-Bujor C., 5, 6, 12, 28, 30, 32, 42, 44, 48, 141, 168, 239, 247, 277, 280, 331, 332, 523, 583, 637, 639, 671.
Ionescu-Fulger M. C., 44.
Ionscu-Ţiu D. C., 5, 6, 12, 38, 49, 111, 154, 335, 542, 616.
Ionescu-Zane D. Gh., 12.
Iorceanu S., 197.
Iordănescu Gh. P., 296.
Iorga N. M., 247.
Iorga N., 479.

*) Acelaşi cu *Ioan A. I.* şi cu *Ţiţeica I. I.*
**) Acelaşi cu *Ilie A. I.* şi *Ţiţeica I. I.*
***) Acelaşi cu *Ionescu P. H.*

Ipsilante Al., 469.
Isopescul V. D., 457, 458, 459.
Isopescul Samuil, 458.
Isopescul V., 458.
Istrati C. Lt-C-dor, 13, 536.
Ivan C. Z. *), 606.
Ivănescu C., 41, 92, 93, 208, 305, 478, 542, 581.
Iwanenko D., 120, 125.

Jalbă T., 253.
Jareghie V. I., 164, 216, 268, 547, 606.
Jensen, 242.
Jijie A., 13.
Jiletcovici G. Al., 268, 387, 496, 500, 606, 659.
Jipa C. N., 500.
Jordan, 143.
Jujescu G., 36.
Julia G., 623.
Justin, 395.

Kalutza Th., 120, 121, 122, 123, 124.
Kampé de Feriet J., 467.
Kant, 57.
Karstens, 562.
Kästner G. A., 561, 563, 564.
Kaufmann N., 13, 34.
Kaufmann Seb., 148, 309, 536.
Kendeffi Al., 117.
Kepler, 201, 619.
Khintchine, 637.
Klein, 452.
Klein H., 198.
Klein O., 120.
Klekler K., 420.
Klinger D. O., 591.
Koenigs M., 169, 170, 398, 399, 404, 452, 455.
Kolmogoroff, 637.
Kovàts I., 113, 117, 290, 291.
Kraïtchik, 583.
Krasner M., 528.
Kubota, 285, 405.
Kurt O., 500.

La Hire, 437.
La Lande J. de, 289, 290, 291, 292.
Lacour E., 197.
Lacroix F. S., 144.
Lăcusteanu N., 621.
Lagrange, 142, 247, 305, 507, 508, 516, 531, 532.
Laguerre, 31.
Lahovary Iacob G-l., 169, 170.
Lainé E., 239.
Lalescu Tr., 33, 43, 83, 150, 170, 199, 460, 534.
Lamoth P., 13.
Landau E., 474.
Langévin, 60, 61.
Laplace, 195, 242, 281, 282, 283, 284, 285, 287, 288, 399, 400, 401, 404, 405, 419, 452, 453, 477.
Lascaride G., 539.
Lascu Bal., 13, 373.
Laurent, 305.
Laurian Treb. A., 199.
Lazăr Gh., 530.
Lazu C., 13.
Le Peaute A. J., 291.
Le Verrier, 449, 450, 451.
Lebădă I. D., 93.
Lebesgue H., 462.
Lebon E., 365.
Leemans J., 246, 478.
Lefébure de Fourcy, 199, 249, 364.
Legendre, 23, 176, 199, 270, 307, 411, 465, 580.
Leibnitz, 115, 339, 663.
Leibovici G., 496.
Leibovici S., 296, 388, 496, 498, 534, 608.
Lejay, 580.
Lelieuvre, 454.
Lemaire J., 208.
Lemoine E., 33, 109, 294, 671.
Leonida D., 13.
Lessheim H., 143.
Leucó I., 588.
Levy P., 82, 637.
L'Hopital, 115.
Lietzmann W., 306.
Linteş G. I. Cpt. C-dor, 5, 6, 13, 24, 54, 109, 224, 263, 265, 269, 270, 271, 280, 302, 349, 386, 387, 427, 440, 441, 472, 536, 539, 560, 578, 580, 582, 587, 588, 670.
L'Isle N. J. de, 290.
Lissajou, 306.
Liteanu I. Gh. G-l., 5, 6, 13, 56.
Livada F. Gr., 13.
Longchamps, 294.
Lorentz A. H., 32, 60, 61, 125.
Loria G., 343, 419, 528, 575.
Luca I. I., 296.
Lucas Ed., 538.
Ludovic XV, 337, 339.
Lupescu G. C., 37.
Lusin, 528.

Mach E., 57, 58.
Mac-Laurin, 195, 512, 513.
Macovei I. I., 418, 581.
Mahler G., 33.
Maginot, 280.
Maior Gh., 216.
Maiorescu T., 173, 176.
Malaxa Elena, 13.
Malaxa N., 13.
Malcoci C., 13.
Manafu V., 13.
Manase M., 534.
Mănescu Ioana, 635.
Mănescu Gh. I., 296.
Mănescu M., 591.
Mangeron I. D., 243.
Manicatide Al., 530, 584.
Mannheim, 197, 303, 307.
Manoilescu M., 13, 363, 582.
Manolescu I. G-l., 364.
Mansion P., 144.
Manu G., 635.
Mărăcine B., 13.
Marcelino S., 536.
Marcinkiewicz J., 528.
Marcovici E., 156.
Marcovici S., 199, 248, 249, 307.
Mărculescu Origen, 273, 385, 496, 499, 657.
Mareş I. Em., 542.
Mareş T., 13.
Mărgărit I. N., 296.
Mărgineanu I., 96.
Margulius M., 37, 92, 154, 208, 426, 431, 542.

*) Acelaşi cu *Zamfir C. I.*

Marian V., 28, 117, 173, 175, 176, 231, 292, 307, 363, 564, 575, 583, 617, 619.
Marinescu G. M., 581.
Markoff A., 120, 123, 125, 528.
Martac V. R., 197.
Marteş V. Gr., 42, 47, 95, 97, 271, 273, 496, 591, 595.
Martonfi A., 617, 618, 919, 620, 621, 622, 623.
Martonfi I., 620.
Mârza V., 253.
Mateescu A., 498.
Mateescu Cr., 5, 13, 247.
Mateescu G. M., 296.
Mateescu I. St., 581.
Matei D. D, 45, 51.
Mătieş V. I., 278, 571, 581.
Matthiessen L, 306.
Maupertuis, 337, 339, 393, 395.
Mavrocordat C., 469.
Mavrodin D. D., 27, 92, 95, 156, 208, 319, 541, 542, 591.
Mayer H., 198.
Mayer O., 534.
Mazilu C. P., 92, 93, 591.
Menase M., 253.
Menciu C., 536.
Menelaus, 240, 432, 529.
Menu E., 82.
Mereuţă E., 14, 37, 335, 391, 557.
Mereuţă V., 14.
Meshier S., 82.
Messiers Ch., 290.
Metea G. R., 657.
Meyerson, 58.
Michel Ch., 583.
Mihăileanu G. A. C., 296.
Mihăileanu N. N., 5, 6, 14, 31, 34, 37, 38, 41, 46, 54, 80, 92, 93, 110, 142, 145, 147, 154, 165, 166, 208, 222, 279, 304, 313, 346, 362, 390, 419, 431, 441, 478, 498, 527, 542, 545, 615, 670.
Mihăilescu C. C., 297, 612.
Mihăilescu D. D., 265.
Mihalcea I. Em., 154.
Mihalcu I. I., 296.
Mihalopol C., 14.
Mihoc Gh. 83, 152, 255, 528, 635.
Mihu C. *), 14, 168, 221, 321, 335, 386, 448, 492, 504, 672.
Miklosich, 458.
Milcoveanu D., 580.
Milu I. N., 45.
Mineur Ad., 246.
Minkowski, 63, 121.
Miquel, 240, 390.
Mircea M. E., 14.
Mirea N. St., 19, 199.
Mirescu P., 14.
Miroslav St. T., 296, 442.
Misès R. de, 82.
Mişicu V. M., 296.
Mitescu C., 14.
Mititelu C. Cl., 14.
Mititelu C. I., 14.
Miu M. I., 148.
Möbius F. A., 83.
Mocanu D. C., 296.
Mocanu I. C., 389, 496, 548.
Močnik, 458.
Modâlcă Ana, 386.
Modâlcă S. Em., 45, 51, 210, 265, 325, 386, 440.
Moessner A., 76, 127, 130, 131, 132, 192, 476, 581.
Moisil G. Iulian, 388.
Moisil Gr., 364, 635.
Mollerup, 528.
Monge, 111.
Montel P., 195, 307, 363, 418.
Montesquieu, 396.
Morant J. D-ra, 31, 246.
Morţun Gh. Em., 14, 222, 266, 448.
Moscovici M., 608.
Motaş C. C., 45, 385.
Moth, 458.
Moutard, 399, 400, 452.
Muhammad S., 83.
Murăroiu I., 154.
Müssenbrock P. von, 229, 230, 231.
Muzen P., 528.
Myller A., 628.
Nadaşan Şt. 581.
Nadolu C. Gr., 388.
Nagel, 447.
Năstase M., 92.
Neamţu N., 536.
Neamţu P., 14.
Nedelcu V. N., 375.
Negoiţă V. P., 45.
Negrea A. L. M., 35, 37, 42, 45, 95, 96, 97, 486, 496, 542, 554, 659.
Negură St., 14.
Neicu V., 534.
Neper I., 227.
Nestor G. D., 14, 638.
Neumann R. E., 59.
Neyman, 198.
Newson V. C., 447.
Newton, 30, 59, 61, 115, 206, 227, 339, 394.
Nichifor A. G., 14.
Nicolaescu T. I., 296.
Nicolau Al., 14.
Nicolau H. C., 14, 534.
Nicolau I., 671.
Nicolau T. M., 14, 155, 437.
Nicolau P., 198.
Nicolau-Dobridor C. I., 93, 539.
Nicolescu I. R., 14.
Niculescu V. Al., 5, 6, 14, 111, 304, 383, 386, 491, 492, 523, 671.
Niculescu Cr., 15, 176.
Niculescu V. Gh., 486, 588.
Niculescu C. Mircea, 49, 271, 273, 296, 321, 325, 327, 494, 496, 499, 545, 554.
Niculescu Miron, 6, 15, 580, 635.
Niculescu V., 581.
Nielsen N., 512.
Niewenglowski B., 64.
Nifon Mitropolitul, 217.
Nistor I., 296.
Niţulescu C., 253.
Nix L., 307.
Noele, 291.
Novac Val., 418.
Obrechkoff N., 143, 419.
Obreja D., 45.
Ocagne M. d', 142.

*) Acelaşi cu *Cerchez M.*

Odobescu I. N., 636.
Olteanu E. St., 92, 147, 280.
Onciu D. D., 296.
Onicescu O., 6, 15, 83, 133, 143, 364, 528, 635.
Onişor V., 324.
Orănescu O., 15.
Orăşanu D. C., 5, 6, 15, 33, 628.
Orăşeanu Gr., 15.
Ordeanu I. M., 296.
Oresco Al., 199.
Osgood F. W., 305, 306.
Ossian, 197.
Ozanam, 583.

Pacioglu C. C., 296.
Păduraru O., 617.
Pădureţ A. V., 45, 156.
Pagosse, 33.
Paicu M., 388, 497.
Painlevé P., 307.
Panaite N. Th., 192.
Panaitescu Sc., 19.
Pantazi Al., 6, 15, 364, 534, 536, 635.
Pantelimon V. C.*), 45, 46, 48, 209, 268, 275, 311, 314, 387, 433, 492, 498, 499, 500, 552, 659, 665.
Papadopol D. Elena, 296.
Papelier G., 154, 311, 389, 426, 510, 613, 637
Papus, 575.
Pardies G. I., 115.
Parepeanu C. I. S-Lt., 37, 92, 542.
Parteni A. C., 198.
Pârvu A., 15.
Pârvulescu Al. Vl., 45.
Păsărică Fl., 15.
Pascal, 91, 227, 240, 277, 339, 529.
Pascaru I. C., 48, 325, 387, 496, 606.
Pasqualini L., 528.
Patriciu G. T., 19.
Pătru, moş, 198.
Păun M. Gh., 154.
Păun S., 536.
Păuţescu C., 386, 492.
Pavlid D., 199.
Pericles, 394.
Perieţeanu D., 35.
Perozzo L., 198.
Pescaru I., 45.
Petrescu V. Achile, 160, 216, 296, 324, 387, 496, 527, 551, 606.
Petrescu G., 660.
Petrescu R. G., 499.
Petrescu Iulian, 92, 221, 269, 386, 387, 390, 492, 498, 573, 606, 608.
Petrescu Mihai, 45, 324.
Petrescu S., 441.
Petrescu I. Şt., 296.
Petrovanu D., 253.
Petrovich M., 195, 419.
Petrovici I., 174.
Petru Cel Mare, 337, 395.
Philipide M., 15.
Picard E., 169, 246, 403.
Picone, 305.
Piobeta, 33.
Pitagora, 240, 586.
Pizanty M., 478.
Planck, 119.
Platner Ch., 83. 48.
Pogorelscy P., 2
Poincaré H., 169, 365.
Poisson, 195, 459, 517.
Pompeiu D, 364, 478, 580, 635.
Ponceleţ, 246.
Pop G., Slugerul, 199.
Pop Gr. I., 296.
Popa N. A., 160, 296, 387, 492, 498, 499, 606, 651, 659.
Popa A. Ilie, 363, 459, 628.
Popa I. I., 530.
Popa D. M., 45, 46, 108, 158, 164, 210, 268, 271, 273, 296, 387, 409, 410, 432, 433, 438, 439, 468, 492, 496, 497, 498, 499, 503, 527, 545, 547, 552, 581, 595, 597, 606, 657, 659, 663, 666.
Popa T., 296.
Popescu Ad. S-Lt., 45, 445, 447, 493.
Popescu S. C., 530, 584.
Popescu I. Gh. G-l, 311, 631.
Popescu I., 19.
Popescu C. I., 81, 196.
Popescu M. I., 95.
Popescu V. Ilie, 196.
Popescu Gh. M., 296.
Popescu N. P., 540.
Popescu V., 15, 142.
Popescu-Botoşani Gh., 15, 96, 447.
Popescu-Zorica N. Al., 44, 45, 46, 55, 310, 545.
Popovici C. Prof., 364, 531, 635.
Popovici Th. I., 148.
Popoviciu I. G., 375.
Popoviciu Tib., 6, 15, 37, 87, 238, 302, 475, 528, 579, 580, 635, 638, 639.
Popp N. Lt. C-dor, 15.
Popp Tr., 16, 217.
Portocală M., 16, 307, 364.
Pospisil B., 419.
Postelnicescu C. M., 43, 92, 310.
Potopeanu Gh. G-l., 16.
Potopeanu Gh. Elev, 496, 554,
Praporgescu N., 16, 580.
Preda M., 92.
Predoescu I. M, 259, 648.
Predoiescu-Ţânţăreni Tr., 45, 594.
Predoleanu N., 296.
Prix E., 249.
Proca A., 534.
Profiri N., 253.
Protescu O., 198.
Prouhet A., 593.
Protopopescu Gr. G-l., 16.
Protopopescu I., 304, 581.
Ptolomeu, 240, 619.
Puchiu T. Gh., 296.
Puissan, 248.
Puşcariu J. I. 32.

Quéreuil, 449.
Quintimus-Sella**), 82.

Raabe, 80, 637, 652.
Raciu I. Margareta, 44.
Racoviceanu Gr. Vl., 442, 498.
Racoviţă O., 253.
Radu M., 253.
Rădulescu G., 253.
Rădulescu Th. I., 296.

*) Acelaşi cu *Constantin V. P.*
**) Vezi *Sella-Quintimus.*

Rădulescu Gh. Oct., 45, 209, 263, 552, 595, 659, 661.
Rădulescu-Motru C., 364.
Rădulet R., 581.
Ramesseum, 629.
Râmniceanu I. Cr., 37.
Regnault, 141.
Reinhorn A. B., 148, 199.
Reischer L. H., 45, 51, 209, 325, 387, 388, 433, 441, 494, 496.
Revici T., 16.
Reye Th., 198, 308.
Ribaucour *), 286, 287, 288, 340, 392, 403, 452, 453.
Richard J., 420.
Riemann, 242.
Ripert L., 365.
Ripianu D., 156, 164, 216, 268, 312, 386, 433, 438, 496, 593, 595, 657.
Ritt G., 248.
Riureanu M. J., 307.
Robert P. J., 362.
Robescu F. A, 225.
Rocard I., 420.
Rohr I. A., 45, 209, 296, 379, 387, 441, 492, 496, 498, 500, 527, 548, 554, 606, 651, 654, 660.
Rolea C. V., 216, 269, 325, 499, 612.
Rolle, 97, 305, 665.
Romanowsky, 143.
Romaşcan G. Georgeta, 45, 156.
Roşca St. G., 38, 92, 540.
Roşculet N. M., 45, 265, 652.
Rosenberg G., 536.
Rosenblatt S. M. zis Roth, 45, 321.
Rosenzweig S. M., 388, 607, 608.
Roşiu I. G., 81.
Roşu Al. Al., 5, 6, 16, 410.
Roşu M. M., 296.
Roşu V., 16.
Rothe, 400.
Röttinger M., 420.
Rouché E., 34, 197.
Rousselot, 289, 290, 291.
Rouvier R., 58.
Ruginâ Z., 253,
Ruols, 449, 451.
Russu L. M., 657.
Rusu L. M., 496, 552, 554, 580.

Şabac Gh. I., 42, 43, 93 542.
Sacter O., 377, 384, 385.
Sagastume Berra E. A., 31, 582.
Sager N. I., 92, 208, 542.
Şaichin O. A., 45, 156, 210, 262, 271, 273, 312, 388, 659.
Saint-Germain A. de, 197.
Sălăgeanu A., 16.
Saligny M., 16.
Sâmbotin G., 92.
Săndulache C., 373.
Sanguineti J., 195, 477.
Săpunaru S. Gh., 16.
Şaramet I., 92.
Sarian M., 5, 6, 16, 219, 220, 330.
Săruleşteanu I. Em., 45.
Savin C. I. Lt., 16, 41, 92, 208, 391, 527, 608, 610.
Sbârnea D. Gh., 296.
Schaar M., 144.
Schileru-Dili C. I., 16, 390, 552, 554.
Schitenescu-Schiteanu C. I., 142.
Schlegel V., 308, 420.
Schlömilch O., 249, 308.
Schmidt W., 306, 307.
Schmidt-Dumont O., 307.
Schöne H., 307.
Schouten A. J., 198.
Schröder E., 144.
Schüler Fr. W., 308.
Schvader W., 144.
Schwartz, 124.
Schwering K., 365.
Sciurevici Vl., 198.
Scodrano A., 311.
Scurtu I. I., 388.
Sebeşan St., 530.
Secu V. Ad., 45.
Segal J., 45, 156, 389, 498, 542, 607.
Segârceanu N., 638. 639.
Sègre B., 404.
Şeibulescu A. C., 296, 432, 442, 499.
Seifert L., 419.
Séjourné P., 629.
Sella-Quintimus **), 82.
Senché M. E., 276, 388.
Şerban C. C., 296, 498.
Şerban A. T., 438, 493, 496, 545, 657.
Şerban-Ulmeni D., 154.
Şerbănescu Gh. V., 16.
Şerbescu-lu C., 225, 228, 248,
Şeremet Gh., 92.
Sergescu B., 16.
Sergescu P., 6, 16, 133, 142, 143, 144, 196, 307, 349, 364, 460, 486, 515, 582, 583, 637.
Serret, 638.
Sfinţescu I. C., 16.
Siegfried, 280.
Sierpinsky W., 83.
Simionescu D. G., 5, 6, 17, 54, 87, 168, 222, 311, 336, 378, 390, 448, 482, 502, 529, 534, 536, 558, 581, 594, 616, 671.
Simpson, 247.
Simson T., 42, 43, 44, 145, 146, 167, 446 529, 533, 534, 571.
Singier G., 583.
Sipos P., 561.
Slătinescu C., 500.
Slutsky, 143.
Smântânescu A., 17.
Smigelschi, 198.
Socin A., 117.
Sohnckès A. L., 144.
Solomon I. I, 45, 97, 303, 321, 386, 433, 595.
Solomon M. M., 498.
Sonnet H., 199.
Souchon Abel, 307.
Şova I., 27.
Staicu I. C., 296.
Staicu I. N., 45.
Stamate I. I., 45, 313, 325, 386, 433, 442, 477, 498, 530, 545, 620, 640, 657.
Stamatescu I. G., 17.
Stamatescu I., 17.

*) Vezi erata pag. 392.
**) Vezi *Quintimus-Sella*.

Stan I. A. Lt., 17, 90, 431.
Stan A. D., 17, 28, 417, 418, 582.
Stănculescu M., 493.
Stănescu St. C., 296.
Stavrat G. M., 108.
Ştefan, 458.
Ştefan C. T. *), 45, 99, 209, 325, 377, 390, 494, 603.
Ştefănescu Em., 149, 638.
Ştefănescu D. N., 26, 27, 43, 311, 312, 373, 388, 389, 442.
Ştefanovici C. I., 388.
Ştefanovici I. M., 296, 386, 442, 479, 584.
Steinhaus, 143.
Stern E., 362, 363.
Stewart, 240, 293.
Stirling, 583.
Stoenescu I. Al., 5, 6, 17, 31, 33, 110, 161, 164, 168, 195, 200, 201, 224, 247, 278, 306, 312, 328, 330, 336, 355, 442, 443, 504, 527, 533, 603, 605, 616, 628, 666, 667.
Stoenescu D. Mirel, 45, 46, 296, 386, 438, 498, 499, 545, 597.
Stoianovici I. Mircea, 276.
Stoianovici I. Ş., 296.
Stoica D. Al., 91.
Stoica V. D., 5, 17, 28, 239, 364, 410, 467, 523, 574.
Stoica V. V., 554.
Stoicescu T. T., 17, 443, 444, 445, 500, 554, 555, 556, 559, 612, 613, 668.
Stoilov S., 305, 478, 580, 635.
Stoltz O., 249.
Stratilescu Gr., 364.
Streder G. I., 45, 47, 594.
Sturm M., 248.
Sulițeanu C. C., 296, 324.
Széll K., 198.
Szpilrajn E., 528.
Tacquet A., 115.
Tamerlan, 394.
Tănăsescu M. A. G-l., 17, 250.
Tănăsescu A. T., 17, 152.
Tănăsescu V. Venera, 44.
Tannery J., 169, 575.
Tarnier, 82.
Târsu V. Ad., 389.
Tataru N. N., 209.
Tauber A., 148.
Taylor, 72, 495, 632, 637.
Tchebichef, 538.
Teleki A, 114.
Teleki Iosef, 114.
Teleki Sam., 113, 114, 229, 230, 231, 289, 291, 292.
Teodor E., 500.
Teodoreanu V., 17.
Teodorescu C. C., 17, 580.
Teodorescu Dem., 346.
Teodorescu C. Maria, 296.
Teodorescu N., 148, 638.
Teodorescu V. N., 17.
Teodoriu L., 534.
Tesar L., 198.
Thébault V., 40, 109, 238, 239, 246, 295, 304, 325, 334, 376, 406, 430, 446, 464, 478, 503, 539, 544, 558, 580, 581, 592, 598, 614, 629, 643, 646.
Theodorescu N. Dorin, 45, 46, 296, 385, 432, 492, 499, 645.
Theodoru H., 17.
Thierrin H. G., 17.
Thue Axel, 579.
Tilică C. Şt. **), 387, 496.
Ţino N. O., 5, 6, 17, 28, 33, 34, 41, 48, 86, 91, 94, 96, 141, 145, 147, 154, 156, 158, 166, 204, 207, 222, 246, 257, 418, 478, 503, 574, 581, 614, 636, 646, 648, 654, 661, 664, 665.
Tisserand, 637.
Ţiţeica Gabriela, 17, 223, 504, 560.
Ţiţeica Gh., 19, 28, 169, 170, 171, 172, 173, 281, 286, 287, 288, 310, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 363, 364, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 452, 453, 454, 456, 457, 573, 574, 580, 581.
Ţiţeica I. I. ***), 43, 156, 167, 238, 310, 311, 484, 486.
Ţiţeica Radu ****), 169.
Ţiţeica G. R., 18.
Ţiţeica Şerban, 580, 635.
Ţiţeica Stanca, 169.
Ţocu Gh. P., 389, 607.
Toma N. N., 45.
Tomaschek, 458.
Tombeck E. H., 248.
Tomescu St. I., 18.
Tomlinson F., 195.
Topolescu S. Gh., 265, 386, 388, 498.
Topârceanu Gh., 612.
Topalescu Gh., 385, 388, 440.
Torouţiu E. I., 457.
Torricelli, 141.
Trefilov I. M., 386, 388, 432, 442, 494, 496, 498, 499, 500, 547, 606, 608, 654.
Trifon C., 92.
Trofim I. P., 278, 389, 493.
Trofimov P. *****), 154.
Tucker, 166.
Tudoran M. Lydia, 442, 659.
Tudoran M., 253.
Tudoran M. Sonia, 99.
Turcu R. S., 45, 160, 310, 492, 499, 606.
Turtoiu F., 612, 668.
Tycho-Brahe, 619.

Udrea C. I., 296.

*) Acelaşi cu *Tilică C. Ştefan.*
**) Acelaşi cu *Ştefan C. T.*
***) Acelaşi cu *Ioan A. I.* şi cu *Ilie A. I.*
****) Tatăl profesorului *Gh. Ţiţeica.*
*****) Acelaşi cu *Trofim P.*

Ulescu A., 18.

Văduva Fl. M., 296, 325, 386, 441, 498, 551, 603.
Vahlen T., 304, 581.
Vâlcovici V., 18, 423, 425, 634, 635.
Van der Lyn, 528, 632.
Van Swieten G., 292.
Vandermonde, 312, 460, 461, 648.
Vardala I., 18.
Varlaam P., 92.
Varnier, 290.
Vasilache I., 18.
Vasilescu Fl., 534.
Vasilescu C. Gr., 18.
Vasilescu C. I., 18, 426.
Vasilescu-Karpen N., 364, 392, 635.
Vasilescu-Stabu A. M.*), 26, 45, 47, 51, 53, 107, 210, 265, 270, 271, 296, 303, 310, 312, 324, 347, 375, 386, 432, 441, 442, 447, 494, 498, 527, 580, 597, 598.
Vasiliu C. D., 160.
Vasiliu G. Dan, 18.
Vasiliu G. D-tru, 296.
Vasiliu Gh., 18, 44, 45, 167, 375.
Vasiliu C. I., 87, 88, 147, 148, 255, 390, 446, 503, 586, 638, 639, 645.
Vasiliu M., 18.
Vautré, 462.
Velicescu N. N., 37, 154, 587, 667.
Vescan T. T., 6, 18, 32, 33, 58, 59, 63, 83, 126, 143, 198, 304, 305, 362, 365, 420, 523, 580, 581.
Viciu A. A., 18.
Vignaux C. J., 141, 195, 477.
Vijelie Gh. E., 166, 296, 497, 498, 659.
Villars, 285.
Vişa E., 212, 304, 363, 391, 418, 419, 478, 581.
Visarion C. I. V., 38, 92.
Vlad I. M. Lt., 155.
Vlădescu I. Gh., 500.
Vlădoianu T. I. R., 296,
Voisin Rousselot du, 289, 290, 291.
Voltaire, 394, 395.
Vonderlinn J., 33.
Voronca St., 534.
Vrânceanu G., 364, 635, 636.
Vrin J., 58.
Vuibert H., 147, 148, 195, 246, 304, 362, 418, 581.
Waring J., 135.
Weber W., 83.
Weill, 31.
Weiss L., 148, 149.
Wenck J., 144.
Werner K., 249.
Wielleitner H., 249.
Wilezynscki, 453.
Woinaroski R., 18.
Wolf Ch., 115, 248.

Yvon J., 83.

Zaborowschi I., 581.
Zaharia V. Gh., 296.
Zaharia O. N., 55, 528.
Zaharia G. Simion, 296.
Zaharia-Lupu I. M., 216.
Zamfir C., 499.
Zamfir I., 659.
Zamfirescu C. Gr., 18, 534.
Zamfirescu G. I. Lt., 110, 154, 161, 163, 167, 196, 277, 278, 497, 597, 615, 652.
Zane Al., 248.
Zapan Gh., 6, 19
Zapan Gr. Cpt. C-dor, 5, 6, 19, 133, 347, 529, 628, 670.
Zervos P., 580.
Zeuthen G. H., 249, 575.
Ziff S. M., 542.
Zlatcu St. C., 19.

K. LUCRĂRI CITATE **)

1. Cărţi, lucrări extrase, teze

		Pag.
N. Abramescu	Geometria pură infinitezimală	436
P. Appel & J. Kampé de Fériet	Fonctions hypergéométriques	467
G. Asachi	Aritmetică pentru începători	306
Aubert & Papelier . . .	Exercices d'Algébre	510
E. Bartholinus	Principia matheseos universalis	115
D. Bernouilli	Exercitationes mathematicae	115
D. Bernouilli	Hidrodinamica	115
I. Bernouilli	Opera omnia	115

*) Acelaşi cu *Vasilescu A. Mircea.*

**) In acest capitol nu sunt trecute lucrările citate în *Bibliografie* şi în *Diverse:* Sporirea bibliotecii *Gazeta Matematică.*

		Pag.
I. Bias	Gróf TELEKI SÁMUEL erdölyi Kanczellar uti naplója	113
J. Binder	Methodus inveniendi sinus arcuum	561
G. Boucheny	Curiosités & Récreations mathématiques	109
I. F. Buricescu & I. Petrovici	Logica pentru clasa VII-a liceală	174
A. Cantemir	Lettres sur la nature de l'homme	395
W. K. Clifford	Lectures and essays	118
V. Cristescu	Culegere de probleme de Trigonometrie 498, 501,	606
J. L. Destouches	Le rôle des espaces abstraits en Physique nouvelle	123
G. Doetsch	Theorie und Anwendung der LAPLACE Transformation	242
M. Erhard	Le prince CANTEMIR à Paris	337
Euclid	Elemente 28, 173, 175,	176
J. Dupuis	Table	536
F. G. M.	Exercices de géométrie 30, 593,	631
J. Fitz Patrick & G. Chevrel	Exercices d'Arithmétique	325
Fontenelle	Entretiens à une marquise sur la pluralité des mondes	338
G. Fubini & E. Čech	Geometria proiectiva diferenziale	284
R. Garnier	Leçons d'Algèbre et de géométrie	239
Gauss	Disquisitiones arithmeticae	243
A. Gloden	Sur les égalités multigrades	135
A. Haarbleicher	L'emploie des droites isotropes comme axes de coordonnées	607
T. L. Heath	A History of Greek Mathematics	575
T. L. Heath	Aristarchus of Samos	575
T. L. Heath	Appolonius of Perga	575
T. L. Heath	Archimedes	575
T. L. Heath	Diophantus of Alexandria	575
T. L. Heath	Elementele lui EUCLID	575
A. G. Ioachimescu	Culegere de probleme, Ed. II 28,	524
I. Ionescu	Culegere de Probleme de Aritmetică, Ed. II 348,	494
N. Iorga	Istoria Românilor	479
D. V. Isopescul	Das Theorem der Fourier'schen Reihen. 457,	458
G. Julia	Exercices d'Analyse	623
Karstens	Auszug aus den Anfangsgründen	562
A. G. Kästner	Geometrische Abhandlungen	563
A. G. Kästner	Geschichte der Mathematik	561
A. G. Kästner	Analysis finitorum	562
E. Lainé	Précis d'Analyse Mathématique	239
T. Lalescu	La géométrie du Triangle. Ed. II 43,	534
T. Lalescu & St. N. Mirea	Culegere de Probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie 199,	200

		Pag.
Ed. Landau	Vorlesungen über Zahlenthéorie	474
Gh. Lazăr	Geometria	530
A. M. Legendre	Géométrie élémentaire	411, 580
J. Lemaire	L'hyperbole équilatère et quelques courbes dérivés	208
Lucas	Théorie des nombres	538
E. Mach	Die analyse der Empfindung	57
E. Mach	Erkentniss und Irrtum	57
A. Martonfi	Initia astronomica speculae Bathyanianie albensis in Transilvania	629
Meyerson	De l'explication dans les sciences	58
E. R. Neumann	Vorlesungen zur Einführung in die Relativitäts-theorie	59
N. Nielsen	Géométres français sous la révolution	512
B. Niewenglowski	Cours de géométrie analytique	64
Nifon, Mitropolitul	Ceaslov	217
G. Papelier	Exercices de Géométrie Moderne	154, 311, 389, 613
G. Papelier	Precis de géométrie analytique	426
I. G. Pardies	Eléments de Géométrie	115
Tr. Popp	Astronomie (cl. VII)	217
G. I. Roşiu	Elemente de Algebră	81
E. Rouché & Comberousse	Traité de géométrie	34
R. Rouvier	La pensée D'ERNEST MACH	58
P. Séjourné	Grandes voûtes	629
C. Şerbescu-lu	Tratatu de Algebra elementară	225
A. Tacquet	Elementa Euclidea geometriae planae ac solidae	115
G. Ţiţeica	Culegere de Probleme de Geometrie Analitică	28
G. Ţiţeica	Culegere de Probleme de geometrie	310, 442
G. Ţiţeica	Géométrie differentielle projective des réseaux	285, 452
G. Ţiţeica	Introduction à la géométrie projective des courbes	285, 454
G. Ţiţeica	Sur les congruences cycliques et sur les systèmes triplement conjugués	170
I. E. Torouţiu	Poporaţia şi clasele sociale din Bucovina	457
T. Vescan	Contribuţiuni la teoria cinetică şi relativistă a fluidelor reale	57
T. Vescan	Din problemele filozofiei ştiinţelor	58
T. Vescan	Mecanica şi teoria relativităţei	59
Voltaire	Istoria lui CAROL XII	394
Wolff	Elementa matheseos universae	115
Wolff	Opera omnia	115
***	Condica lui AL. IPSILANTE	469
***	Il Newtonianismo pe le Dame ovvero dialoghi sopra la luce	395
***	Legea lui CARAGEA	524

Pag.

*** . . . . . Regulamentul hotărniciilor 410
*** . . . . . Regulamentul pentru facerea şi executarea hotărniciilor 243

2. Periodice

Actes du Congrès Interbalcanique des Mathématiciens, Athènes . . 281, 285
Actes Scientifiques 121
Analele Academiei Române 281, 283, 284
Annales de l'Université de Lion 337
Annales de Mathématiques pures et appliqués. Grenoble 512
Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure . 281, 282, 283, 284, 510
Archiv für Mathematik og naturvidenkab 579
Asociaţia română pentru înaintarea şi răspândirea ştiinţelor 281, 282
Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici, Roma 281, 283
Berliner Sitzungs Berichte 120
Boletin Matematico 465
Buletinul Societăţii de Ştiinţe din Cluj 143, 465
Buletinul Societăţii de Ştiinţe din România 281, 282, 283, 285, 465
Bulletin de la section scientifique de l'Académie Roumaine. 281, 283, 284, 285
Bulletin de Mathématiques et de Physiques pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique „Roi Carol II" Bucarest 281, 283
Bulletin de sciences mathématiques 281, 282, 283
Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences Paris . 242, 281, 282, 283, 284, 285, 298, 342, 465, 579, 638
Congrès international des Mathématiciens, Oslo 281, 285
Curierul matematic 44, 479, 584, 638, 639
Encyclopedia Britannica 575
Foaia Cărţilor şi a Manuscriptelor după care se paradosesc obiectele în şcoalele publice 306
Gazeta Matematică 5, 10, 19, 20, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 43, 46, 53, 75, 76, 79, 88, 89, 90, 99, 109, 127, 130, 131, 133, 136, 144, 149, 150, 154, 174, 192, 196, 207, 212, 214, 228, 232, 238, 244, 248, 253, 270, 277, 296, 298, 300, 302, 309, 310, 311, 325, 332, 333, 336, 337, 346, 347, 348, 349, 363, 364, 387, 406, 409, 410, 411, 412, 441, 442, 459, 460, 461, 464, 465, 468, 472, 486, 523, 525, 527, 531, 533, 536, 538, 552, 570, 571, 574, 575, 577, 578, 580, 584, 588, 593, 603, 607, 617, 620, 621, 628, 629, 632, 639, 643, 646, 649, 652, 669
Gazeta Matematică, Suplimentul cu Exerciţii 6, 25, 669
Göttinger Anzeigen von Gelehrten Sachen 564
International Congress of mathematicians, Cambridge 281, 283
Internationales Mathematikerkongress. Zürich 281, 285
Journal de Crelle 241, 243
Journal de Mathématiques élémentaires de G. DE LONGCHAMPS 294
Journal de mathématiques pures et appliquées 281, 285, 465
Journal de Mathématiques spéciales 462

Pag.

Journal de Physique 120
Journal des Savants 393
Le Matematiche pure et applicate 281, 282
Matematica 632
Mathematikai és Fizikai Lapok 113
Mathesis 196, 294
Memorial 173, 457
Nouvelles Annales de Mathématiques 298, 465
Physikalische Zeitschrift der Sowietunion 120
Pitagora 165, 348. 410, 412, 588
Proceedings Congress, Toronto 281, 284
Proceedings of the Indian Academy of Sciences 135
Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 281, 282, 283
Revista Matematică din Timişoara . . 47, 51, 64, 96, 127, 135, 303, 440, 460
Revue Mathématique de l'Union Interbalkanique, Athenes 281, 285
Revue Scientifique 281, 284
Siebenbürghische Quartalschrift 562, 564
Ştiinţă şi Progres 118, 623
The Mathematics Student 476
Zeitschrift für Physik 119, 120

L. ERATA

Pagina şi Volumul sau Problema de îndreptat	*Pagina la care se indică îndreptarea de făcut*
Problema 5181	112
Pag. 572, Vol. XLIV	112
Problemele 1735, 5197, 5199	168
Problema 5153	224
„ 2017, 5133	280
„ 5133	336
Pag. 324, 282, 283, 286, 287	392
Problema 5262	392
Pag. 494, 499	560
Problema 5293	560
Pag. 525	616

M. SUPLIMENTE

Burse şi premii din fondurile Societăţii *Gazeta Matematică*.

Supliment la No. 1 . . . . . 11 pagini
Recreaţiuni Matematice. Supliment la No. 2 . . . . . 4 „
Recreaţiuni Matematice. Supliment la No. 5 . . . . . 4 „
Recreaţiuni Matematice. Supliment la No. 8 . . . . . 4 „
Recreaţiuni Matematice. Supliment la No. 11 . . . . . 4 „

N. PUBLICAŢIUNI IN AFARĂ DE „GAZETA MATEMATICĂ"

Gazeta Matematică. — Supliment cu Exerciţii. Vol. VI. 9 numere . 236 pagini
Statutele*) şi Regulamentele pentru administrarea fondurilor.

*) Apărută în 1938 şi neanunţată în Tabla de materii a Vol. XLIV.

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Bodnărescu M. Horia (5198, 228, 29, 44, 97); *Boiangiu D. D.* (4167, 5108, 274, 91, 302, 19, 29); *Dimitriu Călin C. T.* (5131); *Fila Gh. E.* (5118, 317, 24, 29); *Gheorghiu Gh. Oct.* (5305, 29); *Gligor N. I.* (5299, 328, 29); *Iorgulescu N. F.* (5232, 99); *Petrescu Iulian* (N); *Popa D. Mircea* (5221, 26, 319, 24, 29, 37, 38, 40, A); *Rusu L. Mircea* (5234, 57, 91, 312, P); *Segal J.* (5185, 98, 328); *Stamate I. I.* (4991, C, N, R); *Stoenescu D. Mirel* (5142, 43, 284, 99); *Văduva F. Marin* (4450, 5257, 63, 91, 99, 328); *Zamfirescu Gh. I.* (P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică* Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*
Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 50 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

C. 65.744